

不完全合成桁の曲げ理論

正員 山 本 稔*

BENDING THEORY OF COMPOSITE BEAM WITH INCOMPLETE INTERACTION

By Minoru Yamamoto, C.E. Member

Synopsis : Mr. Newmark has already presented a very accurate solution of the bending theory of an incomplete composite beam simply supported. His solutions, however, vary their forms as the type of load varies, which causes many difficulties in practical application. The present author, by developing the load into a Fourier series, gave a solution of the bending problem in series. He also defined an additional coefficient of moment of inertia, and proposed a new bending theory of the incomplete composite beam which had similar forms to those of the classical beam theory, thus practically dissolving the inconvenience of Newmark's solutions. As the author's theory is only approximate, he examined the reliability of his solutions, by the comparisons with Newmark's solutions and the results of experiments.

要 旨 すでに Newmark 氏は、単純に支持された不完全合成桁の、曲げ理論における正解を発表しておられるが、これは、桁にのる荷重の形式によつて、解の形が相違するから、実際に応用するに当り、不便はまぬがれない。そこで筆者は、荷重をフーリエ級数に展開することにより、曲げ問題の級数解を求め、さらに断面二次モーメント増加率を定義して、不完全合成桁の曲げ理論を初等ハリ理論と類似な形で構成し、この不便を解消させることに成功した。しかし、筆者の計算法は、近似解であるため、なお Newmark 氏の正解並びに実験結果と比較して、精度を論じ、解の妥当性を確かめた。

1. 緒 言

Newmark 氏は、合成桁に曲げ変形を与えた場合、その構成部材が各初等ハリ理論に従うものとして、単純に支持された不完全合成桁の曲げ理論の正解を求め、かつ実験結果とも比較して、種々考察を進めている。しかし、Newmark 氏の理論においては、解の形が桁にのる荷重の様式によつて相違するから、実際にこれを利用するに当り、多少の不便はまぬがれない。そこで筆者は、計算式の単純化をはかり、この不便を取りのそくともに応用範囲も広めたいと考え、桁にのる荷重をフーリエ級数に展開して、級数の形で曲げ問題を解き、さらに断面二次モーメント増加率なる概念を導入して、単純ハリの初等曲げ理論におけると同様な関係式で、単純に支持された不完全合成桁の曲げを取り扱えるようにした。

次にこの理論について記述するが、これは近似理論であるから、さらに Newmark 氏の正解および実験値と比較し、その精度を論じて解法の適否も調べたいと思う。

なお筆者の理論においても、Newmark 氏のそれと同じく、合成桁の各構成部材が初等ハリ理論に従うという仮定を設けたことには変わりない。しかし、この仮定をスラブ部分に適用するに当つては、有効幅の問題として、さらに詳細な検討がなされなければならないが、ここではこの点に触れないこととする。

2. 解

(1) 仮定その他

ここに取り扱う合成桁は、図-1 に示すように、鉄筋コンクリート スラブと鋼桁とを shear connector で結合して作られた単純支持の合成桁で、(a)では鋼桁として I 型桁が、(b)では箱型桁が使用されている。

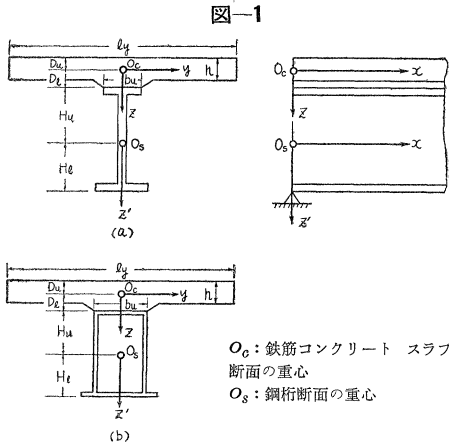
次にこのような合成桁の曲げ問題を取り扱おうと思うが、解析に当つて設けた仮定は次の通りである。

- (1) 先に述べたごとく、鉄筋コンクリート スラブおよび鋼桁は、各初等ハリ理論に従う。
- (2) 鉄筋コンクリート スラブおよび鋼桁の断面は、桁方向に一樣で、かつ材料は、フックの法則に従う。
- (3) 鉄筋コンクリート スラブと鋼桁の接合面には、一般に仮定されているように、次の関係式が成立する。

$$\bar{\tau} = k\delta \dots \dots \dots (1)$$

ここに $\bar{\tau}$: y 方向に平均化して考えた接合面に働く x 方向のせん断応力度, k : ズレの常数, δ : y 方向に平均化して考えた接合面の x 方向のズレ

* 東京都立大学助教授, 工学部土木工学教室



これらの仮定を満足する限り、構造のいかにかわからず単純支持の不完全合成桁の曲げ問題の解は、同一形式で表わされるから、別に図-1に示した合成桁に限定することなく、自由に構成部材の断面形状と材質を選ぶことができる。しかし図示の構造は、しばしば利用されるし、また解析上の一般性も失われないから、ここにこれを対象に選んだわけである。

さて、このような仮定のもとに、曲げ問題の級数解を求めするため、上記のせん断応力度 $\bar{\tau}$ および同じく y 方向に平均化して考えた接合面に働く垂直応力度 $\bar{\sigma}$ を

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau} &= p \tau_n' \cos \xi_n \\ \bar{\sigma} &= p \lambda_n \sin \xi_n \\ \xi_n &= \frac{n \pi}{l_x} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

とおく。ここに

l_x : 合成桁の支間, τ_n', λ_n : 未定常数, p : 応力度と単位を同じくする常数, n : 正の整数

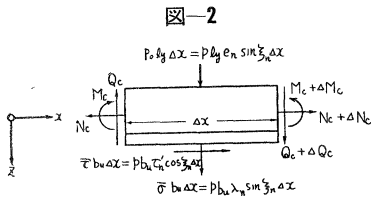
このように、接合面の応力を平均化して考えるならば、接合面には、 $\bar{\tau}, \bar{\sigma}$ の2応力しか存在しないと考えてよいから、これらを既知と考えると、鉄筋コンクリートスラブ並びに鋼桁の変形および応力は、容易に計算できる。そこで、これら変形および応力式を、接合面において存在すべき連続条件に代入して、逆に τ_n', λ_n を決定すれば、解が得られる。

2. 鉄筋コンクリートスラブにおける変形および応力式

鉄筋コンクリートスラブにのる荷重は、 y 方向には一様であるとし、スラブの単位表面積当り

$$p_0 = p e_n \sin \xi_n \dots\dots\dots (3)$$

で表わされるものとする。ここに e_n は、荷重の形によつて定まる常数である。一方鉄筋コンクリートスラブ断面に働く軸方向力、せん断力および曲げモーメントを各 N_c, Q_c および M_c とすれば、 x 方向に Δx で隔てられた鉄筋コンクリートスラブの微小要素は、図-2に示すごとき力の作用のもとで釣合っている。そこでまず、



x 方向の力の釣合式を書けば

$$\frac{dN_c}{dx} = -p b_u \tau_n' \cos \xi_n$$

これを積分して、 $x=0$ および $x=l_x$ において $N_c=0$ に注意すれば

$$N_c = -\frac{l_x}{n \pi} p b_u \tau_n' \sin \xi_n \dots\dots\dots (4)$$

次にモーメントおよび z 方向の釣合式を求めれば

$$\frac{dM_c}{dx} = Q_c - D_1 \cdot p b_u \tau_n' \cos \xi_n \qquad \frac{dQ_c}{dx} = -p(l_y e_n + b_u \lambda_n) \sin \xi_n$$

この第1式を x で微分して、これに第2式を代入すれば

$$\frac{d^2 M_c}{dx^2} = -\left(\frac{l_y}{b_u} e_n + \lambda_n - \frac{n \pi}{l_x} D_1 \tau_n' \right) p b_u \sin \xi_n \dots\dots\dots (5)$$

また鉄筋コンクリートスラブのたわみを w_c とすれば

$$\frac{d^2 w_c}{dx^2} = -\frac{M_c}{E_c J_c} \dots\dots\dots (6)$$

ここに E_c は、コンクリートのヤング率を、 J_c は、鉄筋コンクリートスラブ断面の断面二次モーメントを表わす。(5)式と(6)式を組合わせて

$$E_c J_c \frac{d^4 w_c}{dx^4} = \left(\frac{l_y}{b_u} e_n + \lambda_n - \frac{n \pi}{l_x} D_1 \tau_n' \right) p b_u \sin \xi_n$$

これを積分して、 $x=0$ および $x=l_x$ で $w_c = \frac{d^2 w_c}{dx^2} = 0$ に注意すれば、鉄筋コンクリートスラブのたわみとして次式を得る。

$$w_c = \frac{1}{E_c J_c} \left(\frac{l_x}{n \pi} \right)^4 \left(\frac{l_y}{b_u} e_n + \lambda_n - \frac{n \pi}{l_x} D_l \tau_n' \right) p b_u \sin \xi_n \dots\dots\dots (7)$$

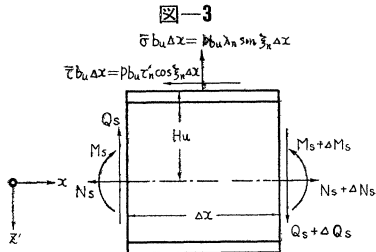
M_c および $z = D_l$ における曲げ応力は, (7), (6) および (4) 式を用いて, 次式のように書き表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} M_c &= \left(\frac{l_x}{n \pi} \right)^2 \left(\frac{l_y}{b_u} e_n + \lambda_n - \frac{n \pi}{l_x} D_l \tau_n' \right) p b_u \sin \xi_n \\ \sigma_c \Big|_{z=D_l} &= \frac{N_c}{A_c} + \frac{M_c}{J_c} D_l = \left(\frac{l_x}{n \pi} \right) \left\{ -\frac{\tau_n'}{A_c} + \frac{l_x}{n \pi} \frac{D_l}{J_c} \left(\frac{l_y}{b_u} e_n + \lambda_n - \frac{n \pi}{l_x} D_l \tau_n' \right) \right\} p b_u \sin \xi_n \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ここに A_c は, 鉄筋コンクリート スラブの断面積である。

(3) 鋼桁における変形および応力式

鋼桁断面に働く軸方向力, せん断力および曲げモーメントを各 N_s, Q_s および M_s とするとき, x 方向に Δx で隔てられた微小要素は, 図-3 に示すごととき力の作用のもとで釣合う。そこでまずはじめに, x 方向の力の釣合を求めると



$$\frac{dN_s}{dx} = p b_u \tau_n' \cos \xi_n$$

これを積分して, $x=0$ および $x=l_x$ で $N_s=0$ に注意すれば

$$N_s = \frac{l_x}{n \pi} p b_u \tau_n' \sin \xi_n \dots\dots\dots (9)$$

これと(4)式とをくらべて

$$N_c + N_s = 0 \dots\dots\dots (10)$$

さてモーメントおよび z 方向の力の釣合式は

$$\frac{dM_s}{dx} = Q_s - H_u \cdot p b_u \tau_n' \cos \xi_n \qquad \frac{dQ_s}{dx} = p b_u \lambda_n \sin \xi_n$$

第1式を x で微分して, これに第2式を代入すれば

$$\frac{d^2 M_s}{dx^2} = \left(\lambda_n + \frac{n \pi}{l_x} H_u \tau_n' \right) p b_u \sin \xi_n \dots\dots\dots (11)$$

また, E_s : 鋼のヤング率, J_s : 鋼桁断面の断面二次モーメント, w_s : 鋼桁のたわみとすれば

$$\frac{d^2 w_s}{dx^2} = -\frac{M_s}{E_s J_s} \dots\dots\dots (12)$$

(11) 式および (12) 式から $E_s J_s \frac{d^4 w_s}{dx^4} = -\left(\lambda_n + \frac{n \pi}{l_x} H_u \tau_n' \right) p b_u \sin \xi_n$

これを $x=0$ および $x=l_x$ で $w_s = \frac{d^2 w_s}{dx^2} = 0$ に注意して積分すれば, 鋼桁のたわみとして次式を得る。

$$w_s = -\frac{1}{E_s J_s} \left(\frac{l_x}{n \pi} \right)^4 \left(\lambda_n + \frac{n \pi}{l_x} H_u \tau_n' \right) p b_u \sin \xi_n \dots\dots\dots (13)$$

(13), (12) および (9) 式を用いるならば, M_s および $z' = -H_u$ における曲げ応力は, 次式のように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M_s &= -\left(\frac{l_x}{n \pi} \right)^2 \left(\lambda_n + \frac{n \pi}{l_x} H_u \tau_n' \right) p b_u \sin \xi_n \\ \sigma_s \Big|_{z'=-H_u} &= \frac{N_s}{A_s} - \frac{M_s}{J_s} H_u = \left(\frac{l_x}{n \pi} \right) \left\{ \frac{\tau_n'}{A_s} + \frac{l_x}{n \pi} \frac{H_u}{J_s} \left(\lambda_n + \frac{n \pi}{l_x} H_u \tau_n' \right) \right\} p b_u \sin \xi_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに A_s は, 鋼桁の断面積である。

(4) 条件方程式とその解

鉄筋コンクリート スラブと鋼桁の x 方向の変位を各 u_c, u_s とすれば, (1) 式のズレ δ は

$$\delta = u_s \Big|_{z'=-H_u} - u_c \Big|_{z=D_l}$$

これを (1) 式に代入して, x で微分すれば

$$\frac{d\delta}{dx} = k \left(\frac{du_s}{dx} \Big|_{z'=-H_u} - \frac{du_c}{dx} \Big|_{z=D_l} \right) = k \left(\frac{\sigma_s}{E_s} \Big|_{z'=-H_u} - \frac{\sigma_c}{E_c} \Big|_{z=D_l} \right) \dots\dots\dots (15)$$

これに (2), (8) および (14) 式を代入すれば, 次のごととき条件方程式をうる。

$$\begin{aligned} -\frac{n \pi}{l_x} \tau_n' &= \frac{k b_u}{E_s} \left(\frac{l_x}{n \pi} \right) \left\{ \frac{\tau_n'}{A_s} + \frac{l_x}{n \pi} \frac{H_u}{J_s} \left(\lambda_n + \frac{n \pi}{l_x} H_u \tau_n' \right) \right\} - \frac{k b_u}{E_c} \left(\frac{l_x}{n \pi} \right) \left\{ -\frac{\tau_n'}{A_c} \right. \\ &\quad \left. + \frac{l_x}{n \pi} \frac{D_l}{J_c} \left(\frac{l_y}{b_u} e_n + \lambda_n - \frac{n \pi}{l_x} D_l \tau_n' \right) \right\} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

また接合面は、常に密着しているとすれば、 $w_c = w_s$ が成立するから、これに(7)および(13)式を代入して、次式のごとき他の一つの条件方程式を得る。

$$\frac{b_u}{E_c J_c} \left(\frac{l_y}{b_u} e_n + \lambda_n - \frac{n\pi}{l_x} D_l \tau_n' \right) = - \frac{b_u}{E_s J_s} \left(\lambda_n + \frac{n\pi}{l_x} H_u \tau_n' \right) \dots\dots\dots (17)$$

(16) および (17) 式を連立させて τ_n' , λ_n を決定するに当り、簡単化のために次のごとき記号を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_n &= \frac{n\pi h}{l_x} \tau_n', & k_c &= \frac{k b_u}{E_c}, & k_s &= \frac{k b_u}{E_s} \cdot \frac{A_c}{A_s} \\ g_c &= \frac{D_l h A_c}{J_c}, & g_s &= \frac{H_u h A_s}{J_s}, & j_c &= \frac{b_u h^3}{J_c} \\ j_s &= \frac{E_c b_u h^3}{E_s J_s}, & \mu_c &= \frac{D_l}{h}, & \mu_s &= \frac{H_u}{h} \\ f_n &= \frac{l_y}{b_u} e_n, & i_n &= \frac{n^2 \pi^2 A_c}{l_x^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

この記号によつて(16)および(17)式は、次のごとく書き直される。

$$\left. \begin{aligned} -i_n \tau_n &= k_s \{ \tau_n + g_s (\lambda_n + \mu_s \tau_n) \} - k_c \{ -\tau_n + g_c (f_n + \lambda_n - \mu_c \tau_n) \} \\ j_c (f_n + \lambda_n - \mu_c \tau_n) &= -j_s (\lambda_n + \mu_s \tau_n) \end{aligned} \right\}$$

この2式を連立させて τ_n および λ_n を求めると

$$\left. \begin{aligned} \tau_n &= \frac{(k_c g_c j_s + k_s g_s j_c) f_n}{(i_n + k_c + k_s) (j_c + j_s) + (\mu_c + \mu_s) (k_c g_c j_s + k_s g_s j_c)} \\ \lambda_n &= - \frac{\{ (i_n + k_c + k_s) j_c + (k_c g_c j_s + k_s g_s j_c) \} \mu_s f_n}{(i_n + k_s + k_c) (j_c + j_s) + (\mu_c + \mu_s) (k_c g_c j_s + k_s g_s j_c)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

(3) 式が鉄筋コンクリートスラブにのる荷重のフーリエ級数展開の第 n 項に相当すると考えれば、一般の荷重については、上記の変形および応力を与える各公式に n に関する総和記号をつけて考えればよいことになる。

3. 断面二次モーメント増加率とその利用法

不完全合成桁のたわみ w は、(7)または(13)式で与えられるから、(13)に(18)式および(19)式を代入して、書き直すと

$$w = w_s = - \frac{1}{E_s J_s} \frac{p b_u l_x^4}{n^4 \pi^4} (\lambda_n + \mu_s \tau_n) \sin \xi_n = \frac{1}{E_s J_s} \frac{p b_u l_x^4}{n^4 \pi^4} \times \frac{(i_n + k_c + k_s) j_c}{(i_n + k_c + k_s) (j_c + j_s) + (\mu_c + \mu_s) (k_c g_c j_s + k_s g_s j_c)} f_n \sin \xi_n$$

ここに

$$\psi_n = \frac{(i_n + k_c + k_s) (j_c + j_s) + (\mu_c + \mu_s) (k_c g_c j_s + k_s g_s j_c)}{(i_n + k_c + k_s) j_c} = \left(1 + \frac{j_s}{j_c} \right) + \frac{(\mu_c + \mu_s) (k_c g_c j_s + k_s g_s j_c)}{(i_n + k_c + k_s) j_c} \dots\dots\dots (20)$$

とおけば、上式は次のように表現することができる。

$$w = \frac{1}{E (\psi_n J_s)} \frac{p b_u l_x^4}{n^4 \pi^4} f_n \sin \xi_n \dots\dots\dots (21)$$

一方不完全合成桁のたわみを、初等ハリ理論におけると同様に求めるためには、単一材の断面二次モーメントに相当する量を不完全合成桁に考えれば良い。この量を単一材の場合と同じく、不完全合成桁の断面二次モーメントと呼ぶことにすれば、不完全合成桁の断面二次モーメント J は、鋼桁のそれを単位として

$$J = \psi J_s \dots\dots\dots (22)$$

と置くことができる。この ψ は、鉄筋コンクリートスラブの存在による断面二次モーメントの増加のようすを表わす係数で、断面二次モーメント増加率と呼称される。すると、桁の単位長さ当り $p l_y e_n \sin \xi_n = p b_u f_n \sin \xi_n$ なる荷重にたいし、この不完全合成桁のたわみは、単純桁と同様に、次式で与えられる。

$$w = \frac{1}{E_s (\psi J_s)} \frac{p b_u l_x^4}{n^4 \pi^4} f_n \sin \xi_n \dots\dots\dots (23)$$

ハリのたわみは、荷重のフーリエ級数展開の初項に相当するたわみの項だけとつても、十分良い近似値が得られると考えられるから、(21)式および(23)式で初項のみをとることにすれば、両者のたわみは等しいと置けるから $\psi_1 = \psi$ を得る。すなわち断面二次モーメント増加率は、(20)式で $n=1$ と置いて

$$\psi = \left(1 + \frac{J_s}{J_c}\right) + \frac{(\mu_c + \mu_s)(k_c g_c J_s + k_s g_s J_c)}{(i_1 + k_c + k_s) J_c} \dots\dots\dots (24a)$$

この式は、荷重に無関係で、合成桁の断面形、材料のヤング率および shear connector の剛性率によつて定まる常数である。特別の場合として、 $k=0$ とすれば

$$\psi = 1 + \frac{J_s}{J_c} = 1 + \frac{E_c J_c}{E_s J_s} \dots\dots\dots (24b)$$

となり、初等ハリ理論による結果に一致する。なお $k \rightarrow \infty$ のときは、完全合成桁となるが、この場合の ψ を ψ' で示すと、(24a) 式は

$$\psi' = 1 + \frac{E_c J_c}{E_s J_s} + \frac{(D_l + H_u)^2}{1 + \frac{E_c A_c}{E_s A_s}} \frac{E_c A_c}{E_s J_s} \dots\dots\dots (24c)$$

と変形でき、この場合も合成桁断面から、直接計算できる断面二次モーメントを用いて得られる初等ハリ理論の結果¹⁾に一致する。

かくのごとく、断面二次モーメント増加率 ψ の値は、(24) 式で求められるから、(22) 式の関係を使つて、不完全合成桁のたわみは、 ψJ_s を断面二次モーメントとする単純桁のたわみとして与えられることになった。このことから、不完全合成桁にも、単純桁と同様な弾性曲線の微分方程式が成立することを示すから、この方程式を使つて、たわみのみならず応力公式も求めることができる。すなわち、合成桁の曲げモーメントを M とすれば、弾性曲線の微分方程式は、(6) および (12) 式を参照して

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに} \quad & -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_c}{E_c J_c} = \frac{M_s}{E_s J_s} = \frac{M - N_s S}{\Sigma E J} = \frac{M}{E_s (\psi J_s)} \\ & M = M_c + M_s + N_s S, \quad S = D_l + H_u, \quad \Sigma E J = E_c J_c + E_s J_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

従つて、たわみはこれを直接積分して得られるし、また断面力は、この関係式を組合わせて

$$\left. \begin{aligned} M_c &= \frac{1}{\psi} \frac{E_c J_c}{E_s J_s} M, & M_s &= \frac{1}{\psi} M \\ N_s &= \frac{M}{S} \left(1 - \frac{1}{\psi} \frac{\Sigma E J}{E_s J_s}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

なお、おもなる曲げ応力を記述すれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c \Big|_{z=-D_u} &= \frac{N_c}{A_c} - \frac{M_c}{J_c} D_u = -\frac{M}{A_c S} \left(1 - \frac{1}{\psi} \frac{\Sigma E J}{E_s J_s}\right) - \frac{1}{\psi} \frac{E_c D_u}{E_s J_s} M \\ \sigma_s \Big|_{z'=H_u} &= \frac{N_s}{A_s} + \frac{M_s}{J_s} H_u = \frac{M}{A_s S} \left(1 - \frac{1}{\psi} \frac{\Sigma E J}{E_s J_s}\right) + \frac{1}{\psi} \frac{H_u}{J_s} M \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27a)$$

また合成桁のせん断力を Q で示すと、接合面のせん断応力は、次式で与えられる。

$$\bar{\tau} = \frac{1}{b_u} \frac{dN_s}{dx} = \frac{1}{b_u} \left(1 - \frac{1}{\psi} \frac{\Sigma E J}{E_s J_s}\right) \frac{dM}{dx} = \frac{Q}{b_u S} \left(1 - \frac{1}{\psi} \frac{\Sigma E J}{E_s J_s}\right) \dots\dots\dots (27b)$$

かくて、(24) 式で与えられる断面二次モーメント増加率とともに、(25)、(26) および (27) 式を使用するならば、Newmark 氏の理論式によるような複雑な計算を必要とせず、ハリの初等理論に還元して、たわみおよび応力を算定できることになり、不完全合成桁の曲げ問題の解析がかなり容易になる。しかし、断面二次モーメント増加率を与える (24) 式は、近似公式であるから、上のたわみおよび応力の諸関係式は、また近似公式の域を出ない。従つて、これら公式の使用に当つては、その精度が確かめられねばならない。

そこで次には、正解である Newmark 氏の理論に簡単に触れ、両者を比較して、筆者の計算法の精度を確かめると同時に、実験結果とも比較してみることにしよう。

4. Newmark 氏の理論式²⁾

筆者の理論式との比較の意味も含めて、ここに Newmark 氏の理論を簡単に紹介しようと思うが、記号は原典にとらわれずに、既出のものをそのまま使用することにする。

Newmark 氏は、その理論において、筆者と同じく、接合面の応力とズレの間に (1) 式が成立すると仮定しているので、(15) 式がそのまま利用できるから、理論をここから展開させることにする。さて、構成部材の曲げ応力は、(8)、(14) および (10) 式から $\sigma_c \Big|_{z=D_l} = \frac{N_c}{A_c} + \frac{M_c}{J_c} D_l = -\frac{N_s}{A_c} + \frac{M_c}{J_c} D_l$, $\sigma_s \Big|_{z'=-H_u} = \frac{N_s}{A_s} - \frac{M_s}{J_s} H_u$

また 図-3 で x 方向の釣合いから $\bar{\tau} = \frac{1}{b_u} \frac{dN_s}{dx}$ が成立するから、これら 3 式を (15) 式に代入して

$$\frac{1}{b_u k} \frac{d^2 N_s}{dx^2} = N_s \left(\frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_s A_s} \right) - \left(\frac{M_c D_l}{E_c J_c} + \frac{M_s H_u}{E_s J_s} \right)$$

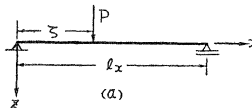
さらに(25)式を用いて、上式から M_c および M_s を消去すれば、 N_s に関する次の微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N_s}{dx^2} - b_u k \frac{EJ}{EA \Sigma EJ} N_s &= -b_u k \frac{MS}{\Sigma EJ} \\ \frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_s A_s} &= \frac{1}{EA}, \quad \overline{EJ} = \Sigma EJ + S^2 \overline{EA} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

この微分方程式を解いて、 N_s が得られるならば、(25)式を利用して、たわみを初め M_c 、 M_s が容易に計算できるから、不完全合成桁の曲げ問題は、解析できたことになる。これが Newmark 氏の理論の骨子である。

例えば、図-4 に示すような荷重状態のもとで(28)式を解けば、 N_s は次の公式で与えられる。

図-4 (a) 桁の左側支点から ζ の位置に集中荷重 P がのる場合



$$\left. \begin{aligned} x \leq \zeta \quad N_s &= \frac{\overline{EA}}{EJ} P S l_x \left\{ \left(1 - \frac{\zeta}{l_x}\right) \frac{x}{l_x} - \frac{\omega}{\pi} \frac{\sinh\left(1 - \frac{\zeta}{l_x}\right) \frac{\pi}{\omega}}{\sinh \frac{\pi}{\omega}} \sinh \frac{\pi x}{\omega l_x} \right\} \\ x \geq \zeta \quad N_s &= \frac{\overline{EA}}{EJ} P S l_x \left\{ \frac{\zeta}{l_x} \left(1 - \frac{x}{l_x}\right) - \frac{\omega}{\pi} \frac{\sinh \frac{\pi \zeta}{\omega l_x}}{\sinh \frac{\pi}{\omega}} \sinh\left(1 - \frac{x}{l_x}\right) \frac{\pi}{\omega} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(29a)$$

ここに $\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 \overline{EA} \Sigma EJ}{b_u k l_x^2 EJ}} = \frac{\pi}{l_x} \sqrt{\frac{\overline{EA} \Sigma EJ}{b_u k EJ}}$

(b) 等分布荷重 q がのる場合

$$N_s = \frac{\overline{EA}}{EJ} q S l_x^2 \left[\frac{1}{2} \frac{x}{l_x} \left(1 - \frac{x}{l_x}\right) + \frac{\omega^2}{\pi^2} \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\omega}} \left\{ \left(1 - \cosh \frac{\pi}{\omega}\right) \sinh \frac{\pi x}{\omega l_x} + \left(\cosh \frac{\pi x}{\omega l_x} - 1\right) \sinh \frac{\pi}{\omega} \right\} \right] \dots\dots(29b)$$

(c) 桁の両端にモーメント M_0 が作用する場合

$$N_s = \frac{\overline{EA}}{EJ} M_0 S \left\{ 1 - \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\omega}} \left(\sinh\left(1 - \frac{x}{l_x}\right) \frac{\pi}{\omega} + \sinh \frac{\pi x}{\omega l_x} \right) \right\} \dots\dots\dots(29c)$$

このように N_s が算出されると、不完全合成桁のたわみ w は(25)式から得られるし、一方 $k \rightarrow \infty$ の完全合成桁のたわみ w' も、初等ハリ理論から容易に計算できる。従つて、これらのたわみ比 w/w' を作れば、図-4 荷重状態については次の公式を得る。

(a) 桁の左側支点より ζ の位置に集中荷重 P がのる場合

$$\left. \begin{aligned} x \leq \zeta \quad \frac{w}{w'} &= 1 + \frac{\overline{EA} S^2}{6 \left\{ 2 \left(\frac{\zeta}{l_x}\right) - \left(\frac{\zeta}{l_x}\right)^2 - \left(\frac{x}{l_x}\right)^2 \right\} \Sigma EJ} \frac{\omega^2}{\pi^2} \left\{ 1 - \frac{\omega}{\pi} \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{l_x}\right) \frac{x}{l_x}} \frac{\sinh\left(1 - \frac{\zeta}{l_x}\right) \frac{\pi}{\omega}}{\sinh \frac{\pi}{\omega}} \sinh \frac{\pi x}{\omega l_x} \right\} \\ x \geq \zeta \quad \frac{w}{w'} &= 1 + \frac{\overline{EA} S^2}{6 \left\{ 2 \left(\frac{x}{l_x}\right) - \left(\frac{\zeta}{l_x}\right)^2 - \left(\frac{x}{l_x}\right)^2 \right\} \Sigma EJ} \frac{\omega^2}{\pi^2} \left\{ 1 - \frac{\omega}{\pi} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{l_x}\right) \frac{\zeta}{l_x}} \frac{\sinh \frac{\pi \zeta}{\omega l_x}}{\sinh \frac{\pi}{\omega}} \sinh\left(1 - \frac{x}{l_x}\right) \frac{\pi}{\omega} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(30a)$$

(b) 等分布荷重 q がのる場合

$$\frac{w}{w'} = 1 + \frac{\overline{EA} S^2}{12 \left\{ \frac{5}{4} - \left(\frac{x}{l_x} - \frac{1}{2}\right)^2 \right\} \Sigma EJ} \frac{\omega^2}{\pi^2} \left[1 + \frac{2}{l_x \left(1 - \frac{x}{l_x}\right)} \frac{\omega^2}{\pi^2} \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\omega}} \left\{ \left(1 - \cosh \frac{\pi}{\omega}\right) \sinh \frac{\pi x}{\omega l_x} + \left(\cosh \frac{\pi x}{\omega l_x} - 1\right) \sinh \frac{\pi}{\omega} \right\} \right] \dots\dots\dots(30b)$$

(c) 桁の両端にモーメント M_0 が作用する場合

$$\frac{w}{w'} = 1 + \frac{\overline{EA} S^2}{2 \frac{x}{l_x} \left(1 - \frac{x}{l_x}\right) \Sigma EJ} \frac{\omega^2}{\pi^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{\omega}} \left(\sinh\left(1 - \frac{x}{l_x}\right) \frac{\pi}{\omega} + \sinh \frac{\pi x}{\omega l_x} \right) \right\} \dots\dots\dots(30c)$$

(25)式を用いると、主要なる曲げ応力公式は、 N_s の関数として、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c \Big|_{z=-D_u} &= \frac{N_c}{A_c} - \frac{M_c}{J_c} D_u = -\frac{N_s}{A_c} - \frac{(M-N_s S)}{\Sigma E J} E_c D_u \\ \sigma_s \Big|_{z'=H_l} &= \frac{N_s}{A_s} + \frac{M_s}{J_s} H_l = \frac{N_s}{A_s} + \frac{(M-N_s S)}{\Sigma E J} E_s H_l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

また接合面のせん断応力公式は、(27b)式によつて、同じく N_s の関数として表わされる。

5. 筆者の近似解と Newmark 氏の正解

(30)式において完全合成桁の場合、すなわち $\omega=0$ の場合を考えれば、 $w/w'=1$ となるから、そのたわみは、初等はり理論における完全合成桁のたわみに合致する。従つて、前述の(24c)式の考察と考え合わせて、完全合成桁の曲げ理論においては、筆者の解も Newmark 氏の解も、ともに初等はり理論に一致していることがわかる。同様に、筆者の理論で $k=0$ は、Newmark 氏の理論では、 $\omega \rightarrow \infty$ の場合に相当するが、ここにおいても両者の解は、ともにはりの初等理論に一致していることが容易に示される。

この他の k の値においては、両者の解は一致しないから、筆者の解の出発点になつている断面二次モーメント増加率について、Newmark 氏の理論と比較し、これから筆者の解の精度を類推することにする。

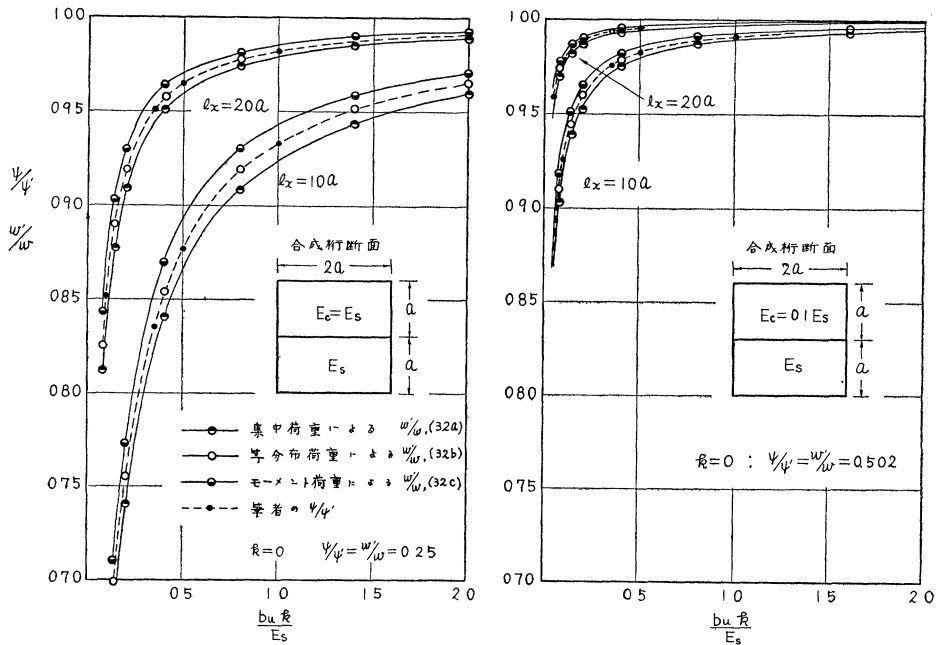
はりのたわみは、その曲げ剛性に反比例するから、不完全合成桁のたわみと曲げ剛性の間には

$$\frac{w}{w'} = \frac{E_s(\psi' J_s)}{E_s(\psi J_s)} = \frac{\psi'}{\psi}$$

という関係式が成立つ。ここで、 w/w' を正解である Newmark 氏の(30)式から計算すれば、これは、 ψ'/ψ の正確値として使用できる。しかるに一方では、近似公式である筆者の(24)式を使つて計算した ψ および ψ' から、 ψ'/ψ の近似値が求められるので、これらの数値を比較するならば、 ψ' は、また正確値であるため、 ψ の精度を推定することができよう。

ψ'/ψ を(30)式の w/w' と比較するに当たり、(30)式は、座標の関数として与えられるから、最大たわみを

図-5(a)

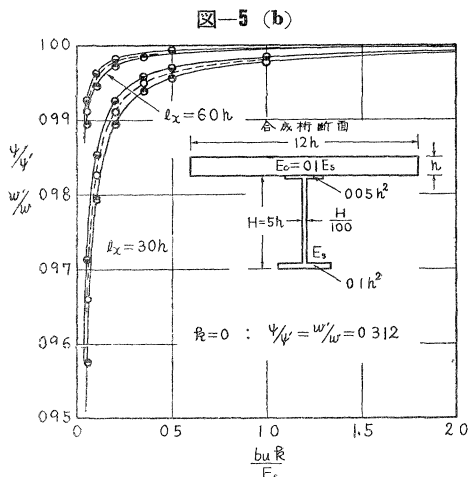


生ずる位置で比較する。そして桁に集中荷重がのるときは、 $\zeta=1/2 l_x$ と置くと、図-4の(a)、(b)および(c)の荷重状態にたいし、最大たわみは、すべて桁の中央に生ずるから、(30)式によつてその最大たわみ比は、次のように計算される。

(a) 桁の中央に集中荷重がのる場合：(30a)式に、 $\zeta=1/2 l_x$ 、 $x=1/2 l_x$ を代入して

$$\frac{w}{w'} \Big|_{\substack{\zeta=1/2 l_x \\ x=1/2 l_x}} = 1 + \frac{12 \bar{E} A S^2}{\Sigma E J} \frac{\omega^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{2\omega}{\pi} \tanh \frac{\pi}{2\omega} \right) \dots\dots\dots (32a)$$

(b) 等分布荷重がのる場合



$$\frac{w}{w'} \Big|_{x=1/2l_x} = 1 + \frac{48 \bar{E} A S^2}{5 \Sigma E J} \frac{\omega^2}{\pi^2} \left\{ 1 - \frac{8 \omega^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \frac{\pi}{2 \omega}} \right) \right\} \dots \dots \dots (32b)$$

(c) 桁の両端にモーメントが作用する場合

$$\frac{w}{w'} \Big|_{x=1/2l_x} = 1 + \frac{8 \bar{E} A S^2}{\Sigma E J} \frac{\omega^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \frac{\pi}{2 \omega}} \right) \dots \dots (32c)$$

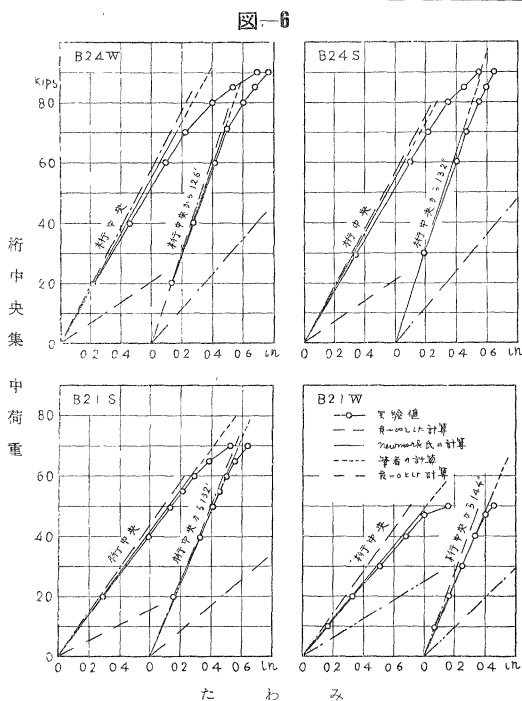
図-5には、例題として矩形断面およびT型断面をもつ合成桁における、上の3式と(24)式から計算された ψ'/ψ の値とが各逆数の形で示されている。この形で表わした方が不完全合成桁の曲げ剛性の変化する状態を、完全合成桁のそれで直接読みとれるので、便利であると考えられたからである。図の曲線を較べるならば、ただちに筆者の計算が

ほぼ正確値の平均的な値を与えていることが了解できる。これから判断して、断面二次モーメント増加率は、かなり良い精度をもつて正確値を推定できるものと考えられよう。

さて、このようにして得られた断面二次モーメント増加率の精度から、筆者の計算法の近似度を類推するに、まず初めにたわみについては、これが断面二次モーメント増加率に反比例していることに注意すれば、筆者の計算法は、断面二次モーメント増加率の精度と同じ精度をもつて、たわみの正確値を推定できるもの

表-1

試験桁の記号		B 24 W	B 24 S	B 21 S	B 21 W	
鉄筋コンクリ	断面寸法	in x in	72.0 x 6.25	72.0 x 6.17	72.0 x 6.25	72.0 x 6.11
	断面面積	in ²	469.6	463.8	467.1	461.1
	断面二次モーメント	in ⁴	1529	1471	1521	1434
	ヤング率	10 ⁶ psi	4.16	4.15	4.58	4.45
鋼	種類		24" wide flange I-beam		21" wide flange I-beam	
	高さ	in	23.91	"	21.13	"
	フランジ幅	in	8.98	"	8.27	"
	断面面積	in ²	22.37	"	20.02	"
	断面二次モーメント	in ⁴	2096	"	1478	"
ヤング率	10 ⁶ psi	30.7	30.6	29.6	29.4	
合成桁	支間	in	450	450	450	450
	ハンチの有無		無	無	無	無
	E_s/E_c		7.38	7.38	6.46	6.61
	Shear connectorの種類		Channel	Channel	Channel	Channel
b_{uk}	10 ⁶ psi	0.374	0.513	0.366	0.0907	



のと考えてよい。次に応力計算法に於ては、前述のごとく、筆者の計算法が断面二次モーメント増加率から出発しているとともに、初等はり理論の領域を出ないから、ここにおいてもまた筆者の計算法は、近似計算法としてかなり良い精度をもつと推察することができる。

6. 計算値と実験値

合成桁の実験は、国の内外で数多く実施されているが、不完全合成桁としての測定資料は、あまり見当たらないようである。しかし幸にも、筆者の要求を満たす実験報告の一つとして、イリノイ大学の報告³⁾があるから、この資料を借用して、筆者の計算値と比較してみることにする。なおこの報告においては、実験値がすでに Newmark 氏の理論値と比較済であるから、念のために、この計算資料もそのまま借用して、筆者の計算値と比較し、参考に供することにしよう。

実験は、図-1(a)に示すごとき断面をもつ4種の合成桁を単純に支持し、支間の中央または1/4点に集中荷重をのせて行われ、たわみ、接合面のズレおよび曲げ応力が測定された。また筆者の計算値を算出するに必要な、試験桁の寸法やその他の資料は、表-1に一括し

て示してある。そこでこの資料のもとに得られた筆者の計算値を、各項目ごとに Newmark 氏の理論値並びに実験値と比較して、種々考察してみよう。

(a) たわみ (24a) 式を用いて断面二次モーメント増加率 ψ を算出し、そして ψJ_s を断面二次モーメントとする単純桁のたわみを求めれば、これが筆者の計算値である。これを Newmark 氏の理論値並びに実験値と比較すれば、図-6 に示すように、両計算値は、ほとんど同じであつて、ともにかなり良く実験値を説明できるようなのである。しかし厳密に言えば、筆者の計算は、この場合に、Newmark 氏のそれよりわずか小さ目の値を推定することになるが、これは、図-5 で集中荷重がのる場合の Newmark 氏の計算曲線が、筆者のそれより下側に出て

図-7

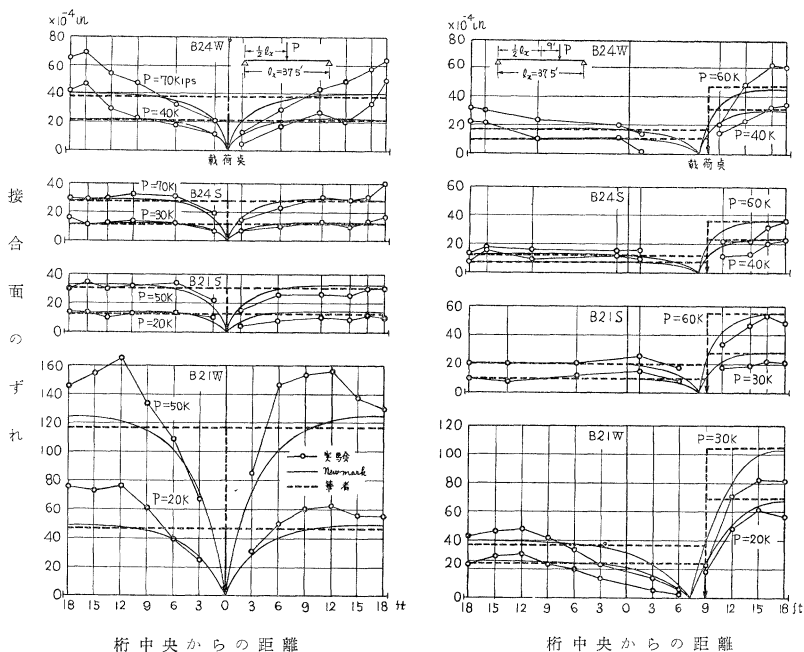
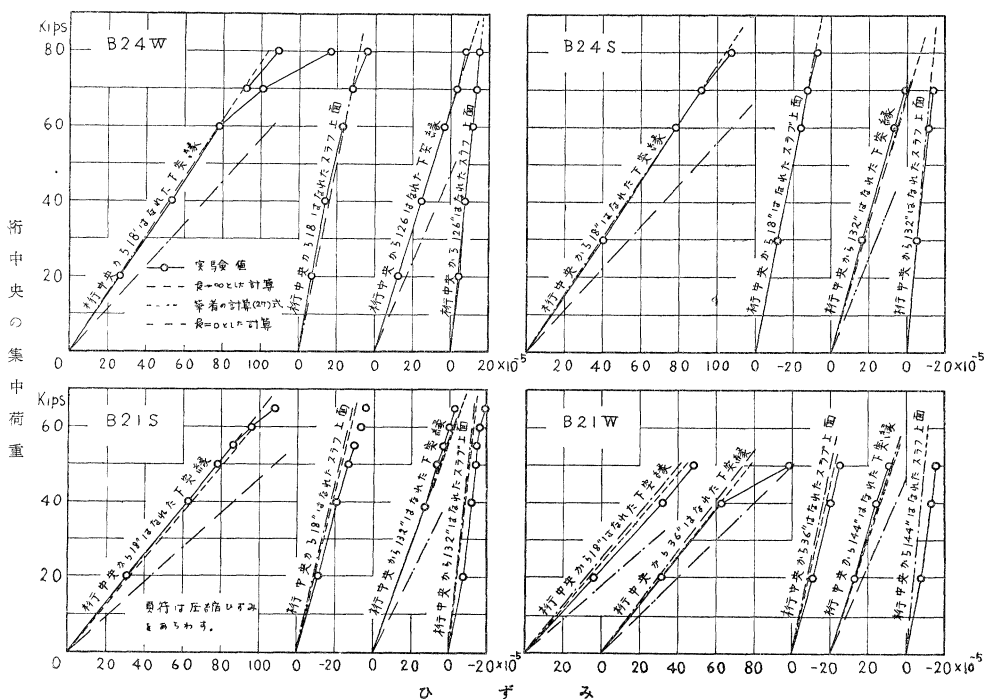


図-8



いることから容易に推察される。

(b) 接合面のズレ (27b)式を使つてせん断応力を計算し、これをズレの常数 k で除せば、筆者の計算による接合面のズレが得られるから、これを Newmark 氏の理論値および実験値と対比させると、図-7 のような接合面のズレの分布図を得る。これからただちに、筆者の計算法は、載荷点付近のズレの状態を説明することはできないが、載荷点から離れたズレの大きい位置においては、Newmark 氏の理論値に良く一致しているばかりでなく、実験値もかなり良く説明できることがうかがわれる。従つて、最大値のみを考慮の対象とするような計算においては、筆者の解法で十分その任を果せるものといえよう。

(c) 曲げ応力 筆者の計算による曲げ応力は、(27a)式によつて与えられるから、これを (a)、(b) におけると同様に、Newmark 氏の理論値並びに実験値と一緒に示せば、図-8 の通りである。ここにおいても (a) と同様に筆者の計算値は、Newmark 氏のそれに良く類似しており、また実験値をもうまく説明できる。

かくのごとく、たわみ、接合面のズレおよび曲げ応力について、筆者および Newmark 氏の計算値並びに実験値が相互に比較された結果、これら 2 つの計算値の間には、すでに推定されたことではあるが、たかだか数パーセントの差異しかないことが確認されたと同時に、計算値はともによく実験値を説明できることが実証された。ただし、これは集中荷重による実験において観察できた事実であるが、他の荷重においても、図-5 から判断して、ここにおける同様な結論を期待できることが容易に想像される。従つて、筆者の計算法は、一般的に変形および応力の計算にかなり良い精度をもつているといえよう。

7. 結 言

単純に支持された不完全合成桁の曲げ理論における Newmark 氏の正解は、荷重の様式によつて解の形が相違するため、応用に当つて、不便はまぬがれない。そこで、筆者は、荷重をフーリエ級数に展開することにより、曲げの級数解を求め、さらに断面二次モーメント増加率を定義して、不完全合成桁の曲げ理論を初等ハリ理論と類似の形で構成し、この不便を解消させた。しかし、この理論は、近似理論であるから、その精度を知るため、正解である Newmark 氏の理論並びに実験結果と較べて、種々の考察がなされた。その結果、まず Newmark 氏の理論とは、二、三の数値計算例から、その差異が数パーセント以下の範囲に収まること、また一方実験値との比較においては、かなり良く現象を説明できることが、ともに確かめられた。

このようにして、単純支持の不完全合成桁の曲げ問題は、筆者の理論によつて、容易にかつ精度良く解けることがわかつたが、これが初等ハリ理論と類似の形で取り扱われたことは、さらに連続桁のような不静定構造物にも、筆者の理論がそのまま適用できることを表わすし、また座屈問題も取り扱う可能性を暗示するから、筆者の計算法は、ただ単に単純支持の不完全合成桁の曲げ問題の解決ばかりでなく、種々の方面に利用価値を有するものといえよう。

参 考 文 献

- 1) 例えは 安宅勝著：合成桁，OHM 文庫 307, p.20
- 2) Newmark, N.M., Siess, C.P. and Viest, I.M.: "Test and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction", Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, 1951, Vol. 9, No. 1
- 3) Viest, I.M., Siess, C.P., Appteton, J.H. and Newmark, N.M.; "Study of Slab and Beam Highway Bridges-Part IV Full Scale Tests of Channel Shear Connectors and Composite T-Beams", Univ. of Ill. Eng. Exp. Sta. Bul. 405.

(昭 34. 9. 17)