

桁橋の上部構造の崩壊と釣合つた下部構造の設計について*

正 員 内 田 一 郎**

ON THE DESIGN OF THE SUBSTRUCTURE EQUILIBRATED WITH THE SUPERSTRUCTURE OF BEAM BRIDGE

By Dr. Eng., Ichiro Uchida, C.E. Member

Synopsis : The collapses of beam bridges occur at the substructure more frequently than the superstructure. One of the causes of these phenomena is the difference of the design processes of super- and substructure. In this report, at first the author examines the present design processes, and then proposes a design method which is based on the conditions that collapses of super- and substructure occur at the same time.

要 旨 桁橋の崩壊は、上部構造におけるよりも下部構造において多く起つている。その一因として上、下部構造の設計法の相違があげられる。そこで本文においてはまず従来の設計法について検討を行い、しかるのち上、下部構造が同時に崩壊するという条件にもとづく設計法、特に地盤の設計支持力をどうとつたらよいかということについて提案した。

1. ま え が き

桁橋の破壊、特に地盤の悪いところにおいてはその多くが下部構造において起つている。もし上部構造と下部構造との安全度が同じとつてあれば、上部構造の破壊も同じ程度に生じてよいはずである。この点が現在どうなつているか、まず従来の設計について検討してみよう。しかるのち上、下部構造の安全性を同程度にするためにはどうしたらよいか、特に地盤の設計支持力をどうとつたらよいか一つの提案を示すことにする。

2. 従来の設計法についての検討

(1) 上部構造に対して

まず上部構造すなわち桁の設計法について考えてみよう。断面の大きさは一般に桁に生ずる曲げ応力によつて決まるから、これを対象に考えていくことにする。曲げ応力 σ は周知のように次の式で計算する。

$$\sigma = M/Iy \dots\dots\dots(1)$$

ただし M : 曲げモーメント, I : 断面 2 次モーメント, y : 考えている点の中立軸からの距離

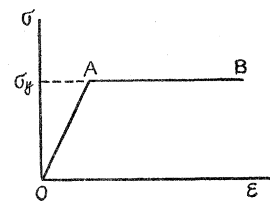
断面の大きさはこの σ の値が許容応力 σ_a より大きくなならないように決められるわけである。また許容応力 σ_a は次の式で示されるものである。

$$\sigma_a = \frac{\text{基礎強さ}}{\text{安全率}} \dots\dots\dots(2)$$

基礎強さとしては、極限強さ、降伏点、クリープ限度、疲れ限度などが用いられている。たとえば脆性材料であるコンクリートなどでは極限強さが、軟鋼などでは降伏点が通常基礎強さと考えられている。ここでは一応軟鋼のような降伏点を基礎強さとするものについて桁の安全性について検討してみることにする。

材料の応力とひずみとの関係は実際には単純に表わせるものではないけれども、これを図-1 のように仮定する。これは理論の実用化を可能ならしめるために従来行つていることであり、ここでも材料はこの図-1 の応力-ひずみ曲線を示すものとして話を進めることにする。曲げ応力が許容曲げ応力を越えないということから断面を決めた桁に作用する外力を増加していくと、降伏点(図-1 においては A 点)までは弾性変形を行つて、断面内の応力分布は図-2 (a) のように三角形分布をなす。降伏点を越えると縁に近い部分は図-1 にしたがつてひずみの増加は応力の増加をともなわず、したがつて図-2 (b) のように縁に近い部分の応力は一定値を保ち、断面内の応力分布は台形とな

図-1 応力 σ とヒズミ ϵ との関係



* 土木学会第 14 回年次学術講演会(昭和 34 年 6 月 14 日)において一部を講演

** 工学博士, 九州大学教授, 工学部土木工学教室

図-2 応力分布の状況

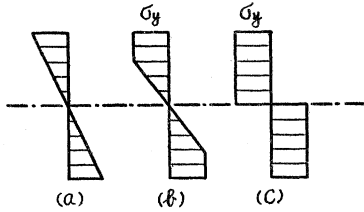
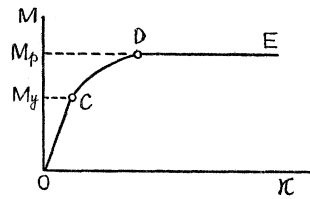


図-3 曲げモーメント M と曲率 κ との関係



る。そして外力の増加につれて応力分布の三角形の部分は減少してきて、ついに 図-2 (c) のように全断面矩形分布の状態となる。図-3 は以上の変化に応ずるこの断面の曲げモーメントの変化を示したものである。断面内の応力分布は OC 部においては三角形を、CD 部においては台形を、DE 部においては矩形をそれぞれ示している。また C 点は縁が最初に降伏点に達した時に対応、D 点は断面内すべての点が降伏点に達した瞬間に対応するものである。全断面が降伏点に達した 図-2 (c) の応力分布の状態においては、もはやこの部分での曲げモーメントは増加し得ず、いわゆる降伏ヒンジとして作用することになる。この断面の曲げモーメントを、降伏点におけるものを M_y 、図-2 (c) の状態の時のものすなわち全塑性モーメントを M_p とすれば次の関係がある¹⁾。

矩形断面の場合 $M_p = 1.5 M_y$ (3)

I 形断面の場合 $M_p = 1.05 \sim 1.25 M_y$ (4)

以上のようにしてある断面が降伏ヒンジになつたとしても、構造物は必ずしも崩壊に至るとは限らない。静定構造物では 1 個の降伏ヒンジの出現は崩壊を意味するけれども、不静定構造物ではその構造に応じて更にいくつかの降伏ヒンジが崩壊に対して必要である。

今まで述べてきたことからわかるように、許容応力を基準にして設計した桁の断面は、設計荷重に安全率を掛けた荷重を受けた時に縁の応力が降伏点に達するが、更に荷重の増加は可能であり、その断面の曲げモーメントが (3) あるいは (4) 式であらわせるような全塑性モーメントに達した時にはじめて降伏する。静定構造物ではここで崩壊ということになるが、不静定構造物の崩壊には更にいくつかの降伏ヒンジが必要である。

(2) 下部構造に対して

次に下部構造について考えてみよう。下部構造の設計に際しては地盤の支持力、すべり出し、転倒、円弧すべりなどについて考えなければならないが、上部構造を経て下部構造にくる荷重の増加は一般にすべり出しや転倒、円弧すべりなどに対しては有利に働くので、ここでは一応地盤の支持力だけを問題にしよう。上部構造と釣合つた地盤の支持力が決まつた時にこれらのすべり出し、転倒、円弧すべりなどに対しては、地盤の支持力の持つべき安全度と釣合う安全性を持たせればよい。

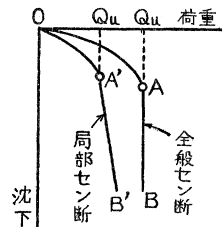
下部構造を支える地盤はその受ける荷重の増加にともなつて沈下する。その状態を示したものが 図-4 であるが、地盤に加わる力が極限支持力 (図-4 の A 点あるいは A' 点の荷重の大きさを通常極限支持力と考えている) を越えると下部構造は崩壊してしまう。設計の順序としてはまず設計荷重を支点に最大の反力が生ずるように載せて、その反力を求める。この力は橋台あるいは橋脚を経て地盤に伝えられ、この力によって生ずる応力が極限支持力を安全率で割つた許容支持力より小さければよいわけで、大きくなれば杭打ちその他の地盤強化方法が必要になつてくる。

以上述べたことからわかるように上部構造は構造物の崩壊を来さないたとえば材料の降伏点を安全率で割つたものを基準にして設計を行つており、下部構造は構造物の崩壊をもたらす地盤の極限支持力を安全率で割つたものを基準にして設計を行つていく。上部構造と下部構造との崩壊に対する安全性が同一でないのもまた当然である。

3. 提案の方法

上部構造の設計を、崩壊を基準にして行つた方法として極限設計法が最近しだいに研究されるようになってきた。上部構造の寸法は従来方法あるいは極限設計法などで決まつているものとする。この上部構造の崩壊が起る時に下部構造も崩壊する、そのような支点の極限支持力を求めるのがここでの目的である。この極限支持力が決まれば、それだけの支持力を持たせるように地盤を強化しあるいは橋台、橋脚の構造を造ればよいわけである。目的を達するためにここで利用する関係は次の 2 つである。

図-4 荷重と沈下との関係



(a) 荷重がその作用点の移動によつてなす仕事は、降伏ヒンジにおいて全塑性モーメントが変形に抵抗してなす仕事と支点において反力が沈下に抵抗してなす仕事との和に等しい。

(b) ヒンジあるいは降伏ヒンジではさまれているハリの部分に対して作用する力、モーメントなどは釣合っていないなければならない。

以下いろいろな桁について個々に説明することにしよう。なお、上部構造の崩壊形式は計算の際に知ることができるが、支点が弱くて沈下が起つても上部構造の崩壊荷重は変わらず²⁾、したがつて支点の沈下を同時に考える場合の上部構造の崩壊形式は上部構造だけを考える場合のものと同じである。また、特にことわらない限りは断面に降伏ヒンジのできる時の全塑性モーメントを M_p という記号であらわすことにする。

(A) 単純バリ 荷重は C 点に作用するものを基準にしてこれを W とし、他の点に作用するものはこの W に係数を掛けて表わすものとする。以下においても同じようにあらわすことにする。図-5 (a) に示すような荷重を受ける場合について考えてみる。 W が W_1 になつた時 図-5 (b) のように C 点で降伏ヒンジを生じて崩壊が起つたとすれば次の式が成立する。

$$W_1 \delta_c + r W_1 \delta_c \frac{l-x-\lambda}{l-x} = M_p \delta_c \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} \right) \quad \therefore W_1 = \frac{l}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p \dots\dots(5)$$

いま A, B 両支点の極限支持力をそれぞれ Q_{uA}, Q_{uB} とする。A 支点が沈下崩壊する時すなわち 図-5 (c) の状態に対して、荷重 W を W_2 とすれば次の式が成立する。

$$W_2 \delta_A \frac{l-x}{l} + r W_2 \delta_A \frac{l-x-\lambda}{l} = Q_{uA} \delta_A \quad \therefore W_2 = \frac{l}{(l-x)(1+r)-r\lambda} Q_{uA} \dots\dots(6)$$

(b) の状態と (c) の状態とが同時に起るためには $W_1 = W_2$ でなければならない。すなわち

$$\frac{l}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p = \frac{l}{(l-x)(1+r)-r\lambda} Q_{uA} \quad \therefore Q_{uA} = \frac{M_p}{x} \dots\dots(7)$$

すなわち Q_{uA} を (7) 式の値にとれば、上部構造の崩壊と同時に支点 A の崩壊も生ずるわけである。この値は 図-5 (b) の AC 部の崩壊時の釣合からも求めることができ、実際にはこの方が計算が簡単である。図-6 において C 点に関するモーメントの釣合を考えれば

$$Q_{uA} x - M_p = 0 \quad \therefore Q_{uA} = M_p / x$$

すなわち (7) 式と同じものがでてくる。支点 B についても全く同様に

$$Q_{uB} = \frac{x(1+r)+r\lambda}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p \dots\dots(8)$$

以上のような値 Q_{uA}, Q_{uB} の極限支持力で下部構造を設計すれば、その崩壊は上部構造と同時に生ずる。

例：図-7 のような単純バリについて考えてみる。許容応力 $\sigma_a = 1300 \text{ kg/cm}^2$ 、降伏点 $\sigma_{降} = 2300 \text{ kg/cm}^2$ とする。まず通常の方法で断面の大きさを決めてみる。

最大曲げモーメント $M_{max} = 10 \text{ tm} = 1000000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$

$$\text{必要な断面係数} \quad W = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{1000000}{1300} = 769.3 \text{ cm}^3$$

I 形鋼を用いるとして、I 300×150×10 ($I = 12730 \text{ cm}^4$, $W = 848.7 \text{ cm}^3$)

を採用すればよい。すると $M_y = \sigma_y W = 2300 \times 848.7 = 1952010 \text{ kg}\cdot\text{cm}$

$M_p = 1.15 M_y$ として $M_p = 1.15 \times 1952010 = 2244812 \text{ kg}\cdot\text{cm}$

図-8 のように AC 部の釣合を考えて Q_{uA} を求めれば

$$200 Q_{uA} - M_p = 0 \quad \therefore Q_{uA} = \frac{M_p}{200} = \frac{2244812}{200} = 11.224 \text{ kg} = 11.224 \text{ t}$$

この値を極限支持力とすれば釣合うことになる。従来方法だと、たとえば安全率を 2 として反力 5t に 2 を掛けた 10t だけの極限支持力があればよいということで対策を構うことになる。

(B) 片持バリ 図-9 において最大曲げモーメントは A 点において生ずるから、ハリはこの点に降伏ヒンジができて崩壊する。すなわち 図-9 (b) のような状態になり、この時の W を W_1 とすれば次の式が成立す

図-5 単純バリ

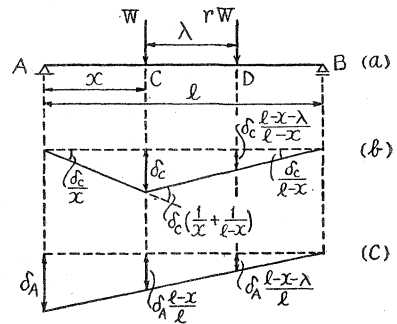


図-6 AC 部の釣合

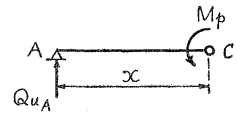


図-7 例

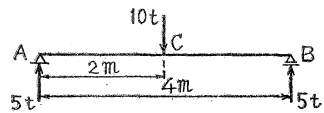
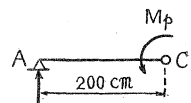


図-8 AC 部の釣合



る。

$$W_1 \delta_c + r W_1 \delta_c \frac{x+\lambda}{x} = M_p \frac{\delta_c}{x} \quad \therefore W_1 = \frac{M_p}{(1+r)x+r\lambda} \dots (9)$$

いま支点 A の極限支持力(垂直方向)を Q_{uA} とし、図-9(c) のようにこの点が沈下崩壊したとすれば、その時の荷重 W_2 , rW_2 に対して次の式が成立する。

$$W_2 \delta_A + r W_2 \delta_A = Q_{uA} \delta_A \quad \therefore W_2 = \frac{Q_{uA}}{1+r} \dots (10)$$

(b),(c) の状態が同時に起る。すなわちハリの崩壊と支点の沈下が同時に起るためには $W_1 = W_2$ ならばよい。すなわち

$$\frac{M_p}{(1+r)x+r\lambda} = \frac{Q_{uA}}{1+r} \quad \therefore Q_{uA} = \frac{1+r}{(1+r)x+r\lambda} M_p \dots (11)$$

ハリが崩壊すると同時に固定端におけるハリの回転が起るためには、固定端の抵抗モーメントが A 点におけるハリの M_p に等しければよい。ハリが崩壊した瞬間における釣合の条件から Q_{uA} を求めてみる。図-10 において A 点におけるモーメントの釣合を考えると

$$W_1 x + r W_1 (x+\lambda) - M_p = 0 \quad \therefore W_1 = \frac{M_p}{(1+r)x+r\lambda}$$

この値はもちろん (9) 式に等しい。 Q_{uA} はこのような瞬間における W_1 と rW_1 とを支持していなければならぬから

$$Q_{uA} = W_1 + r W_1 = \frac{1+r}{(1+r)x+r\lambda} M_p$$

(11) 式と同じ値がでてくる。

(C) 一端固定、他端移動支点のハリ ハリの崩壊は図-11(b) のように C 点において起るものとすれば次の式が成立する。なお、この時の W の値を W_1 とし、 M_p の値はどこにおいても同じとする。

$$W_1 \delta_c + r W_1 \delta_c \frac{l-\lambda-x}{l-x} = M_p \frac{\delta_c}{x} + M_p \delta_c \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} \right)$$

$$\therefore W_1 = \frac{2l-x}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p \dots (12)$$

ハリの崩壊前において $W = W_2$ の時に支点 B の沈下が起つたとすれば、図-11(c) において次の式が成立する。ただし B 支点の極限支持力を Q_{uB} とする。

$$W_2 \delta_B \frac{x}{l} + r W_2 \delta_B \frac{x+\lambda}{l} = M_p \frac{\delta_B}{l} + Q_{uB} \delta_B \quad \therefore W_2 = \frac{1}{x(1+r)+r\lambda} M_p + \frac{l}{x(1+r)+r\lambda} Q_{uB} \dots (13)$$

(b),(c) の状態が同時に起るとすれば、 $W_1 = W_2$ とおいて

$$\frac{2l-x}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p = \frac{1}{x(1+r)+r\lambda} M_p + \frac{l}{x(1+r)+r\lambda} Q_{uB}$$

$$\therefore Q_{uB} = \frac{x(1+r)+2r\lambda}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p \dots (14)$$

Q_{uB} がこの値をとれば上、下部構造が同時に崩壊することになる。

次に CB 部の釣合を考えて上、下部構造の崩壊が釣合う時の Q_{uB} の値を求めてみよう。ハリの最初の降伏ヒンジが C 点に生ずるとすれば、その時の W は (12) 式であらわせる W_1 である。この状態で図-12 のように CB 部の釣合を考えると、C 点に関するモーメントの釣合から次の式が成立する。

$$-Q_{uB}(l-x) + r W_1 \lambda + M_p = 0 \quad \therefore Q_{uB} = \frac{r\lambda}{l-x} W_1 + \frac{1}{l-x} M_p$$

(12) 式の W_1 の値を入れて $Q_{uB} = \frac{x(1+r)+2r\lambda}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p$

(14) 式の値を得る。

固定端である A 支点については次に述べる固定バリと同じように取扱え

図-9 片持バリ

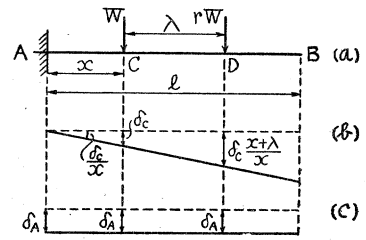


図-10 AB 部の釣合

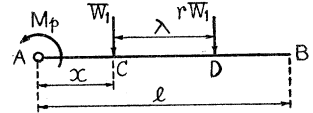


図-11 一端固定、他端移動支点のハリ

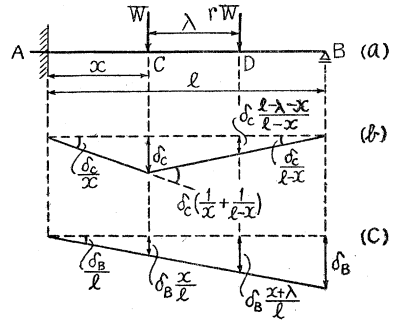
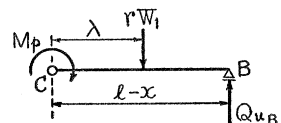


図-12 CB 部の釣合



ればよい。

(D) 固定バリ ハリの崩壊が 図-13 (b) のように起るものとすれば、次の式が成立する。なお、この時の W を W_1 とする。

$$W_1 \delta_c + r W_1 \delta_c \frac{l-\lambda-x}{l-x} = M_p \frac{\delta_c}{x} + M_p \delta_c \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} \right) + M_p \frac{\delta_c}{l-x}$$

$$\therefore W_1 = \frac{2l}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p \dots (15)$$

次に A, C 両点の降伏ヒンジの発生と同時に B 点の沈下が起つたとすれば 図-13 (c) により次の式が成立する。なお、この時の W を W_2 とする。

$$W_2 \delta_B + r W_2 \delta_B = M_p \frac{\delta_B}{x} + M_p \frac{\delta_B}{x} + Q_{uB} \delta_B$$

$$\therefore W_2 = \frac{2}{(1+r)x} M_p + \frac{1}{1+r} Q_{uB} \dots (16)$$

この場合 B 点の沈下に対して 図-11 (c) のような形式も考えられるが、そうすると B 点の固定モーメントの仕事の影響を考慮する必要を生ずるので、取扱いの便宜上から上のように 図-13 (c) の状態で考えた。

(b), (c) の状態が同時に起るとすれば $W_1 = W_2$ とおいて

$$\frac{2l}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p = \frac{2}{(1+r)x} M_p + \frac{1}{1+r} Q_{uB} \quad \therefore Q_{uB} = \frac{2(x+rx+r\lambda)}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p \dots (17)$$

次に CB 部の釣合から Q_{uB} を求めてみる。図-14 において C 点に関するモーメントの釣合を考えて

$$-Q_{uB}(l-x) + r W_1 \lambda + M_p + M_p = 0$$

$$\therefore Q_{uB} = \frac{r\lambda}{l-x} W_1 + \frac{2}{l-x} M_p$$

(15) 式の W_1 の値を入れて $Q_{uB} = \frac{2(x+rx+r\lambda)}{x\{(l-x)(1+r)-r\lambda\}} M_p$

(17) 式と同じ値を得る。B 支点の極限支持力としてこのような値を与えれば、桁と支点との崩壊が同時に起る。

なお、固定支点における抵抗モーメントはハリの全塑性モーメント M_p と同じ値にすればよい。

(E) 連続バリ 全塑性モーメントをスパン AB は M_{p1} , スパン BC は M_{p2} とし、 $M_{p1} > M_{p2}$ とする。また A, B, C 各支点の極限支持力をそれぞれ Q_{uA}, Q_{uB}, Q_{uC} とする。連続バリの場合には局部崩壊が普通であるが、その崩壊形式としては 図-15 (b)~(f) のようなものが考えられる。その各場合について崩壊荷重を求めてみると次のとおりである。

(b) の場合 ($W = W_1$)

$$W_1 \delta_D = M_{p1} \delta_D \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{l_1-x_1} \right) + M_{p2} \frac{\delta_D}{l_1-x_1}$$

$$\therefore W_1 = \frac{l_1}{x_1(l_1-x_1)} M_{p1} + \frac{1}{l_1-x_1} M_{p2} \dots (18)$$

(c) の場合 ($W = W_2$)

$$r W_2 \delta_E = M_{p2} \frac{\delta_E}{x_2} + M_{p2} \delta_E \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{l_2-x_2} \right)$$

$$\therefore W_2 = \frac{2l_2-x_2}{r x_2(l_2-x_2)} M_{p2} \dots (19)$$

(d) の場合 ($W = W_3$)

$$W_3 \delta_A \frac{l_1-x_1}{l_1} = M_{p2} \frac{\delta_A}{l_1} + Q_{uA} \delta_A$$

$$\therefore W_3 = \frac{1}{l_1-x_1} M_{p2} + \frac{l_1}{l_1-x_1} Q_{uA} \dots (20)$$

(e) の場合 ($W = W_4$)

図-13 固定バリ

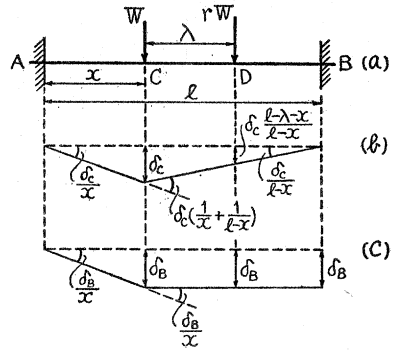


図-14 CB 部の釣合

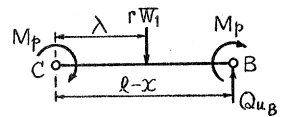
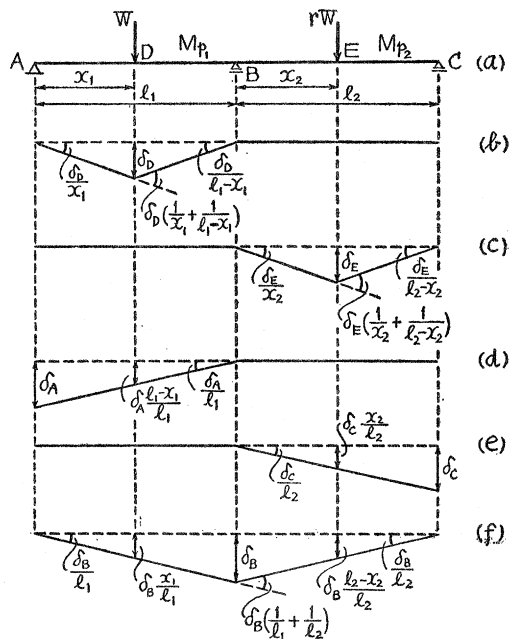


図-15 連続バリ



$$rW_4\delta_c \frac{x_2}{l_2} = M_{p2} \frac{\delta_c}{l_2} + Q_{uc}\delta_c$$

$$\therefore W_4 = \frac{1}{rx_2} M_{p2} + \frac{l_2}{rx_2} Q_{uc} \dots\dots\dots(21)$$

(f) の場合 ($W=W_5$)

$$W_5\delta_B \frac{x_1}{l_1} + rW_5\delta_B \frac{l_2-x_2}{l_2} = M_{p2}\delta_B \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) + Q_{uB}\delta_B$$

$$\therefore W_5 = \frac{l_1+l_2}{x_1l_2+rl_1(l_2-x_2)} M_{p2} + \frac{l_1l_2}{x_1l_2+rl_1(l_2-x_2)} Q_{uB} \dots\dots\dots(22)$$

以上求めたいろいろな場合を組合わせれば次のようなことがいえる。

- (i) $W_1=W_2$ になるように M_{p1} と M_{p2} との関係を定めれば、上部構造両スパンが同時に崩壊する。
- (ii) $W_1=W_3$ になるように Q_{uA} を M_{p1} および M_{p2} と関係づければ A 支点と左側スパンが同時に崩壊する。
- (iii) $W_2=W_4$ になるように Q_{uC} を M_{p2} と関係づければ C 支点と右側スパンとが同時に崩壊する。
- (iv) $W_1=W_2=W_3=W_4=W_5$ になるように各スパンの全塑性モーメント、各支点の極限支持力を定めれば、もつとも釣合のとれた設計になる。

その他の起り得る場合についても同様に考えればよい。

4. む す び

以上特別な例題で説明したけれども、どのようなハリ、荷重の場合でも同じように取扱うことができる。ハリの材料あるいは地盤などの実際の性質は仮定と若干異なっているが、この点に関することは将来研究しなければならない問題である。また地震その他のことに対する考慮も必要であるが、その取扱い方によつては提案の方法と同じ考え方によつて処理できる場合もあるし、また更に研究すべき余地も大である。

終りに、討議を頂いた東京大学 奥村敏恵氏、熊本大学 吉村虎蔵氏に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) たとえば
 倉西正嗣：極限設計法，p. 17
 岡本舜三：構造力学（V）極限設計法（I），土木学会誌 第43巻 第8号（昭33-8）p. 45
- 2) 梅村 魁：塑性ラーメンの自己歪応力と終局強度，日本建築学会研究報告 第31号（第1部）（昭30-5）p. 167
 （昭.34.6.20）