

行列によるトラス構造の解法

MATRIX ANALYSIS OF TRUSSED STRUCTURES

By Youzou Ouchi, C.E. Member

正員 大地 羊 三*

Synopsis : A matrix analysis to solve the stresses of members and the deformations of panel points in the trussed structures is presented in this paper. If we use this method, it seems very powerful for the computation by electric digital computers, because the process of the computation is distinct. Furthermore this method has the feature that the three-dimensional trusses are solved by mean of the same method as the two-dimensional trusses.

要旨 本論文はトラスの各部材力および各節点の変位を求める公式を、行列の形で表現する方法について述べたものである。この方法は計算の過程が明瞭なので、電子計算機によって計算する場合に非常に有効な手段となるであろう。またこの方法は立体トラスが平面トラスと同じ手順で解かれるという長所を持っている。

1. 緒 論

与えられた荷重に対してトラスの部材力や変位を求める問題は、諸先輩によって数多くの解法が提案され、いまさらこれを改良する余地はないように思われている。しかし電子計算機という強力な計算機が使用できるようになった現代には、これに適した解法ができてよいはずである。今までの解法は、いかにして数値計算を簡易化するかという事に重点がおかれていた。初めの仮定が同じであり、従つて到達する結果も同じであるにもかかわらず、トラスを解く過程にいろいろな方法が提案されている事はこの間の事情を示すものである。

電子計算機を用いれば、普通の四則演算や行列の和・差・積および商に相当する逆行列を求める演算等は非常に高速で実施できるので、数値計算の繁雑さというものはほとんど問題にならない。この場合問題になるのは演算の手順を指示するプログラムをつくる事であり、計算が複雑になればなるほど、いかにして要領よく誤りのないプログラミングをするかという事が大切になる。この問題は計算の手順を行列を用いて表示する事によって解決される。最近、欧米で行列による表示の有効な事が再確認され、十指にあまる論文が発表されている¹⁾。しかしこれら欧米の論文はまだ過渡的なものであつて、計算の初めあるいは途中で人為的な操作を加えなければならないものばかりである。本論文は最初にトラスの形状を指示する行列を与えさえすれば、あとは自動的に行列の演算を行つて解を求める方法について述べたもので、これによつて電子計算機の長所が完全に生きて来るものと思われる。

2. 符号の定義

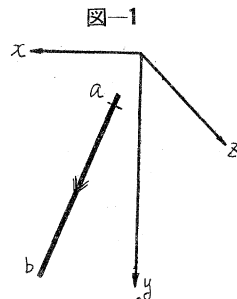
まず公式を立てるに必要な力・変位および部材の方向を定義しよう。図-1のごとく空間に直交座標を作り、その座標軸の方向を力および変位の正の方向とする。またトラスの各部材の a 端、 b 端の区別をつけ、図-1 に示すごとく a 端には $+$ の印をつける。そして各部材は a 端から b 端へむかう方向を正の方向とする。また部材力は引張りを正（部材の変位は伸びを正）とする。

次に各節点・各支点および各部材に番号をつける。番号のつけ方は任意であるが、一たん番号をつけたならばその後はすべてこの番号の順序に従がわなければならない。この番号は節点・支点および部材を区別するため、節点には算用数字を、支点にはローマ数字を、そして部材には \circ でかこんだ算用数字を用いる事にする。これだけの準備をして次に本論文で使用する記号について説明する。

(N) = 部材力を部材の番号順にたてにならべたベクトル

(R) = 支点反力をその番号順にたてにならべたベクトル

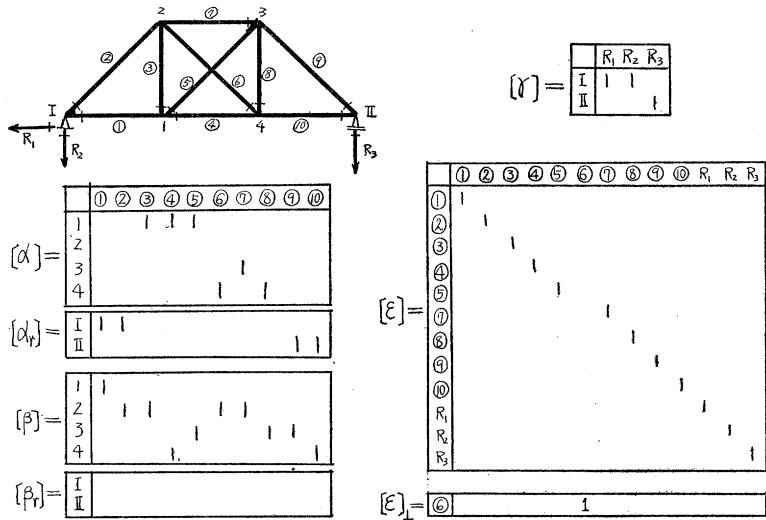
(η_x), (η_y), (η_z) = 各節点の変位の x, y, z 成分を節点の番号順にたてにならべたベクトル



* 国鉄、鉄道技術研究所構造物研究室

- $(\eta_{rx}), (\eta_{ry}), (\eta_{rz})$ = 各支点の変位の x, y, z 成分を支点の番号順にたてにならべたベクトル
- $(P_x), (P_y), (P_z)$ = 各節点に作用する荷重の x, y, z 成分を節点の番号順にたてにならべたベクトル
- $(P_{rx}), (P_{ry}), (P_{rz})$ = 各支点に作用する荷重の x, y, z 成分を支点の番号順にたてにならべたベクトル
- $[C_{mx}], [C_{my}], [C_{mz}]$ = 各部材の x, y, z 軸に対する方向余弦を部材の番号順に対角線上にならべた対角行列
- $[C_{rx}], [C_{ry}], [C_{rz}]$ = 各支点反力の x, y, z 軸に対する方向余弦をその番号順に対角線上にならべた対角行列
- $[L/AE]$ = 各部材について L/AE (L =部材の長さ, A =部材の断面積, E =ヤング係数) をつくり, それを部材の番号順に対角線上にならべた対角行列
- $[1/K]$ = 各支点反力について $1/K$ (K =支点に入っているバネのバネ常数. バネがないときは $K=\infty$) をつくり, それを支点反力の番号順に対角線上にならべた対角行列
- $[E]$ = 単位行列
- $[]^T$ = 行列 $[]$ の行と列を入れかえた転置行列
- $1/[]$ = 逆行列 $[]^{-1}$ と同じ
- $[]_{\perp}$ = 行列 $[]$ に直交する行列 ($[]_{\perp} \cdot [] = 0$ となる行列の意味) この行列はもともになる行列 $[]$ をきめても一意的に定まらない。たとえば $[]$ が m 行 n 列 ($m < n$) の行列であれば, $[]_{\perp}$ は $n-m$ 行 n 列の行列でその行ベクトルは $[]$ の m 個の行ベクトルに直交する $n-m$ 個のベクトルの一次結合になっている。しかしこの多様性は本論文に関する限り問題にする必要はない。
- $[\alpha], [\beta], [\alpha_r], [\beta_r], [\gamma]$ = 骨組構造の骨組の組み合わせ方を指示する行列 (以下これらを形状行列という事にする) で次にのべる形をしている。

図-2 形状行列および $[e]$ の例



理解しやすいように 図-2 に示すトラスで説明する。縦に節点の番号・横に部材力の番号を書いた表を作り、その第一行は節点1に集まる部材の内節点1の側を a 端 (または b 端) とする部材に相当する欄を1とし、その他は0とする。以下同様にして4行10列の行列を作りこれを $[\alpha]$ (または $[\beta]$) とする。また節点のかわりに支点を取り同じような行列を作り、それぞれ $[\alpha_r], [\beta_r]$ とする。次に縦に支点、横に支点反力を取り各行はその行に相当する支点に集まる支点反力の欄だけを1にした行列を作る。これが $[\gamma]$ である。

これらの行列は各節点や支点で力の釣合いを考えたり、部材の変位と節点の変位の関係を考えたりする場合に便利なものである。

このほか $[s], [a]$ あるいは $[s^*], [a^*]$ 等、上にのべた行列を組合わせて作った行列を使用するが、これらはそれが最初に表われたときに定義する事にする。

3. 公式の誘導

前節で定義した記号を用いて釣合条件・変形条件を書くと次のごとくなる。

(a) 節点の釣合条件 各節点に集まる部材の部材力および外力の x, y, z 方向の分力の和がであるという条件

より次式が得られる。

$$[\alpha - \beta][C_{mx}](N) = -(P_x)$$

$$[\alpha - \beta][C_{my}](N) = -(P_y)$$

$$[\alpha - \beta][C_{mz}](N) = -(P_z)$$

(b) 支点の釣合条件 節点の場合と同様に各支点で釣合条件を考えると次式が得られる。

$$[\alpha_r - \beta_r][C_{mx}](N) + [\tau][C_{rx}](R) = -(P_{rx})$$

$$[\alpha_r - \beta_r][C_{my}](N) + [\tau][C_{ry}](R) = -(P_{ry})$$

$$[\alpha_r - \beta_r][C_{mz}](N) + [\tau][C_{rz}](R) = -(P_{rz})$$

(c) 部材の変形条件 各部材の伸びと節点の変位との関係を式で表わすと次のごとくなる。

$$-[L/AE](N) = [C_{mx}][\alpha - \beta](\eta_x) + [C_{my}][\alpha - \beta](\eta_y) + [C_{mz}][\alpha - \beta](\eta_z) \\ + [C_{mx}][\alpha_r - \beta_r](\eta_{rx}) + [C_{my}][\alpha_r - \beta_r](\eta_{ry}) + [C_{mz}][\alpha_r - \beta_r](\eta_{rz})$$

(d) 支点の変形条件 支点反力と支点の変位の関係式は次のごとく表わされる。この式の左辺が0とならないのは支点がバネで支えられているときだけで、普通の場合は0となる。

$$-[1/K](R) = [C_{rx}][\bar{r}](\eta_{rx}) + [C_{ry}][\bar{r}](\eta_{ry}) + [C_{rz}][\bar{r}](\eta_{rz})$$

以上の各式を一つにまとめると図-3のごとくなる。これを一々書く事はやつかいであるから、点線の所で区分して次のごとく表わす事にする。

図-3 基本式

L/AE	$[C_{mx}][\alpha - \beta]$	$[C_{my}][\alpha - \beta]$	$[C_{mz}][\alpha - \beta]$	$[C_{mx}][\alpha_r - \beta_r]$	$[C_{my}][\alpha_r - \beta_r]$	$[C_{mz}][\alpha_r - \beta_r]$	$[C_{rx}][\bar{r}]$	$[C_{ry}][\bar{r}]$	$[C_{rz}][\bar{r}]$	N	R	0
$1/K$										η_x	η_{rx}	0
$[\alpha - \beta][C_{mx}]$										η_y	η_{ry}	$-P_x$
$[\alpha - \beta][C_{my}]$	$[\tau][C_{rx}]$									η_z	η_{rz}	$-P_{rx}$
$[\alpha - \beta][C_{mz}]$	$[\tau][C_{ry}]$									η_{xz}	η_{rz}	$-P_y$
$[\alpha_r - \beta_r][C_{mx}]$	$[\tau][C_{rx}]$									η_{yz}	η_{rz}	$-P_{ry}$
$[\alpha_r - \beta_r][C_{my}]$	$[\tau][C_{ry}]$									η_{yz}	η_{rz}	$-P_z$
$[\alpha_r - \beta_r][C_{mz}]$	$[\tau][C_{ry}]$									η_{yz}	η_{rz}	$-P_{rz}$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{S} & \bar{a} \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

(1) 式の左辺の行列の逆行列は次のごとくなる。

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{S} & \bar{a} \\ a & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathfrak{X}] & -\{[E] - [\mathfrak{X}][\mathfrak{S}]\}[n_{0inf}] \\ -[n_{0inf}]\{[E] - [\mathfrak{S}][\mathfrak{X}]\} & -[n_{0inf}]\{[\mathfrak{S}] - [\mathfrak{S}][\mathfrak{X}][\mathfrak{S}]\}[n_{0inf}] \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

ただし $[\mathfrak{X}] = [\bar{a}]_{\perp} \frac{1}{[a]_{\perp}[\mathfrak{S}][\bar{a}]_{\perp}} [a]_{\perp}$, $[n_{0inf}] = -[\bar{\varepsilon}]_{\perp} [a]_{\perp} [\bar{\varepsilon}]$

$[\bar{\varepsilon}] = [a]$ との積が正則な正方行列となる任意の行列。

(2) 式を証明する方法はいろいろあるが、最も簡単な方法は(1)式の左辺の行列と(2)式の右辺の行列を掛け合わせて、その積が単位行列となる事を示す方法であろう。実際にこの両者を掛け合わせ

$$\begin{bmatrix} a \\ \varepsilon_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} \frac{1}{a \bar{\varepsilon}}, & \bar{a}_{\perp} \frac{1}{\varepsilon_{\perp} \bar{a}_{\perp}} \end{bmatrix} = [E] \\ \therefore \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} \frac{1}{a \bar{\varepsilon}}, & \bar{a}_{\perp} \frac{1}{\varepsilon_{\perp} \bar{a}_{\perp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \varepsilon_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} \frac{1}{a \bar{\varepsilon}} a + \bar{a}_{\perp} \frac{1}{\varepsilon_{\perp} \bar{a}_{\perp}} \varepsilon_{\perp} \end{bmatrix} = [E] \dots \dots \dots (3)$$

なる公式を用いて整理すると、この積が単位行列になる事が証明される。ゆえに(1)式の解は次のごとく表わされる。

$$\begin{pmatrix} n \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \{[E] - [\mathfrak{X}][\mathfrak{S}]\}[n_{0inf}] \\ [n_{0inf}]\{[\mathfrak{S}] - [\mathfrak{S}][\mathfrak{X}][\mathfrak{S}]\}[n_{0inf}] \end{bmatrix} (P) \dots \dots \dots (4)$$

この(4)式でトラスの部材力および反力(n)と各節点および支点の変位(η)が求められる。

4. 別解と公式の意味

与えられたトラスの適当な部材または反力を取り除いて静定基本形を作る。次に(1)式の(n)を二つに分け、静定基本形に含まれる部材力および反力を(n₀)、その他の部材力および反力を(n')とすると(n)は

$$(n) = (n_0) + (n') = [\bar{\varepsilon}] \frac{1}{[\varepsilon][\bar{\varepsilon}]} [\varepsilon](n) + [\bar{\varepsilon}]_{\perp} \frac{1}{[\varepsilon]_{\perp} [\bar{\varepsilon}]_{\perp}} [\varepsilon]_{\perp}(n) \dots \dots \dots (5)$$

で表わされる。

ただし $[\varepsilon]$ はその列が与えられたトラスの部材力と反力の数だけあり、行が静定基本形に含まれる部材力と反力の数だけある行列で、同じ部材または反力を表わす行と列が出合う位置の要素が1で、その他の要素は0となっているものである(図-2のトラスで部材⑥を取り去つたものを静定基本形に取ると $[\varepsilon], [\varepsilon]_{\perp}$ は同図の右側のごとくなる)。またこの定義より $[\varepsilon] \cdot [\bar{\varepsilon}] = [E]$ となる。(5)式を(1)の第2式に代入すると

$$[a](n) = [a][\bar{\varepsilon}][\varepsilon](n) + [a][\bar{\varepsilon}]_{\perp} \frac{1}{[\varepsilon]_{\perp} [\bar{\varepsilon}]_{\perp}} [\varepsilon]_{\perp}(n) = -(P)$$

となる。この式の左から $[a \cdot \bar{\varepsilon}]^{-1}$ を掛けて $[\varepsilon](n)$ を求め、(5)式に代入し(3)式を用いて整理すると次のごとくなる。

$$(n) = -[\bar{\varepsilon}] \frac{1}{[a][\bar{\varepsilon}]} (P) + [\bar{a}]_{\perp} \frac{1}{[\varepsilon]_{\perp} [\bar{a}]_{\perp}} [\varepsilon]_{\perp}(n) \equiv (n_0) + [n_i](X) \dots \dots \dots (6)$$

この式の第1項は静定基本形の部材力および反力 (n_0) を表わしており、第2項の $[\varepsilon]_{\perp}(n)$ は不静定力 (X) を表わしている。ゆえに第1項の $-\bar{\varepsilon}[a \cdot \bar{\varepsilon}]^{-1}$ は静定基本形の部材力および反力の影響線を表わす行列であり、また第2項の $[\bar{a}]_{\perp} [\varepsilon_{\perp} \cdot \bar{a}_{\perp}]^{-1}$ (これを $[n_i]$ で表わす)の各列は対応する不静定力が1なる大きさで作用したときの静定基本形の部材力および反力を表わしている。この(6)式は著者が第8回応用力学連合講演会で発表した式(論文抄録集第I部 p. 55, (6)式)で (R) を (n) , $[r]$ を $[n_i]$ でおきかえた式に相当する。従つてそこでのべた議論が成り立ち、その結果が本論文の(4)式と一致する事が解る。

5. 直交する行列および逆行列の求め方

第1節でのべたように本論文の主目的は、トラスの部材力および変位を求める公式を電子計算機に適した形にする事である。そして(4)式でこの目的は達せられている。しかしもしこの(4)式の計算が筆算で容易にできるものであればその実用的価値は倍加されるであろう。そのためには $[\bar{\varepsilon}] = [\bar{a}]_{\perp} [a_{\perp} \cdot \bar{a}_{\perp}]^{-1} [a]_{\perp}$, $[n_{0inf}] = -[\bar{\varepsilon}][a \cdot \bar{\varepsilon}]^{-1}$ 等が容易に求められなければならない。

第4節でのべたように $[n_{0inf}]$ は静定基本形の部材力および反力の影響線を表わす行列であり、また $[\bar{a}]_{\perp} [\varepsilon_{\perp} \cdot \bar{a}_{\perp}]^{-1}$ はその各列が対応する不静定力を1としたときの静定基本形の部材力および反力を表わしている。従つて静定基本形のトラスに適当な荷重を加え、従来の方法で解けば $[n_{0inf}]$, $[\bar{a}]_{\perp} [\varepsilon_{\perp} \cdot \bar{a}_{\perp}]^{-1}$ を求める事ができる。しかしこの解き方は今までも行われていたものである。ゆえにこの方法に従う限り、解き方を解りやすい形で数式化したという以外に、特に改善された解法であるという事はできない。

もつと直接的に $[n_{0inf}]$, $[\bar{a}]_{\perp}$ 等を求める事ができないであろうか。 $[a]$ が特別な形をしているのであるから何か良い方法がありそうに思われる。いろいろこころみて見たが $[n_{0inf}]$ に関する限りその困難さの程度は大同小異で、特に簡単な方法はまだ見出す事ができないでいる。 $[a]_{\perp}$ については次のごとき方法が考えられる。

行列 $[a]$ を三つの部分に分けて

$$[a] = \begin{Bmatrix} [\alpha - \beta] * [C_x] \\ [\alpha - \beta] * [C_y] \\ [\alpha - \beta] * [C_z] \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

ただし $[C_x] = \begin{bmatrix} C_{mx} & 0 \\ 0 & C_{ry} \end{bmatrix}$, $[C_y] = \begin{bmatrix} C_{my} & 0 \\ 0 & C_{ry} \end{bmatrix}$, $[C_z] = \begin{bmatrix} C_{mz} & 0 \\ 0 & C_{rz} \end{bmatrix}$, $[\alpha - \beta] * = \begin{bmatrix} \alpha - \beta & 0 \\ \alpha_r - \beta_r & \tau \end{bmatrix}$

と表わすと、 $[a]_{\perp}$ の行ベクトルは $[a_x]_{\perp}$ の行ベクトルの一次結合で表わされる。また同様に $[a_y]_{\perp}$ あるいは $[a_z]_{\perp}$ の行ベクトルの一次結合でも表わされるはずである。ゆえに三種類の行列 $[a_x]_{\perp}$, $[a_y]_{\perp}$, $[a_z]_{\perp}$ を作り、各行列ごとにその行ベクトルを組合わせ、三種類の行列に共通する行ベクトルを作ればそれが $[a]_{\perp}$ の行ベクトルである。 $[\alpha - \beta] *$ に直交する行列の求め方は前回報告した²⁾。この方法を少し改良すれば $[[\alpha - \beta] * [C_x]]_{\perp} \equiv [a_x]_{\perp}$ 等を求める事ができる。しかしその一般的方法をのべる事は、文章が長くなるだけで解りにくいと思われるので第7節の例題で説明する事にする。

6. 公式の簡易化

平面トラスの反力の数は3個またはそれ以上である。所が立体トラスになると反力の数は最小限度6個必要になる。例えば四点で固定された立体トラスの反力の数は12個である。このように立体構造を考える場合には、反力の数がばかにならない量になる。それでもトラスを構成する部材が数十というように多数ある場合は、それに反力を加えて (n) を考えてもトラスを解く労力はあまり変わらない。しかし部材の数が少ないときは (n) の

中に含まれる反力の数が全体に比べて相当大きな割合を占める事になる。ゆえに反力を含まない解式が求められていると便利な事がある。以下その方法についてのべる。

図-4 基本式の簡易化

L/AE	$[C_{mx}][\alpha-\beta]$ $[C_{my}][\alpha-\beta]$ $[C_{mz}][\alpha-\beta]$ $[C_{nx}][\alpha-\beta]$ $[C_{ny}][\alpha-\beta]$ $[C_{nz}][\alpha-\beta]$	N	0
$1/K$	$[C_{rx}][\delta]$ $[C_{ry}][\delta]$ $[C_{rz}][\delta]$	R	0
$[\alpha-\beta][C_{mx}]$ $[\alpha-\beta][C_{my}]$ $[\alpha-\beta][C_{mz}]$		η_x η_y η_z	P_x P_y P_z
$[\alpha-\beta][C_{nx}]$ $[\alpha-\beta][C_{ny}]$ $[\alpha-\beta][C_{nz}]$	$[\gamma][C_{rx}]$ $[\gamma][C_{ry}]$ $[\gamma][C_{rz}]$	η_{rx} η_{ry} η_{rz}	P_{rx} P_{ry} P_{rz}

---(a)

L/AE	\bar{a}_m \bar{a}_r	N	0
$1/K$	\bar{r}	R	0
a_m		η_m	$-P_m$
a_r γ		η_r	$-P_r$

---(b)

$(\frac{L}{AE}) + (\frac{a_r}{\bar{r}})$	$(\frac{1}{\bar{r}}) + (\frac{1}{K})$	$[\bar{a}_m]$	N	$-P_m$
		$[\bar{r}]_1 [a_r]$	η_m	$-P_r$
			$(\frac{1}{\bar{r}}) + (\frac{1}{K})$	$[\bar{r}]_1$

---(c)

まず 図-3 の式で行および列の順序をかえ、図-4 の(a) 式のごとく表わし、点線の部分で区分して簡単に同図の (b) 式のごとく書く事にする。(b) の4行目の式に左から $[\bar{F}]$ をかけると

$$[\bar{F}][a_r](N) + [\bar{F}][r](R) = -[\bar{F}](P_r) \dots\dots\dots (8-1)$$

$$[\bar{F}]_1 [a_r](N) = -[\bar{F}]_1 (P_r) \dots\dots\dots (8-2)$$

となる。(8-2)式は残し、(8-1)式および 図-4 (b) 式の2行目の式を消却する事を考える。まず(8-1)式より (R) を求め、これを 図-4 (b) 式の2行目の式に代入し、左から $[\bar{a}_r][r][\bar{F} \cdot r]^{-1}$ をかけ、1行目の式に加えると次式が得られる。

$$\left[\left[\frac{L}{AE} \right] + [\bar{a}_r \cdot r] \frac{1}{[\bar{F} \cdot r]} \left[\frac{1}{K} \right] \frac{1}{[\bar{F} \cdot r]} [\bar{F} \cdot a_r] \right] (N) + [\bar{a}_m](\eta_m) + [\bar{a}_r] \left[[E] - [r] \frac{1}{[\bar{F} \cdot r]} [\bar{F}] \right] (\eta_r) = -[\bar{a}_r \cdot r] \frac{1}{[\bar{F} \cdot r]} \left[\frac{1}{K} \right] \frac{1}{[\bar{F} \cdot r]} [\bar{F}](P_r) \dots\dots\dots (9)$$

(9) 式の左辺の第3項は (3) 式を用いて $[\bar{a}_r][r][\bar{F} \cdot r]^{-1} [\bar{F}]_1 (\eta_r)$ と書く事ができるから、結局 図-4 (b) 式は (c) 式のごとく変形される。普通のトラスでは $[1/K]=0$ 、 $(P_r)=0$ であるから 図-4 (c) 式は次のごとくなるのが普通である。

$$\begin{bmatrix} L/AE & \bar{a}_m & \bar{a}_r \cdot r_{\perp} \\ a_m & 0 & 0 \\ \bar{F} \cdot a_r & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ \eta_m \\ [\bar{F} \cdot r_{\perp}]^{-1} [\bar{F}]_1 (\eta_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

図-4 (c) 式あるいは (10) 式を簡単に

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{Q}^* & \bar{a}^* \\ \bar{a}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ \eta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1 \\ -P_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

とすると、この解は (2) 式を参照して次のごとく表わす事ができる。

$$\begin{pmatrix} N \\ \eta^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathfrak{X}^*] & \{[E] - [\mathfrak{X}^*][\mathfrak{Q}^*]\} [n_{oinf}] \\ [\bar{n}_{oinf}^*] \{[E] - [\mathfrak{Q}^*][\mathfrak{X}^*]\} & [\bar{n}_{oinf}^*] \{[\mathfrak{Q}^*] - [\mathfrak{X}^*][\mathfrak{Q}^*][\mathfrak{X}^*]\} [n_{oinf}^*] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

ただし $[\mathfrak{X}^*] = [\bar{a}^*]_{\perp} \frac{1}{[\bar{a}^*]_{\perp} [\mathfrak{Q}^*] [\bar{a}^*]_{\perp}} [a^*]_{\perp}$ 、 $[n_{oinf}^*] = -[\bar{e}^*] \frac{1}{[\bar{a}^*] [\bar{e}^*]}$

7. 例 題

(1) 図-2 のトラスを解く。このトラスに対する形状行列 $([a], [\beta], [a_r], [\beta_r], [r])$ および $[e]$ は前にのべた (図-2)。これらを用いて $[a]_{\perp}, [a_{\perp}][a_{\perp}]^{-1}, [e][a \cdot e]^{-1}$ を求めれば (4) 式より (n), (η) が求められる。第5節の終りの方で説明した $[\alpha-\beta]^*, [C_x], [C_y]$ 等は 図-5 の左側のごとくなる。これらの行列を用い、第5節の議論に従って $[a_x]_{\perp}, [a_y]_{\perp}$ を作るのであるが、まず与えられたトラスの任意の節点から出発して元にも

