

複雑な開水路網の解法

正員 荒木 正 夫*

A METHOD FOR SOLVING OPEN CHANNEL NETWORKS

By Dr. Eng., Masao Araki, C.E. Member

Synopsis : The purpose of this paper is to describe a new method for solving complex networks of open channels, which are frequently seen in alluvial plains. A basic equation for correcting the assumed discharge is derived from Escoffier-Raytchine-Chatelain formula for back-water profiles. A simplified method based on the modified basic equation is solved by Hardy Cross method, and the general one based on the complete basic equation is solved by systems of linear algebraic equations.

要 旨 複雑な開水路網の解法は、沖積河川の網状水路部の解析に必要なものであるが、本論はこのような開水路網の新解法を提案するものである。基本となる不等流計算法は Escoffier の図式解法によるものとし、Escoffier の不等流公式より、開水路網の流量修正計算に必要な基本方程式を誘導した。次にこの基本方程式を簡略化して取扱う簡便解法と、そのまま適用する一般解法に分けてそれぞれ解法を示した。すなわち、簡便解法では主として Hardy Cross 法によつて解き、一般解法では連立一次方程式による解き方を明らかにした。

1. 緒 言

図-1 に示したような複雑な開水路網は、沖積河川の河口部やいわゆるクリーク地帯などにしばしば見受けられる。ところがこのような複雑な開水路網の各水路の流量を水力計算によつて求めることは相当困難であつて、従来は 図-1 の分流点 (白丸点) の水位が、計算径路のいかんにかかわらず一致するように、全く試算的に各水路の流量を定める以外に、適当な方法がなかつたようである。しかし、このような計算方法では、図-1 (分流点 10 個) 程度以上の複雑な水路網になると、よほどの努力と日時を注入しない限りまず解くことはむずかしい。

一方、水路が分岐するときの分流量は、池田哲夫氏¹⁾ が述べているように、(1) 分岐の角度、(2) 分流口付近の水路の形状によつて影響を受けるので、上述のごとく単に左右両水路の不等流計算により分流点の水位を一致させる分流量を求めただけでは、正しい分流量を得られるとはいひがたいのである。しかしながら、自然河川のように水深に比して川幅が大きくかつ比較的ゆるやかな流れでは、分流点の水路形状は流量配分に決定的なほど大きい影響をおよぼすものではないとされているから、後に示すように補正係数 β の導入により、分流口の角度および形状の影響の補正をなしうるものとする。射流やこれに近いような常流では分流点の形状が分流量に決定的に大きい影響を与えることがあるから、このような速い流れは本論では取扱わないものとする。本研究は比較的ゆるやかな常流が流れる複雑な水路網に対し、管網計算法の原理を適用することにより、速やかに各水路の分流量ならびに水面形を求める新方法を提案するものである。

2. 流量修正の基本方程式

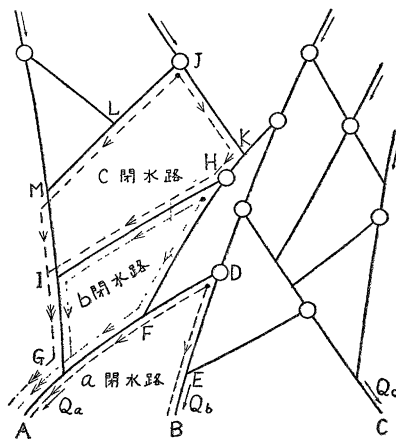
開水路の水面形を定めるには不等流計算を行う必要があるが、これには Francis F. Escoffier の図式解法²⁾ を用いるものとする。Escoffier の基本式は 図-2 について次式により与えられる。

$$(H_m + z_m) - (H_{m-1} + z_{m-1}) = Q^2 (E_{m-1} - F_m) \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{ここに } E_{m-1} = \frac{\alpha(1-r)}{2gA_{m-1}^2} + \frac{n^2L}{2A_{m-1}^2R_{m-1}^{4/3}}, \quad F_m = \frac{\alpha(1-\beta)}{2gA_m^2} - \frac{n^2L}{2A_m^2R_m^{4/3}} \dots \dots \dots (2)$$

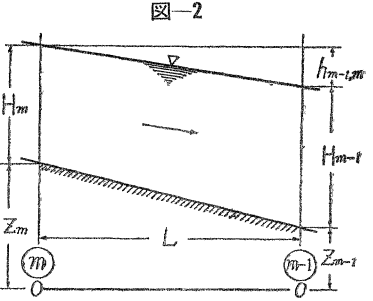
ただし、 H は水深、 z は底面の基準面からの高さ、 A は断面積、 R は径深、 n はマンニング流速公式の粗度

図-1 複雑な開水路網



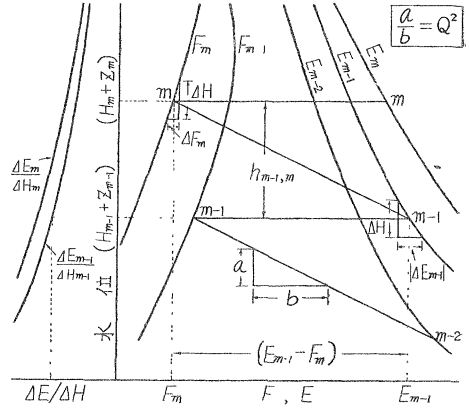
* 工学博士、九州大学助教授、工学部土木工学教室

係数, L は水路区間長, Q は流量, g は重力の加速度, α は流速分布状態に関連する補正係数(通常 1.1 程度), β および r は分流口損失, 形状損失, 彎曲損失など要するに摩擦損失以外の水頭損失に対する補正係数。このうち β は 図-2 の m 断面が分流点に当たっている場合には, 主として分流口損失をあらわすことになり, 前述のごとく分岐の角度および分流点の水路形状によつて支配される重要な因子となる。また水路中間における水頭損失のおもなる原因としては, 断面急拡大や水路急彎・屈曲などがあり, β および r はこれらに関する補正係数であるが, 断面急拡大のときには $\beta=r$, としてよい³⁾。



Escoffier の図式解法とは, 水路の下流端水位と流量が与えられた場合, 図-3 に示すように流量の自乗に比例する勾配を有する平行斜線と, 水平直線とを交互に引くことにより, 各断面の水位を図式的に求める方法である。

図-3 不等流の図式解法



さて, まず最初に分流点および合流点における連続の条件を満足させるようにして, 各水路にできるだけ妥当と推定される流量を仮定する。この場合もし各水路の仮定流量が正しい値であるならば, 図-1 の各白丸点の算定水位は, 計算経路のいかんにかかわらず一致するはずであるが, 実際には当初の仮定流量には多少の誤差をとまらうから, 計算経路に応じて異なつた水位が得られることになる。この合流点における各計算水位差にもつづき, 合理的に流量修正を行う方法を以下論ずることとする。ところで開水路網が管網と根本的に異なる点は次の通りである。すなわち管水路では A および R は常に一定で, 流量および圧力水頭には無関係であるのに対し, 開水路では A, R がともに水深の変化に応じて変化する。従つてこの点を考慮しなければならないので, 開水路網の解法は管網計算法より多少複雑となる。

(1) 式において Q に ΔQ の変化があり, H_{m-1} に ΔH_{m-1} の変化があるとき, H_m の変化はどのようになるかを調べる。(1) 式より

$$\begin{aligned} (H_m + \Delta H_m + z_m) - (H_{m-1} + \Delta H_{m-1} + z_{m-1}) &= (Q + \Delta Q)^2 \{ E_{m-1}(H_{m-1} + \Delta H_{m-1}) - F_m(H_m + \Delta H_m) \} \\ &= \{ Q^2 + 2Q \cdot \Delta Q + (\Delta Q)^2 \} \left\{ E_{m-1}(H_{m-1}) + \frac{\partial E_{m-1}}{\partial H_{m-1}} \Delta H_{m-1} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E_{m-1}}{\partial H_{m-1}^2} (\Delta H_{m-1})^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. - F_m(H_m) - \frac{\partial F_m}{\partial H_m} \Delta H_m - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F_m}{\partial H_m^2} (\Delta H_m)^2 - \dots \right\} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

(3) 式において $\Delta Q, \Delta H_{m-1}, \Delta H_m$ はいずれも小さいとして, おのおのの自乗および相乗積以上の項を微小項として省略する。(1), (3) 式より

$$\Delta H_m - \Delta H_{m-1} = 2(E_{m-1} - F_m)Q \cdot \Delta Q + Q^2 \left(\frac{\partial E_{m-1}}{\partial H_{m-1}} \Delta H_{m-1} - \frac{\partial F_m}{\partial H_m} \Delta H_m \right)$$

$$\text{これより } \Delta H_m = p_{m-1,m} \cdot \Delta Q + q_{m-1,m} \cdot \Delta H_{m-1} \dots \dots \dots (4)$$

ここに

$$p_{m-1,m} = \frac{2(E_{m-1} - F_m)Q}{1 + Q^2 \frac{\partial F_m}{\partial H_m}}, \quad q_{m-1,m} = \frac{1 + Q^2 \frac{\partial E_{m-1}}{\partial H_{m-1}}}{1 + Q^2 \frac{\partial F_m}{\partial H_m}} \dots \dots \dots (5), (6)$$

$p_{m-1,m}, q_{m-1,m}$ は $\Delta Q, \Delta H_{m-1}, \Delta H_m$ に無関係に流量と水位より定まる。(4) 式が流量修正の基本方程式であつて, 各量変化後の値は次の通りである。

$$\bar{Q} = Q + \Delta Q, \quad \bar{H}_{m-1} = H_{m-1} + \Delta H_{m-1}, \quad \bar{H}_m = H_m + \Delta H_m$$

3. $p_{m-1,m}$ および $q_{m-1,m}$ の実用計算法

$p_{m-1,m}, q_{m-1,m}$ は断面形が矩形, 台形, 放物線形などの幾何学的形状を有している場合には, (5), (6) 式より計算により直接求めることも可能であるが, 一般には次のようにして求めた方が迅速であるし, 計算精度もこの程度で十分である。

$$\frac{\partial E_{m-1}}{\partial H_{m-1}} = \frac{\Delta E_{m-1}}{\Delta H_{m-1}}, \quad \frac{\partial F_m}{\partial H_m} = \frac{\Delta F_m}{\Delta H_m}$$

とおけるから、これらは 図-3 の E, F 曲線から、 ΔH の値を適当に選ぶことにより簡単に読みとれるし、または後述の一般解法におけるごとく比較的精度のよい $\Delta E_{m-1}/\Delta H_{m-1}$ 、 $\Delta F_m/\Delta H_m$ を求めたい場合には次のごとくすればよい。すなわち $E, F \sim H$ の計算表から 表-1 のようにして $\Delta E/\Delta H$ 、 $\Delta F/\Delta H$ の値を計算し、これらと H との関係を 図-3 の E, F グラフと同一シートに書きこんでおけば、かなり精度のよい値をただちに読みとることができる。

表-1 $\Delta E/\Delta H$ 計算表

H	E	$\frac{\Delta E}{\Delta H}$	H
H_0+y	E_1	$(E_2-E_1)/y$	$H_0+1.5y$
H_0+2y	E_2		$H_0+2.5y$
H_0+3y	E_3		

$$p_{m-1,m} = \frac{2(E_{m-1}-F_m)}{1+Q^2 \frac{\Delta F_m}{\Delta H_m}} Q \doteq 2(E_{m-1}-F_m) \left(1-Q^2 \frac{\Delta F_m}{\Delta H_m}\right) Q \dots\dots\dots (7)$$

または 図-2, 3 に示すように

$$h_{m-1,m} = (H_m+z_m) - (H_{m-1}+z_{m-1}) \dots\dots\dots (8)$$

とおき、(1)、(8) 式を (7) 式に代入すれば、

$$p_{m-1,m} = \frac{2h_{m-1,m}}{Q} \left(1-Q^2 \frac{\Delta F_m}{\Delta H_m}\right) \dots\dots\dots (9)$$

(7)、(9) 式はいずれを用いても無論差支えないが、一般には (9) 式の方が計算に便利である。次に、 $q_{m-1,m}$ は (6) 式より

$$q_{m-1,m} = 1 - Q^2 \left(\frac{\Delta F_m}{\Delta H_m} - \frac{\Delta E_{m-1}}{\Delta H_{m-1}} \right) \dots\dots\dots (10)$$

4. 開水路網の簡便解法

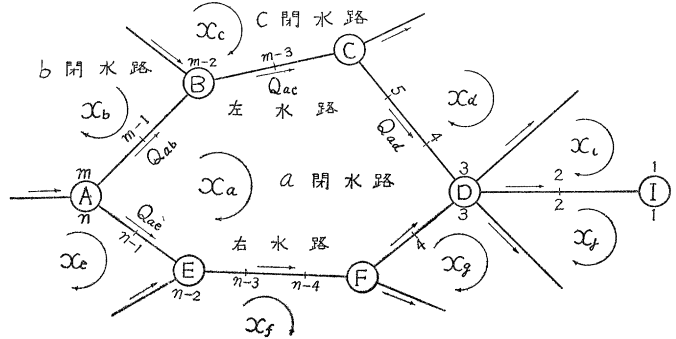
基本方程式 (4) 式において、(10) 式にて与えられる $q_{m-1,m}$ を 1 とおくことができれば

$$\Delta H_m - \Delta H_{m-1} = p_{m-1,m} \Delta Q \dots\dots\dots (11)$$

となり (4) 式はいちじるしく簡単となる。この場合、 $q_{m-1,m}$ を 1 と見なしたことにより生ずる誤差は、水路の任意断面に生じた水深変化の影響が、そのままの値で上流端まで伝播することである。このことは (11) 式において $\Delta Q=0$ とおけば、 $\Delta H_m = \Delta H_{m-1} = \Delta H_{m-2} = \dots\dots\dots = \Delta H_1$ となることより容易に証明される。水路延長が比較的短かいような場合には、 $q_{m-1,m}=1$ とおける場合も少くない。一般に $q_{m-1,m}=1$ とおけば 1 回の流量修正計算は迅速となるが、その代りに修正計算の反復回数が増大するのが普通である。この簡便解法の場合には、管網と同様に Hardy Cross の解法が適用されるが、ただ開水路常流では水面形計算に当つて誤差収斂の関係上、下流から上流に向つて計算を進めるのが原則とされているから、ここでもこの原則に従うことにする。

従つて 図-4 の a 閉水路 (以後略して a 閉水路と呼ぶ) において、水面形計算は必ず流れの下流から上流に向つて行ふ。すなわち左水路は合流点 D から出発して $DCBA$ の順に、また右水路は同じく D から出発して $DFEA$ の順に計算を進め、閉水路の

図-4 a 閉水路と隣接閉水路



分流点 A における水位を求める。かくして得られた分流点の水深が H_m (左水路) および H_n (右水路) であつて、流量配分が正しくない限り $H_m \neq H_n$ となる。ここで便宜上、流量および修正流量にプラス、マイナスの符号を次のように約束する。すなわち一閉水路において時計まわりの流れをプラスとし、反時計まわりの流れをマイナスと定める。このように流量の符号を定めれば、修正流量 x_a (a 閉水路の ΔQ を意味する) は左右水路の流量に加えればよいことになる。図-4 において a 閉水路の合流点 D は No. 3 の断面であるから、(11) 式より

左水路 (流量プラス)

$$\Delta H_m - \Delta H_3 = (p_{3,4} + p_{4,5} + \dots\dots + p_{m-2,m-1} + p_{m-1,m}) x_a = x_a \sum_4^m p_{m-1,m} \dots\dots\dots (12)$$

右水路(流量マイナス)

$$\Delta H_n - \Delta H_m = x_a \frac{\sum_4^n \overline{p_{n-1,n}}}{4} \dots\dots\dots (13)$$

ただし $\overline{p_{n-1,n}}$ は左水路の $p_{m-1,m}$ と区別するために上線を付したものであり、かつ $\overline{p_{n-1,n}}$ の値は Q がマイナスであるから常にマイナスである。しかるに

$$\overline{H_m} = H_m + \Delta H_m, \quad \overline{H_n} = H_n + \Delta H_n$$

とおくとき、 $\overline{H_m} = \overline{H_n}$ 、であるから

$$\Delta H_m - \Delta H_n = H_n - H_m \dots\dots\dots (14)$$

(12), (13), (14) 式より

$$x_a = \frac{H_n - H_m}{\frac{\sum_4^m \overline{p_{m-1,m}}}{4} - \frac{\sum_4^n \overline{p_{n-1,n}}}{4}} \dots\dots\dots (15)$$

x_a を左水路および右水路の流量に加える。以上の修正流量計算を $b, c, d, \dots\dots\dots$ 各閉水路ごとに行い、それぞれ仮定流量に加える。以下管網計算と全く同様に、この流量修正計算をくり返して漸次真値に近づけて行く。なお本解法において、各閉水路の下流端断面(図-4のD点)の水位は、それより下流の閉水路の計算径路により2つ与えられることがあるが、左右水路に対して同じ起点水位を採用する限り、そのうちのいずれを採用してもよい。ところで(9)式のカッコ内の $Q^2 \Delta F_m / \Delta H_m$ は、1に比していちじるしく小さい値となることがあるが、この場合には(9)式の代りに

$$p_{m-1,m} = 2 h_{m-1,m} / Q \dots\dots\dots (16)$$

として修正流量計算を始めてよい。もともと簡便解法では、 $q \neq 1$ とおいているが、このような仮定が許されるような開水路網では、 p についても(16)式を用いて十分である場合が多いと思われる。

5. 開水路網の一般解法

ここに開水路網の一般解法と称するのは、(4)式の基本方程式をそのまま適用する計算法であるから、簡便解法における $q=1$ とおくことにもとづく誤差が生じない。従つて修正流量計算の反復回数が少なくなり、速やかに真値に近づけることができるはずである。

ところで、(4)式を開水路網に適用した場合、 $q_{m-1,m} \cdot \Delta H_{m-1}$ の項があるから、一閉水路だけでは前章の簡便解法の場合と異なり、下流端の $q \cdot \Delta H$ を消去することができない。ゆえに一般解法の場合には計算径路を閉水路の下流端からさらに延長して、水位既知点(図-1のA, B, C点のごとく流量修正により水位が変化しない場所)すなわち、 $\Delta H=0$ なる点に結びつけて式を作る必要がある。このために管網に用いられる Hardy Cross 流の解法は、この場合適用困難なことは明らかであつて、ここでは青木康夫氏⁴⁾が管網について適用した連立一次方程式による解法の原理を適用するのが最も好都合であると思われる。この連立一次方程式による解法によれば、開水路網のすべての水路の修正流量が一举に求められるから、 $p_{m-1,m}$ 、 $q_{m-1,m}$ の算定に多少生間がかかる欠点があるにもかかわらず、前述の簡便解法よりも結局スピーディに解けることが多い。とくに複雑な開水路網になるほど然りである。

さて、図-1の開水路網について、本解法にとつて大切な計算径路のとり方を説明する。 a 閉水路においてはA, B点が水位既知点、D点が分流点であるから、計算径路は左水路DEB、右水路DFGAである。次に**b**閉水路においてはH点を分流点とすると、左水路はHFGA、右水路はHIGAであつて、この場合GA区間が左右水路の重複区間である。この重複区間は前述のごとく、合流点Gを水位既知点Aに結びつけるための径路である。またC閉水路の計算径路は図-1に鎖線で示す通りであつて、合流点IをIGAなる径路を通つてA点に結びつける。この例からわかるごとく、計算径路は各閉水路の合流点から、最短距離の重複径路を通つて水位既知点に結びつけるべきである。

図-4において、A点がa閉水路の分流点、D点が合流点、I点が水位既知点とすると、a閉水路がb, c, d, ……閉水路に隣接しているとする。またi, j閉水路は、a閉水路の合流点と水位既知点との間の水路を共有する両側の閉水路であるとする。まず最初に各水路の流量を、分・合流点における連続の条件を満足させるようにして、 Q_{ab} 、 Q_{ac} 、 Q_{ad} ……と仮定したとする。次にa, b, c ……各閉水路に修正流量 x_a 、 x_b 、 x_c ……を加え、その結果a閉水路のA点など、各閉水路ごとの分流点において、左右両水路に沿う計算水位が全部一致したものとする。しかるときは各水路の正しい流量 \overline{Q}_{ab} 、 \overline{Q}_{ac} 、 \overline{Q}_{ad} ……は明らかに次式で与えられる。

$$\overline{Q}_{ab} = Q_{ab} + x_a - x_b, \quad \overline{Q}_{ac} = Q_{ac} + x_a - x_c, \quad \dots\dots\dots$$

$$\overline{Q}_{ae} = Q_{ae} + x_a - x_e, \quad \overline{Q}_{af} = Q_{af} + x_a - x_f, \quad \dots\dots\dots$$

ただし流量および修正流量の符号は簡便解法の場合と同じである。

図-4 の左水路 ABCDI, に対して (4) 式を適用すれば

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_m &= p_{m-1,m}(x_a - x_b) + q_{m-1,m} \cdot \Delta H_{m-1} \\ \Delta H_{m-1} &= p_{m-2,m-1}(x_a - x_b) + q_{m-2,m-1} \cdot \Delta H_{m-2} \\ \Delta H_{m-2} &= p_{m-3,m-2}(x_a - x_c) + q_{m-3,m-2} \cdot \Delta H_{m-3} \\ \dots\dots\dots \\ \Delta H_4 &= p_{3,4}(x_a - x_d) + q_{3,4} \cdot \Delta H_3 \\ \Delta H_3 &= p_{2,3}(x_j - x_i) + q_{2,3} \cdot \Delta H_2 \\ \Delta H_2 &= p_{1,2}(x_j - x_i) + q_{1,2} \cdot \Delta H_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となるが、最下流点 I の水位は不変であるから $\Delta H_1 = 0$ である。(17) 式を順次下から上に代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta H_m &= p_{m-1,m}(x_a - x_b) + q_{m-1,m} \cdot p_{m-2,m-1}(x_a - x_b) \\ &\quad + q_{m-1,m} \cdot q_{m-2,m-1} \cdot p_{m-3,m-2}(x_a - x_c) + \dots\dots\dots \\ &\quad + q_{m-1,m} \cdot q_{m-2,m-1} \cdot q_{m-3,m-2} \dots\dots\dots q_{5,6} \cdot q_{4,5} \cdot p_{3,4}(x_a - x_d) \\ &\quad + q_{m-1,m} \cdot q_{m-2,m-1} \cdot q_{m-3,m-2} \dots\dots\dots q_{4,5} \cdot q_{3,4} \cdot p_{2,3}(x_j - x_i) \\ &\quad + q_{m-1,m} \cdot q_{m-2,m-1} \cdot q_{m-3,m-2} \dots\dots\dots q_{3,4} \cdot q_{2,3} \cdot p_{1,2}(x_j - x_i) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

(18) 式において q の積を C で表わす。すなわち

$$\begin{aligned} q_{m-1,m} &= C_{m-2,m-1}, & q_{m-1,m} \cdot q_{m-2,m-1} &= C_{m-3,m-2}, & \dots\dots\dots, \\ q_{m-1,m} \cdot q_{m-2,m-1} \cdot q_{m-3,m-2} &\dots\dots\dots q_{5,6} \cdot q_{4,5} &= C_{3,4}, \\ q_{m-1,m} \cdot q_{m-2,m-1} \cdot q_{m-3,m-2} &\dots\dots\dots q_{4,5} \cdot q_{3,4} &= C_{2,3}, \\ q_{m-1,m} \cdot q_{m-2,m-1} \cdot q_{m-3,m-2} &\dots\dots\dots q_{3,4} \cdot q_{2,3} &= C_{1,2} \end{aligned}$$

とおくと (18) 式より

$$\begin{aligned} \Delta H_m &= (p_{m-1,m} + C_{m-2,m-1} \cdot p_{m-2,m-1})(x_a - x_b) + (C_{m-3,m-2} \cdot p_{m-3,m-2} + \dots\dots) (x_a - x_c) \\ &\quad + (\dots\dots + C_{3,4} \cdot p_{3,4})(x_a - x_d) + (C_{2,3} \cdot p_{2,3} + C_{1,2} \cdot p_{1,2})(x_j - x_i) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

となるが、C には次の簡単な相互関係が成立するので、(19) 式の x 項の係数は容易に計算できる。

$$\begin{aligned} C_{m-2,m-1} &= q_{m-1,m}, & C_{m-3,m-2} &= q_{m-2,m-1} \cdot C_{m-2,m-1}, & \dots\dots\dots, \\ C_{3,4} &= q_{4,5} \cdot C_{4,5}, & C_{2,3} &= q_{3,4} \cdot C_{3,4}, & C_{1,2} &= q_{2,3} \cdot C_{2,3} \end{aligned}$$

同様にして右水路 AEFDI に対して (4) 式を適用すれば

$$\begin{aligned} \Delta H_n &= (\overline{p}_{n-1,n} + C'_{n-2,n-1} \cdot \overline{p}_{n-2,n-1})(x_a - x_e) + (C'_{n-3,n-2} \cdot \overline{p}_{n-3,n-2} + \dots\dots) (x_a - x_f) \\ &\quad + (\dots\dots\dots + C'_{3,4} \cdot \overline{p}_{3,4})(x_a - x_g) + (C'_{2,3} \cdot \overline{p}_{2,3} + C'_{1,2} \cdot \overline{p}_{1,2})(x_i - x_j) \dots\dots (20) \end{aligned}$$

ただし (20) 式の \overline{p} , C' は左水路の p, C と区別するための記号である。なお C' の符号は C と同じく常にプラスであるが、 \overline{p} の符号は常にマイナスで p と反対符号である。(14), (19), (20) 式より

$$\begin{aligned} H_n - H_m &= (p_{m-1,m} + C_{m-2,m-1} \cdot p_{m-2,m-1})(x_a - x_b) + (C_{m-3,m-2} \cdot p_{m-3,m-2} + \dots\dots) (x_a - x_c) \\ &\quad \times (\dots\dots + C_{3,4} \cdot p_{3,4})(x_a - x_d) - (\overline{p}_{n-1,n} + C'_{n-2,n-1} \cdot \overline{p}_{n-2,n-1})(x_a - x_e) \\ &\quad - (C'_{n-3,n-2} \cdot \overline{p}_{n-3,n-2} + \dots\dots) (x_a - x_f) \\ &\quad - (\dots\dots + C'_{3,4} \cdot \overline{p}_{3,4})(x_a - x_g) + \{(C_{2,3} - C'_{2,3})p_{2,3} + (C_{1,2} - C'_{1,2})p_{1,2}\}(x_j - x_i) \dots\dots (21) \end{aligned}$$

(21) 式は修正流量 $x_a, x_b, x_c \dots\dots$ を変数とする一次方程式である。同様にして b, c, d $\dots\dots$ 閉水路に対しても一次方程式を作れるから連立方程式を得る。閉水路の数だけ未知数があり、同じ数だけ一次方程式を作れるから、この連立方程式を解けば各水路の修正流量を同時に得ることができる。なお、(21) 式の x 項の係数は、表-2 のごとき表式計算表によると正確かつ迅速に求めることができる。同表において、*印は 図-3 のグ

表-2 修正流量の係数算定表

断面	水位	水位差	$\Delta F/\Delta H = \frac{2h}{Q} \left(1 - Q^2 \frac{\Delta F}{\Delta H}\right)$	$\Delta E/\Delta H$	$\frac{\Delta F_m}{\Delta H_m} - \frac{\Delta E_{m-1}}{\Delta H_{m-1}}$	$1 - Q^2 \left(\frac{\Delta F_m}{\Delta H_m} - \frac{\Delta E_{m-1}}{\Delta H_{m-1}}\right)$	C	C·p
m	* $H_m + z_m$	$\rightarrow (-) h_{m-1,m}$	* $f_m \rightarrow$	$p_{m-1,m}$	$f_m - e_{m-1} \rightarrow$	$q_{m-1,m}$	1	$p_{m-1,m}$
m-1	* $H_{m-1} + z_{m-1}$	$\rightarrow (-) h_{m-2,m-1}$	* $f_{m-1} \rightarrow$	$p_{m-2,m-1}$	$e_{m-1} \rightarrow$	$f_{m-1} - e_{m-2} \rightarrow$	$(\times) C_{m-2,m-1}$	$C_{m-2,m-1} \cdot p_{m-2,m-1}$
m-2	* $H_{m-2} + z_{m-2}$	$\rightarrow (-) h_{m-3,m-2}$	* $f_{m-2} \rightarrow$	$p_{m-3,m-2}$	$e_{m-2} \rightarrow$	$f_{m-2} - e_{m-3} \rightarrow$	$(\times) C_{m-3,m-2}$	$C_{m-3,m-2} \cdot p_{m-3,m-2}$

ラフから読みとる値である。

以上の一般解法において、例えば 図-1 の C 閉水路が IGA のごとき左・右水路の長い重複区間を有するように、上流側の閉水路ほど重複区間が長く、ために (21) 式を作るのがはなはだ面倒のように一見思われやすい。しかしながら、上流側の閉水路を水位既知点に結ぶ重複区間の係数算定には、下流側の閉水路に関してすでに求められている p, q の値をそのまま用いるから、(21) 式のようにして丹念に計算しても大して面倒ではない。のみならず重複区間の項は、次に示すような便利な計算でただちに求めることができるが、この方法は重複区間が長いとき特に有効である。図-4 の b 閉水路を例にとつて示すに、 B 点が合流点であつて、 $BCDI$ 区間が左・右水路の重複区間となる。(19) 式より $BCDI$ 区間の項を取り出し

$$\begin{aligned} \phi(x, C, p) = & (C_{m-3, m-2} \cdot p_{m-3, m-2} + \dots)(x_a - x_c) \\ & + (\dots + C_{3, 4} \cdot p_{3, 4})(x_a - x_d) + (C_{2, 3} \cdot p_{2, 3} + C_{1, 2} \cdot p_{1, 2})(x_j - x_i) \dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

とおく。しかるときは

$$\Delta H_b = \phi(x, C, p) / C_{m-3, m-2} \dots \dots \dots (23)$$

(23) 式で求められる ΔH_b は、明らかに b 閉水路の合流点 B の水位変化量を与える。ゆえに b 閉水路の左・右水路について、 B 断面より直下流の計算区間 (図-4 の $m-2 \sim m-3$ 区間) に対する C を、それぞれ C_{bl}, C_{br} とあらわすと、 b 閉水路の重複区間に対する値は次の式で与えられる。

$$(C_{bl} - C_{br}) \frac{\phi(x, C, p)}{C_{m-3, m-2}} \dots \dots \dots (24)$$

(24) 式は a 閉水路に対する (21) 式と比較すれば、重複区間に対する $(x_j - x_i)$ 項に相当するものである。従つて b 閉水路については、閉水路部分のみの修正流量式に (24) 式を加えれば、求める一次方程式が得られることになる。なお (24) 式は明らかに $C_{bl} = C_{br}$ のとき 0 となる。同様に (21) 式でも、 $C_{2, 3} = C'_{2, 3}$ のとき $(x_j - x_i)$ の項は無くなる。このように閉水路部の左・右水路に関して、それらの延長、川幅、流量などの諸性質がほぼ釣合とれていれば、(24) 式によつて与えられる重複区間の項は無視し得られるほど小さくなるものである。

ところで、以上の解法はもともと (3) 式の代りに、近似式たる (4) 式を基本方程式としているが、(4) 式そのものに $(\Delta Q)^2, (\Delta H_{m-1})^2, (\Delta H_m)^2$ などの高次の項を省略したことにもとづく若干の誤差がある。かつこの誤差は $\Delta Q/Q, \Delta H_{m-1}/H_{m-1}, \Delta H_m/H_m$ が大きければ大きいほど増大する。このために (21) 式の連立方程式から得られた修正流量には、いくらかの誤差がさげられないので、一般にはやはり反復計算が必要となる。しかしこの解法によれば、たとえ一部の水路の仮定流量に相当大きな誤差がある場合にも、修正された流量ははなはだ速やかに真値に収斂するので、通常 2 回以内の反復計算で完了することが多い。前記の Cross 法では修正された流量がある程度真値に近づいてからでも、なかなか収斂し切れないで困るものであるが、本解法の場合には、 $\Delta Q/Q$ が全般的に小さくなつてからの収斂はきわめて速やかである。

以上論じた一般解法の長所は、すでに述べたごとく修正流量計算の反復回数が僅少なことであるが、反面欠点として、(1) 修正流量の係数 $C \cdot p$ の算定にやや手数がかかること、(2) 連立一次方程式を解くのに若干の時間を要することが考えられる。このうち係数算定の手数をなるべく少なくするには、(2) 式の計算区間長 L をできるだけ大きくとることが望ましい。次に修正流量に関する連立一次方程式の解法については、P.D. Crout 法⁹⁾ や、Matrix を用いて解く内田法⁹⁾、などの巧妙な解法によれば迅速かつ誤りなく解くことができる。iteration 法はこの場合には一般に収斂が思わしくなく、きけた方がよい⁴⁾。

最後に、(21) 式においてすべての $C=1$ とおけば (25) 式となり、これは前章の簡便解法を連立一次方程式により解く方法となる。

$$\begin{aligned} H_n - H_m = & \left(\sum_4^m p_{m-1, m} - \sum_4^n \overline{p_{n-1, n}} \right) x_a - (p_{m-1, m} + p_{m-2, m-1}) x_b \\ & - (p_{m-3, m-2} + \dots) x_c - (\dots + p_{3, 4}) x_d + (\overline{p_{n-1, n}} + \overline{p_{n-2, n-1}}) x_e \\ & + (\overline{p_{n-3, n-2}} + \dots) x_f + (\dots + \overline{p_{3, 4}}) x_g \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

この場合には (21) 式における $(x_j - x_i)$ の項のごとき、重複区間に対する項は無論すべて消滅するから、連立方程式の作成はそれだけ簡単になる。ただしこの解法は一般には解の収斂が悪く、ために反復計算の回数が増して好ましくないが、開水路網の形態によつてはかえつて便利なこともある。

6. 結 語

以上で開水路網の解法に関する提案を終ることにする。管網と異なり開水路網では、 $\partial E/\partial H, \partial F/\partial H$ を考慮しなければならぬのでかなり取扱いが面倒であり、これが従来この方面の研究の進展をはばんだおもなる原

因であろうと思われる。本研究においてはこの難点を処理するために、図式解法と計算解法を組み合わせることにより、開水路網の実用的解法を導くことができた。以上論じた解法は、管網計算法にくらべるとかなり計算が面倒には違いないが、それでも複雑な開水路網を全くの計算的に解くよりも、ずつと早く解けることは確かである。なお、実際の開水路網の計算に当つては、その形態に応じて例えば一般解法における重複区間の項を、左右水路互に打消し合うものと考えて0とみなすなど、各ケースについて種々工夫判断することが肝要と考えられる。

終りに、本研究にあたり御懇切なる御指導を賜つた、九州大学教授 田中吉郎博士、松尾春雄博士、篠原謹爾博士、ならびに貴重なる御助言を頂いた徳島大学教授 青木康夫博士、の方々に対し深く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 池田哲夫：太田川分水計画について，建設省直轄工事第六回技術研究報告，昭.28.3.
- 2) 土木学会：水理公式集，昭 32 年改訂版，p.23
- 3) Stipp J S. Backwater profiles solved by Escoffier-Raytchine-Chatelain method, Civil Engineering, August, 1953.
- 4) 青木康夫：管網計算の連立一次方程式による新解法，水道協会雑誌，第 295 号，昭. 34.4
- 5) Prescott D. Crout: A Short Method for Evaluating Determinants and Solving Systems of Linear Equations With Real or Complex Coefficients, Trans. American Institute of Electrical Engineers, Vol. 60, 1941.
- 6) 内田一郎：弾性聯立方程式の一解法，土木技術，第 4 巻 6 号，昭.24.6

(昭 34. 10. 12)

正誤訂正表

土木学会論文集第 66 号 (昭. 35. 1) 掲載

正員 森 忠次：熱応力の光弾性実験法に関する研究

ページ	行	誤	正
21	6	difference between	difference of theoretical
"	20	物体を接着し，	物体に接着し，
22	17	温度制御も行うつて	温度制御を行つて
23	1	応力を発生繰回数	応力と発生繰回数
"	5	軸応力は (追加)	軸応力の差は，L を熱膨張係数とすると，
"	6	$d\sigma = \alpha E(T) dT \dots \dots (3)$	$d\sigma = \alpha E(T) dT \dots \dots (3)$
"	9	また f も	しかしまた f も
"	16	$N_0' = \alpha F (T_1 - T_2) / f \dots \dots (5)$	$N_0' = \alpha (T_1 - T_2) F / f \dots \dots (5)$
"	下から13	高温から低温まで	高温から室温まで
24	18	の値は表-2 に示した	この値は表-3 に示した
"	図-5	記号	二重円環
"	下から10	$a/b = \dot{B}, c/b = \dot{r}$	$a/b = \dot{\beta}, c/b = \dot{r}$
25	図-7	円環の熱応力	内側円環の熱応力
"	下から15	$N_0 = \alpha \int_{T_1}^{T_2} \frac{E}{f} dT = \alpha \frac{A}{B} \int_{K_1}^{K_2} dK \dots \dots (11)$	$N_0 = \alpha \int_{T_2}^{T_1} \frac{E}{f} dT = d \frac{A}{B} \int_{K_2}^{K_1} \alpha K = L = \alpha \frac{A}{B} (K - K_2) \dots \dots (11)$
26	図-10 (b) 下	厚さ 6.59 cm,	厚さ 0.59 cm,
27	25	つきに熱応力によつて……	熱応力によつて
"	"	実験を行った。その結果によればかかる	実験を行った結果によれば，かかる