

# 管水路における各種流量算定式の精度および 従来の式の修正について

正員 春日屋伸昌\*

ON THE ACCURACIES OF THE AUTHOR'S FORMULAS FOR  
CALCULATING THE DISCHARGE RATE IN A PIPE AND  
ON THE MODIFICATION OF THE ORDINARY FORMULA

By Dr. Eng., Nobumasa Kasugaya, C.E. Member

**Synopsis :** The author first examines the remainders occurring in his formulas, which he derived in the latest paper by applying the mechanical quadrature to the calculation of the discharge rate in a pipe. Then, he introduces the modification of the ordinary formula in two forms. In the first form, the coefficients are so modified as to minimize the remainder for the ordinary positions of the measuring points. In the second form, the positions of the measuring points are so modified as to minimize the remainder, and the coefficients remain equally-weighted, which correspond to the minimum propagation of errors, as in the ordinary formula. The applications of the author's formulas to the theoretical distribution of velocity in a pipe and the author's experiments verify the excellence of their accuracies.

**要旨** 前論文で平均値法に基づいて誘導した各種流量算定式の剩余誤差について考察し、次に従来の式を修正した2つの型の公式を誘導する。その1つは従来の式と観測点の位置が同じで係数を合理的に定めた修正等分割式、他の1つは分散が最小な従来の式と重み（係数）が同じで観測点の位置を合理的に修正した等重式である。これらの算定式を管水路内流速の理論分布および実測に適用してその精度の優秀さを立証する。

## 1. まえがき

前論文<sup>1)</sup>で、筆者は、ピト一管または流速計を用いて管水路の流量を測定するため、ある断面内の任意の直径に沿つてとるべき観測点の位置と平均流速算定式とを平均値法に基づいて導いた。本論文では、まずこれら各式の持つ剩余誤差についてふれ、次に従来の式の係数を理論的に修正した式と最小な分散を持つ式とを導き、最後に各式を理論分布と水圧鉄管での実測とに適用してその精度を考察する。初めに前論文での要旨を摘記して本論を述べる準備としよう。

従来の式が成立のと同じ条件すなわち測定断面における流速分布曲面が管軸のまわりの回転面であるという仮定が許されるならば、平均流速  $V$  は、断面の中心に原点、任意の半径（長さ  $r$ ）に沿つて  $x$  軸をとり、 $x$  点での流速を  $v$  とすれば、

$$V = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi x v dx = \frac{2}{r^2} \int_0^r x v dx \dots \dots \dots (1)$$

ここで、新しい変数  $t$  を用いて、 $x = r(1+t)/2$  .....

とおき、被積分関数を  $g(t)$  で表わせば、

$$V = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1+t) v dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt \dots \dots \dots (3)$$

そこで、(3) 式が区間  $[-1, 1]$  内に適当にとった  $n$  個の観測点  $t_i$  における流速  $v_i$  と  $n$  個の係数  $A_i$  との積の総和、

$$V = \sum_{i=1}^n A_i v_i \dots \dots \dots (4)$$

に近似的に等しくなるように  $t_i$ ,  $A_i$  の値を定める。それには平均値法を用いればよいが、その原理は次のとおりである。すなわち、区間  $[-1, 1]$  における連続関数  $y = g(t)$  のこの区間での平均値  $M$  は、

\* 工学博士、中央大学教授、工学部土木工学科教室

$$M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt \quad \dots \dots \dots \dots (5)$$

この  $M$  が上の区間内に適当にとつた  $n$  個の座標点  $t_i$  における関数値  $y_i$  と  $n$  個の係数  $R_i$  との積の総和,

$$M = \sum_{i=1}^n R_i y_i \quad \dots \dots \dots \dots (6)$$

に近似的に等しくなるように、 $t_i, R_i$  の値を定める。いま、 $g(t)$  を Maclaurin の級数に展開して,

$$g(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s t^s \quad \dots \dots \dots \dots (7)$$

これを (5) 式の右辺に入れて項別に積分すれば,  $M = \sum_{s=0}^{\infty} a_s / (2s+1)$  ..... (8)

また、 $t_i$  における関数値  $y_i$  は (7) 式より,  $y_i = g(t_i) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s t_i^s$  ..... (9)

(9) 式を (6) 式に入れれば,  $M = \sum_{i=1}^n R_i (\sum_{s=0}^{\infty} a_s t_i^s) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (\sum_{i=1}^n R_i t_i^s)$  ..... (10)

(8) 式と (10) 式との  $a$  の係数を等しいとおけば,

$$\sum_{i=1}^n R_i t_i^s = \begin{cases} 0 & (s : \text{奇数}) \\ 1/(s+1) & (s : 0 \text{ または偶数}) \end{cases} \quad \dots \dots \dots \dots (11)$$

Gauss は (11) 式の初めから  $2n$  個の方程式を連立で解いて  $2n$  個の未知数  $t_i, R_i$  の値を定めた。この公式は (11) 式の  $2n$  番目の式すなわち  $t$  に関する  $2n-1$  次の式まで成立させるから、(5) 式の被積分関数  $g(t)$  が  $t$  に関する高々  $2n-1$  次の多項式であるとき誤差を生じない。ゆえに、Gauss の公式の近似度は  $2n-1$  である。

そこで、Gauss の公式をそのまま用いて管水路の平均流速算定式を導くと、被積分関数は  $g(t) \equiv (1+t)v$  であるから、 $t_i$  に対応する観測点の位置  $x_i$  での流速を  $v_i$  とすれば、関数値  $g(t_i)$  と  $x_i$  および (4) 式の係数  $A_i$  は、

$$g(t_i) = (1+t_i)v_i, \quad x_i = r(1+t_i)/2, \quad A_i = (1+t_i)R_i \quad \dots \dots \dots \dots (12)$$

ゆえに、 $n=2 \sim 5$  に対する算定式は次のようになる。

$$n=2; \quad V = 0.2113 v_{0.211} + 0.7887 v_{0.788} \quad [2] \quad \dots \dots \dots \dots (13)$$

$$n=3; \quad V = 0.0626 v_{0.113} + 0.4444 v_{0.500} + 0.4930 v_{0.887} \quad [4] \quad \dots \dots \dots \dots (14)$$

$$n=4; \quad V = 0.0242 v_{0.069} + 0.2152 v_{0.330} + 0.4369 v_{0.670} + 0.3237 v_{0.931} \quad [6] \quad \dots \dots \dots \dots (15)$$

$$n=5; \quad V = 0.0111 v_{0.047} + 0.1105 v_{0.231} + 0.2844 v_{0.500} + 0.3682 v_{0.769} + 0.2258 v_{0.953} \quad [8] \quad (16)$$

ここに、 $v_{0.211}$  は管中心より半径上  $0.211r$  の点での流速を意味し他も同様である。実際には直径上中心に関して対称な 2 点での流速の平均値を用いる。また、式の末尾のカッコ内の数字はこの式の近似度を示す。(13)～(16) 式を平均値第 1 公式とよんでおく。

次に、(1) 式において,  $x^2 = r^2(1+t)^2/4$  ..... (17)

とおけば、次の式がえられる。

$$V = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v dt \quad \dots \dots \dots \dots (18)$$

ゆえに、Gauss の公式を用いて算定式を導くことができて、座標点  $t_i$  に対応する観測点の位置  $x_i$  は (17) 式より,

$$x_i = \sqrt{(1+t_i)/2} r \quad \dots \dots \dots \dots (19)$$

この場合、(4) 式の係数  $A_i$  は Gauss の公式の  $R_i$  と同じである。 $n=2 \sim 5$  に対する算定式と近似度 [この場合は (17) 式の変数  $t$  に関するもの] は次のとおりである。

$$n=2; \quad V = (v_{0.460} + v_{0.888})/2 \quad [3] \quad \dots \dots \dots \dots (20)$$

$$n=3; \quad V = \{5(v_{0.356} + v_{0.942}) + 8v_{0.707}\}/18 \quad [5] \quad \dots \dots \dots \dots (21)$$

$$n=4; \quad V = 0.1739(v_{0.263} + v_{0.965}) + 0.3261(v_{0.574} + v_{0.819}) \quad [7] \quad \dots \dots \dots \dots (22)$$

$$n=5; \quad V = 0.1185(v_{0.217} + v_{0.976}) + 0.2393(v_{0.480} + v_{0.877}) + 0.2844 v_{0.707} \quad [9] \quad (23)$$

(20)～(23) 式を平均値第 2 公式とよんでおく。

更に他の形式の算定式を導くために、(1) 式に (2) 式の変換を施してえられる (3) 式の被積分関数  $g(t) \equiv (1+t)v$  の  $t=-1$  (管中心) における関数値が 0 となることに注目して、関数値が区間  $[-1, 1]$  の 1 端  $t=-1$  で 0 となる関数に適用して近似度の高い平均値法公式を応用する。すなわち、(11) 式においてあらかじめ  $t_1=-1$  と定め、残る  $n-1$  個の  $t_i$  と  $n$  個の  $R_i$  とは何の条件も与えずに、(11) 式の初めから  $2n-1$  個の方程式を連立で解き、 $t_i, R_i$  の値を定める。すなわち、このときの連立方程式は次のようになる。

$$\sum_{i=2}^n R_i t_i^s = \begin{cases} R_1(s: \text{奇数}) \\ 1/(s+1) - R_1(s: \text{0または偶数}) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (24)$$

(24) 式を満足する  $t_i, R_i$  を用いれば、(4) 式の係数  $A_i$  と観測点の位置  $x_i$  とは、

$$A_i = (1+t_i)R_i, \quad x_i = r(1+t_i)/2 \quad \dots \dots \dots (25)$$

この公式を一般の関数に適用すると、その近似度は  $2n-2$  となるが (Gauss の公式の近似度は  $2n-1$  であるから、1つの条件を加えたため近似度が1つ減る)、 $t=-1$  で関数値が 0 となる関数に適用すると、座標点として  $t_1=-1$  をとる必要がなく、その代りとして他に1つの座標点をとることができて、 $n$  個の座標点に対する近似度は  $2(n+1)-2=2n$  となり、Gauss の公式よりも近似度が1つ高くなる。 $n=2\sim 5$  に対する算定式と近似度とは、

$$n=2; \quad V=0.3639 v_{0.355} + 0.6361 v_{0.845} \quad [3] \quad \dots \dots \dots (26)$$

$$n=3; \quad V=0.1397 v_{0.212} + 0.4585 v_{0.591} + 0.4019 v_{0.911} \quad [5] \quad \dots \dots \dots (27)$$

$$n=4; \quad V=0.0624 v_{0.140} + 0.2597 v_{0.416} + 0.4069 v_{0.723} + 0.2710 v_{0.943} \quad [7] \quad \dots \dots \dots (28)$$

$$n=5; \quad V=0.0315 v_{0.099} + 0.1478 v_{0.305} + 0.2928 v_{0.562} + 0.3343 v_{0.802} + 0.1936 v_{0.960} \quad [9] \quad \dots \dots \dots (29)$$

(26)～(29) 式を平均値第3公式とよんでおく。

## 2. 各算定式の剩余誤差

まず Gauss の公式の剩余誤差の概要について述べよう。すでに1.で簡単にふれたように、Gauss の平均値  $n$  点公式の近似度が  $2n-1$  であるということは、(5)式の被積分関数  $g(t)$  が  $t$  の高々  $2n-1$  次の多項式であるときに (6) 式は誤差を生じないということである。しかし、 $g(t)$  が一般的の関数ならば、これを  $2n-1$  次の多項式で表わすことによって当然誤差を生じ、その剩余誤差の大きさ  $E$  は次の式で表わされることが証明される<sup>2)</sup>。

$$E=[-2^{2n}(n!)^4/(2n+1)\{(2n)!\}^3]g^{(2n)}(\xi) \quad (|\xi|<1) \quad \dots \dots \dots (30)$$

いまの場合には  $g(t)=(1+t)v(t)$  であるから、Leibnitz の定理により、

$$g^{(2n)}(t)=(1+t)v^{(2n)}(t)+2nv^{(2n-1)}(t) \quad \dots \dots \dots (31)$$

近似度は  $2n-2$  であるから、(31)式において  $v^{(2n)}(t)$  の項を省略して (30)式に入れると、

$$E=[-2^{2n}(2n)(n!)^4/(2n+1)\{(2n)!\}^3]v^{(2n-1)}(\xi) \quad (|\xi|<1) \quad \dots \dots \dots (32)$$

$n=2\sim 5$  とすれば、(13)～(16)式の剩余誤差は、

$$\left. \begin{array}{l} n=2; \quad E=(-2/135)v^{(3)}(\xi), \quad n=3; \quad E=(-1/5250)v^{(5)}(\xi) \\ n=4; \quad E=(-4/3472875)v^{(7)}(\xi), \quad n=5; \quad E=(-1/247546530)v^{(9)}(\xi) \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (33)$$

次に、(20)～(23)式の剩余誤差は (30)式の  $g^{(2n)}(\xi)$  を  $v^{(2n)}(\xi)$  とおいてただちに計算されるが、この場合の  $v(t)$  は (17)式の変数  $t$  に関するものであるから、(13)～(16)式の  $\xi$  と異なる記号  $\eta(|\eta|<1)$  を用いて区別すれば、

$$\left. \begin{array}{l} n=2; \quad E=(-1/270)v^{(4)}(\eta), \quad n=3; \quad E=(-1/31500)v^{(6)}(\eta) \\ n=4; \quad E=(-1/6945750)v^{(8)}(\eta), \quad n=5; \quad E=(-1/2475465300)v^{(10)}(\eta) \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (34)$$

更に (30)式と同様な方法で (26)～(29)式の剩余誤差を導くと、

$$E=[-2^{2n}(n+1)(2n+1)(n!)^4/\{(2n+1)!\}^3]v^{(2n)}(\xi) \quad (|\xi|<1) \quad \dots \dots \dots (35)$$

$$\left. \begin{array}{l} n=2; \quad E=(-1/450)v^{(4)}(\xi), \quad n=3; \quad E=(-1/55125)v^{(6)}(\xi) \\ n=4; \quad E=(-1/12502350)v^{(8)}(\xi), \quad n=5; \quad E=(-1/4538353050)v^{(10)}(\xi) \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (36)$$

さて、(33)式と(36)式とを比べると、同じ観測点数に対し、前者の絶対値は後者のそれより大きい。なぜならば、例えれば  $n=3$  について比較してみると、

$$(33) \text{式}; \quad E=(-1/5250)v^{(5)}(\xi)=(-5!/5250)v^{(5)}(\xi)/5!=(-4/175)v^{(5)}(\xi)/5!$$

$$(36) \text{式}; \quad E=(-1/55125)v^{(6)}(\xi)=(-6!/55125)v^{(6)}(\xi)/6!=(-16/1225)v^{(6)}(\xi)/6!$$

両式の  $\xi$  は必ずしも同一でないが、剩余誤差の大体の値を評価するため<sup>3)</sup>、 $\xi=0$  とおけば  $v(t)$  は Maclaurin の級数に展開できるのであるから、 $|v^{(5)}(0)|/5! > |v^{(6)}(0)|/6!$  ありかつ  $4/175 > 16/1225$  であるから、(36)式の剩余誤差の絶対値は (33)式のそれより小さい。

## 3. 修正等分割公式の誘導

ピトーラ管や流速計を用いて管水路の流量を測定するための従来の方法は、断面を等しい環状面積で分割して、それぞれの面積中心に観測点を設け、そこでの観測流速の平均を以て平均流速とする。ゆえに、従来の式を等分割公式とよぶこととすれば、この式の長所は 4. で述べるようにその分散が最小で計算が容易なことであるが、

近似度は低いのである。その理由は、観測点の位置を固定して考えるとその係数が、係数を固定して考えるとその観測点の位置が、いずれも合理的でないからである。これを同時に合理化してなるべく高い近似度を与えたものが平均値第1～第3公式であるが、ここでは、従来の式と観測点の位置が同じで係数だけを修正した式を(17)式の変換を用いて導くこととする。さて、等分割公式における観測点の位置  $x_i$  は<sup>4)</sup>,

$$x_i = \sqrt{(2i-1)/2n}r \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (37)$$

ゆえに、(17)式の変換を行なつたときの座標点  $t_i$  は,

$$t_i = (2x_i^2/r^2) - 1 = (2i-n-1)/n \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (38)$$

この  $t_i$  は区間  $[-1, 1]$  を  $n$  等分してきた各小区間の中点に等しいから、あらかじめこのように座標点を定めて係数  $R_i$  を(11)式から求めればよい。これは Maclaurin の平均値法公式で<sup>5)</sup>、その近似度は  $n$  が偶数ならば  $n-1$ 、奇数ならば  $n$  である。そこで、Maclaurin の公式の数値表<sup>6)</sup>を用いて、目的に適つた算定式を導くことができる。例えれば  $n=2$  とすれば、(37)式より  $x_1 = \sqrt{1/4}r = 0.500r$ ,  $x_2 = \sqrt{3/4}r = 0.866r$  となり、数値表より  $R_1 = R_2 = 1/2$  であるから;

$$n=2; V = (v_{0.500} + v_{0.866})/2 \quad [1] \quad \dots \dots \dots (39)$$

ここに、近似度は(17)式の  $t$  に関するものである。(39)式は従来の等分割2点公式と全く同じであるが、 $n=3$  とすれば、(37)式より  $x_1 = \sqrt{1/6}r = 0.408r$ ,  $x_2 = \sqrt{3/6}r = 0.707r$ ,  $x_3 = \sqrt{5/6}r = 0.913r$  であり、数値表より  $R_1 = R_3 = 3/8$ ,  $R_2 = 2/8$  であるから、従来の式とは違つた次の式をう。

$$n=3; V = \{3(v_{0.408} + v_{0.913}) + 2v_{0.707}\}/8 \quad [3] \quad \dots \dots \dots (40)$$

以下同様に、 $n=4, 5$  に対する算定式を導くと、

$$n=4; V = \{13(v_{0.354} + v_{0.935}) + 11(v_{0.612} + v_{0.79})\}/48 \quad [3] \quad \dots \dots \dots (41)$$

$$n=5; V = \{275(v_{0.316} + v_{0.949}) + 100(v_{0.548} + v_{0.837}) + 402v_{0.707}\}/1152 \quad [5] \quad \dots \dots \dots (42)$$

(39)～(42)式を修正等分割公式とよび、その剩余誤差は<sup>7)</sup>,

$$\begin{aligned} n=2; E &= (-1/24)v^{(2)}(\eta), \quad n=3; E = (-7/3240)v^{(4)}(\eta) \\ n=4; E &= (-103/92160)v^{(4)}(\eta), \quad n=5; E = (-223/9450000)v^{(6)}(\eta) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad \dots \dots \dots (43)$$

#### 4. 等重公式の誘導

すでに 2. で各式の近似度と剩余誤差について考察したが、剩余誤差は式そのものが持つ誤差である。このような誤差のほかに、実測に際して当然生ずべき測定上の誤差が考えられる。これには、算定式で与えられた正しい位置に計器を挿入しないために生ずる誤差、流れの乱れによつて計器が変動するための誤差、水圧計の読み取りの際に生ずる誤差などがあげられる。このような測定上の誤差は、観測点の位置に無関係に同じ確率法則に従つて生ずると考えられるから、1つの観測点での測定の精度を分散で表わして  $\sigma^2$  とおく。そこで、観測点数が  $n$  であると、各観測点の分散の和はすべての公式にわたつて 1 であるから、観測点数が  $n$  であるとき、 $\sum_{i=1}^n A_i = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n A_i^2 = \text{Min.}$  を満足する  $A_i$  の値は  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 1/n$  である。すなわち、従来の式は最小な分散を持ち、その値は  $n$  点法の場合、

$$\sigma_0^2 = A_1^2 \sigma^2 + A_2^2 \sigma^2 + \dots + A_n^2 \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n A_i^2 \quad \dots \dots \dots (44)$$

ゆえに、同じ観測点数の各式の中で、(44)式が最小すなわち  $\sum_{i=1}^n A_i^2$  が最小となる公式が分散を最小にする意味からは最も優れたものである。ところで、重み  $A_i$  の和はすべての公式にわたつて 1 であるから、観測点数が  $n$  であるとき、 $\sum_{i=1}^n A_i = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n A_i^2 = \text{Min.}$  を満足する  $A_i$  の値は  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 1/n$  である。すなわち、従来の式は最小な分散を持ち、その値は  $n$  点法の場合、

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (1/n)^2 = \sigma^2/n \quad \dots \dots \dots (45)$$

表-1 は各式の分散  $\sigma_0^2$  を(44)式より計算したものである。

表-1 からわかるように、平均値第1～第3公式の中で分散が最小なのは第2公式であり、次には第3公式で、第1公式は最も大きい。2. で述べたように、第

1 公式の剩余誤差の絶対値は第3公式のそれより大きいから、分散が大きいことと相まって、第3公式の代りに第1公式を使用すべき理由はない。ゆえに、今後平均値第1公式は算定公式から抹殺される。平均値第2、第3および修正等分割各公式の分散は、

表-1

公式 $n$	従来の式	平均値第1公式	平均値第2公式	平均値第3公式	修正等分割公式
2	$0.5000 \sigma^2$	$0.6667 \sigma^2$	$0.5000 \sigma^2$	$0.5370 \sigma^2$	$0.5000 \sigma^2$
3	$0.3333 \sigma^2$	$0.4445 \sigma^2$	$0.3519 \sigma^2$	$0.3913 \sigma^2$	$0.3438 \sigma^2$
4	$0.2500 \sigma^2$	$0.3426 \sigma^2$	$0.2732 \sigma^2$	$0.3103 \sigma^2$	$0.2517 \sigma^2$
5	$0.2000 \sigma^2$	$0.2797 \sigma^2$	$0.2235 \sigma^2$	$0.2578 \sigma^2$	$0.2508 \sigma^2$

観測点数が同じならば従来の式の分散よりも大きいが、これらの公式を使用して従来の式と同じ精度を持たせることは可能である。それには、 $m$  個の測定値の相加平均の分散は各測定値の分散  $\sigma^2$  の  $1/m$  倍であることを利用する。すなわち、表-1 より同じ観測点数に対して各式の分散と従来の式の分散との比を求めると表-2 のようになるから、これらの公式を用いるときには、従来の式を用いる場合よりも同じ観測点で 1~2 割だけ観測回数をふやせばよい。

なお、同じ観測点で双孔型ピトー管を用いて数回測定を繰り返す場合に、同じ点に動圧孔を固定させ一定の時間間隔で数回測定を行い、それから隣りの点に動圧孔を摺動させるという方法は望ましくない。なぜならば、このように動圧孔を固定させると位置の狂いはもはや偶然誤差ではなくて定誤差となるからである。計器の挿入に際しての誤差を偶然誤差として測定の分散  $\sigma^2$  に含ませうるためには、ある点での測定は動圧孔を管中心から管壁まで順次摺動させる 1 コースにただ 1 回とし、数コースにわたって数回の測定をするのが合理的である。

前述のように、従来の式は分散が最小で計算が容易であるのが長所であるが、観測点の位置は合理的でない。ここでは、従来の式の長所をそのまま保持しつつ合理的で剩余誤差の小さい算定式を (17) 式の変換を用いて導くこととする。

さて、一般に (5) 式の平均値  $M$  を求めるのに、(6) 式の係数  $R_i$  をあらかじめすべて等しく  $1/n$  ( $n$  は座標点数) としたものは Tschebyscheff の平均値法公式とよばれ<sup>9)</sup>、近似度は  $n$  が偶数ならば  $n+1$ 、奇数ならば  $n$  である。

例えれば  $n=2$  とすれば、 $t_1 = -\sqrt{1/3}$ ,  $t_2 = \sqrt{1/3}$  であるから<sup>10)</sup>、これらを (17) 式に入れて  $x_1 = \sqrt{(1-\sqrt{1/3})2r} = 0.460 r$ ,  $x_2 = \sqrt{(1+\sqrt{1/3})2r} = 0.888 r$  となり、次の算定式がえられる。

$$n=2; V=(v_{0.460}+v_{0.888})/2 [3] \dots \dots \dots \dots \quad (46)$$

同様にして、 $n=3 \sim 5$  の算定式を導くと、

$$n=3; V=(v_{0.383}+v_{0.707}+v_{0.924})/3 [3] \dots \dots \dots \dots \quad (47)$$

$$n=4; V=(v_{0.320}+v_{0.637}+v_{0.771}+v_{0.947})/4 [5] \dots \dots \dots \dots \quad (48)$$

$$n=5; V=(v_{0.289}+v_{0.559}+v_{0.707}+v_{0.829}+v_{0.957})/5 [5] \dots \dots \dots \dots \quad (49)$$

これら算定式の剩余誤差は、Tschebyscheff の公式の剩余の一般式が、

$$\left. \begin{aligned} E &= -C_n v^{(n+1)}(\eta)/(n+1)! \quad (n: \text{奇数}), \\ C_1 &= 1/3, C_2 = 4/45, C_3 = 1/30, C_4 = 16/945, C_5 = 13/1512 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

であるから<sup>11)</sup>、結局次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} n=2; E &= (-1/270)v^{(4)}(\eta), \\ n=3; E &= (-1/720)v^{(4)}(\eta) \\ n=4; E &= (-1/42525)v^{(6)}(\eta), \\ n=5; E &= (-13/1088640)v^{(6)}(\eta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \quad (51)$$

ここに導かれた算定式は重みともいべき係数が各式でそれぞれ等しいから、これらを等重公式とよぶこととすれば、これらを従来の式に比べると、その分散が等しくて近似度が高いのであるから、従来の式はその存在理由を失つたこととなる。また、等重公式の剩余誤差の (51) 式と修正等分割公式の剩余誤差の (43) 式とを比べると、すべての  $n$  について (43) 式の絶対値は (51) 式のそれよりも大きい。分散は等重公式の方が小さいから、修正等分割公式は従来の方法ですでにえられている資料に基づいてその結果を修正するためにのみ有効である。

##### 5. 各算定式の理論分布への適用

本節では上に導いた各算定式と従来の式とを理論分布に当てはめたとき、どれ程の誤差を生ずるかを求めて、各式の精度を考察しよう。

管水路内の流速分布に関する理論および実験公式のうち主なものは指數分布と対数分布である。指數分布は一般に、 $v = v_0 \{1 - (x/r)\}^{1/m}$  と書かれる。ここに、 $v_0$  は管中心での流速で、指數  $1/m$  は J. Nikuradse の実験によると Reynolds 数  $R_e$  によって変化し、最小の Reynolds 数  $R_e = 4 \times 10^3$  のとき  $1/6$ ,  $R_e = 110 \times 10^3$  のとき  $1/7$ , 最大の Reynolds 数  $R_e = 3240 \times 10^3$  のとき  $1/10$  である<sup>12)</sup>。指數分布における平均流速  $V$  の値は、

$$V = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi x v_0 \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{1/m} dx = \frac{2m^2 v_0}{(m+1)(2m+1)} \dots \dots \dots \dots \quad (52)$$

また、対数分布は  $v_*$  を摩擦速度とすると、 $v = v_0 + 2.5 v_* \ln\{1 - (x/r)\}$  であつて、平均流速  $V$  の値は、

$$V = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi x \left\{ v_0 + 2.5 v_* \ln\left(1 - \frac{x}{r}\right) \right\} dx = v_0 - \frac{15}{4} v_* \dots \dots \dots \dots \quad (53)$$

表-2

$n$	平 均 値 第 2 公 式	平 均 値 第 3 公 式	修正等分割 公 式
2	1.00	1.07	1.00
3	1.06	1.17	1.03
4	1.09	1.24	1.07
5	1.12	1.29	1.25

そこで、指數分布については  $m=6, 7, 8, 9, 10$ 、対数分布については  $v_0/v_* = 15, 20, 25, 30, 35$  のそれれ5段階計10段階のおののにつき、各式を用いた結果の(52)式または(53)式に対する誤差の百分率を計算することができる。この誤差は1つの例外もなく正となつた。すなわち、どの算定式を用いても流量を大目に測定する傾向にあるといえる。また、指數分布では  $m$  が大きい程、対数分布では  $v_0/v_*$  が大きい程いずれも誤差は小さくなる。これは数学的にいうと理論分布式を(2)式または(17)式で定義される変数  $t$  に関する無限ベキ級数に展開するとき、 $m$  や  $v_0/v_*$  が大きい程収束が速やかになるためであり、水理学的にいうと乱流が十分に発達して混合作用により流速分布が平均化されるからである。

表-3 は  $n=2 \sim 5$  のおののにつき 各式別の誤差百分率の平均値を計算したものである。

表-3 を見ると 4. まで述べた理論的考察がほとんど満足されていることがわかる。すなわち、1つの例外を除き、少なくとも理論分布に対しては、観測点数が同じならば、新しく導かれた算定式の精

表-3

式 $n$	従来の式	平均値第2公式	平均値第3公式	修正等分割公式	等重公式
2	+1.64%	+1.06%	+1.75%	+1.64%	+1.06%
3	+1.10%	+0.50%	+0.90%	+0.84%	+0.73%
4	+0.85%	+0.28%	+0.55%	+0.71%	+0.49%
5	+0.65%	+0.21%	+0.35%	+0.43%	+0.40%

度は、従来の式の精度よりいずれも高い。1つの例外とは従来の2点法の精度より同じ2点法の平均値第3公式の精度が劣ることである。3. で述べたように、従来の2点法の式は修正等分割2点公式と全く同じであるから、この比較は(39)式に対する剩余誤差[(43)の第1式]が(26)式に対する剩余誤差[(36)の第1式]より小さいことを示すのである。この原因は(39)式が(17)式の変換によつてえられているのに対し、(26)式は(2)式の変換によつてえられている点にある。すなわち、(17)式の変換は(2)式の変換より相当高い精度を与えることが了解される。

さて、4. までで結論のえられなかつたことは平均値第2公式と第3公式との精度の比較であつたが、(17)式の変換が(2)式の変換より精度の高い結果を与えることがわかれば、第2公式が第3公式より優秀なことが了解される。また、表-1 を見ると、第2公式の分散は同じ観測点数で第3公式の分散よりも小さいから、上の結論と相まつて、第3公式を第2公式に代わつて採用すべき理由はないこととなる。結局、平均値公式の中で第2公式があらゆる点で最も合理的かつ精度が高いといつうことができる。

平均値第2公式の分散が従来の式の分散より大きいことと計算が少し面倒なこととの短所を補う目的で導いたのが等重公式であつた。いま、表-3 から各式を精度の良い順に配列すると、①平均値第2公式、②等重公式、③平均値第3公式( $n=2$  を除く)、④修正等分割公式、⑤従来の式となる。これから等重公式の精度は、相当に良いことがわかる。すなわち、等重公式は、精度が相當に高いこと計算の手間が簡単なことおよび式の分散が最小であることなどの理由により、従来の式に代わつて十分実用的であると考えられる。

修正等分割公式と等重公式とを導くときに断わつたように(39)～(42)式および(46)～(49)式はいずれも(17)式の変換によつてえられたものであるが、もし(2)式の変換を行ないかつ  $t_1 = -1$  の条件を与えて導けば、上とは違つた公式がえられる筈である。本論文でこの方法を割愛したのは、前述のように(2)式の変換よりえられる式の精度が(17)式の変換よりえられる式の精度より悪いことが明らかだからである。

表-4 は、上のようにして最終的に選出された3つの公式のおののにつき、表-3 を用いて各式の誤差と従

來の式の誤差との比を計算したものである。ゆえに、表中の数値が小さい程精度が改善されていることを示す。

表-4 を見ると、等重公式と修正等分割公式との精度の改善される割合は観測点数の増すにつれて増す傾向にあるが顕著とはいえない。しかし、平均値第2公式ではそれが明らかに現われている。もつとも改善される割合の増大は観測点数の増大するにつれて漸減する。平均値2点第

2公式の誤差は従来の2点法の誤差の約0.6倍で5点になると約0.3倍となる。このことは逆に、同じ精度の結果をうるためにには、平均値第2公式を用いれば従来の式を用いるよりも少ない観測点数で十分であることを示す。例えは指數分布の  $m=7$  の場合には(表は省略)、従来の5点法による精度( $E=+0.49\%$ )と同程度の精度が平均値3点第2公式でえられ( $E=+0.37\%$ )、また、対数分布の  $v_0/v_* = 20$  の場合には(表は省略)、従来の5点法による精度( $E=+0.99\%$ )と同程度の精度が平均値3点第2公式でえられる( $E=+0.86\%$ )。いずれの場合にも、直径上の観測点数を10個から6個に減らしてもなお精度は改善される。これは10通りの理論分布のすべてにわたつて当てはまることがある。

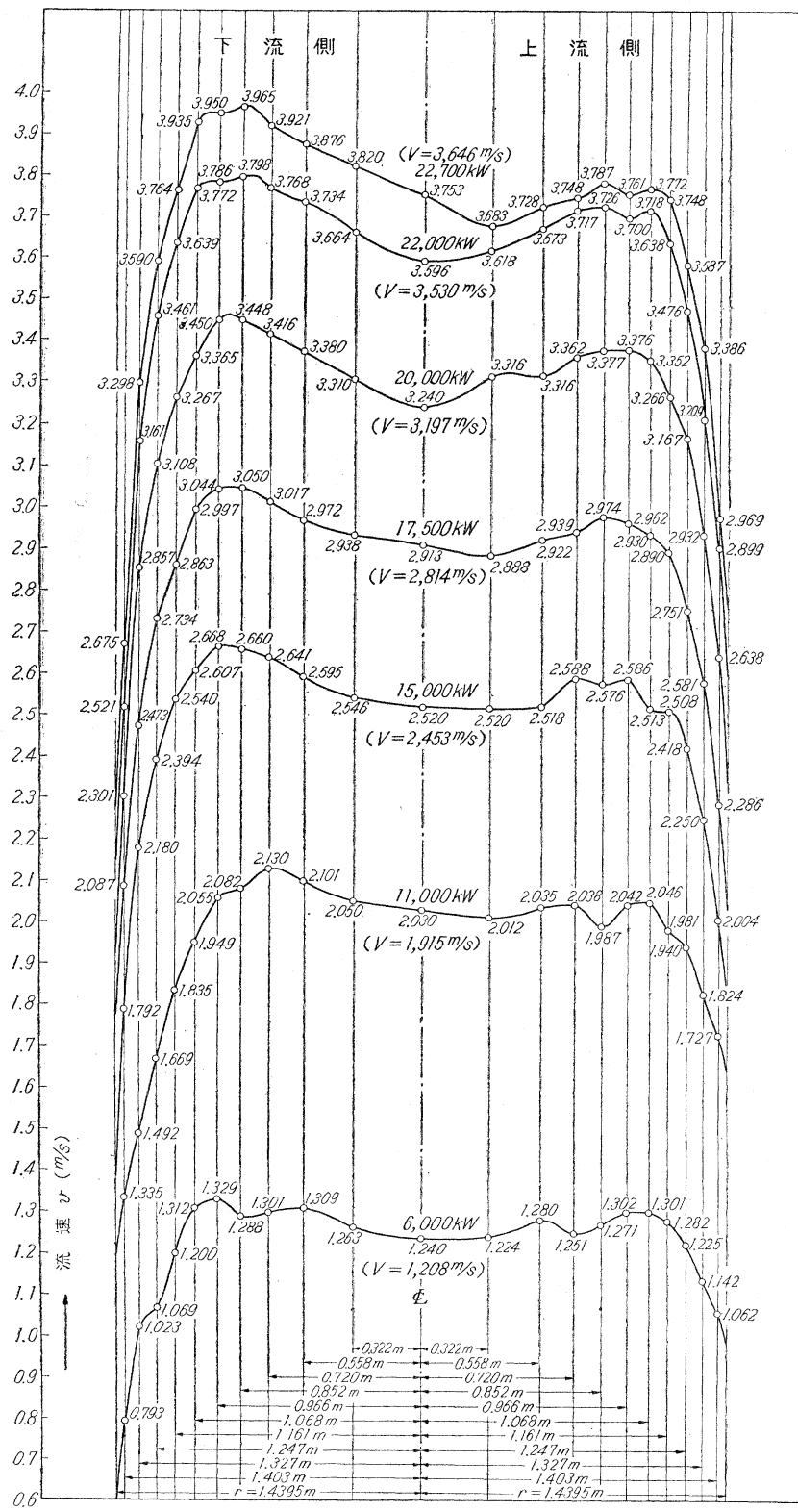
表-4

式 $n$	平均値第2公式	等重公式	修正等分割公式
2	0.64	0.64	1.00
3	0.45	0.66	0.76
4	0.31	0.56	0.82
5	0.30	0.61	0.64

## 6. 各算定式の精度の実測的考察

上で選出した3種の算定式と従来の式との精度を実測的に考察するため、筆者が参加した中部電力KK大井川発電所水圧鉄管での実測資料を使用する。実測は昭和33年5月12~14日の3日間、7段階の負荷（全負荷は18 000kW~68 200kW）について、双管型ピト一管による1直径方法で行なわれた。水圧鉄管は下流側から上流側に1号、2号、3号とよばれ、測定断面はいづれも水平部から鉛直面内に角 $42^{\circ}53'52''$ で屈曲する鉄管に沿い助走距離が41.34m、下流直線部の長さが13.94mとなる点に設けられた。鉄管内径( $D$ )は1号管が2.888m、2号管が2.879m、3号管が2.850mであつたから、助走距離はそれぞれ $14.3D$ 、 $14.4D$ 、 $14.5D$ となり、流速分布曲面はほぼ回転面と仮定して差し支えないと思われる。静圧孔は動圧孔を摺動させるためのバーより水平に50cmだけ上流に測り取つた点に設置された。1直径に沿つての観測点は、なるべく精密な流速分布がえられるよう、管中心を含めて21点を管中心に関して対称に、従来の方法に準拠して定めた。観測回数は1点につき10回とし、その相加平均を以てその点

図-1



での流速  $v$  m/sec (小数点以下 3 衔) とする。平均流速の標準値は、横軸に沿つて管中心からの距離  $x$  の 2 乗をとり縦軸に沿つて流速  $v$  をとつて描いた  $v - x^2$  曲線の囲む面積を算出して定められ、各式に必要な流速値は流速分布図上から求められた。これより、標準値に対する各式の誤差の百分率を計算することができる。

図-1 は 2 号管における流速分布図で  $V$  は平均流速の標準値である。1 号管、3 号管もこれと同様な流速分布を示し、実測に際してしばしば見受けるように、この場合にも最大流速が管中心の両側に対称的に現われ、中心での流速はそれより少し小さい。21 個の資料につき平均流速と管中心の流速との比すなわち速度率は 0.936 ~ 0.992、平均 0.966 であつた (5. の理論分布では  $m$  が大きい程あるいは  $v_0/v_*$  が大きい程速度率は大きくなり、 $m=6$  で 0.791、 $m=10$  で 0.866、 $v_0/v_* = 15$  で 0.750、 $v_0/v_* = 35$  で 0.893、総平均は 0.834 となる)。

表-5 は各式の観測点数別に 21 個の誤差の百分率を平均したもので、 $\bar{E}$  は誤差の相加平均、 $|\bar{E}|$  は誤差の絶対値の平均を表わし、カッコ中の値は各式における  $|\bar{E}|$  の従来の式における  $|\bar{E}|$  に対する比である。

表-5

$n$ 誤 差	公式		従 来 の 式		平均 値 第 2 公 式		等 重 公 式		修 正 等 分 割 公 式	
	$\bar{E}$	$ \bar{E} $	$\bar{E}$	$ \bar{E} $	$\bar{E}$	$ \bar{E} $	$\bar{E}$	$ \bar{E} $	$\bar{E}$	$ \bar{E} $
2	+1.43%	1.43%	+0.29%	(0.30)	0.42%	(0.30)	+0.29%	0.42%	+1.43%	1.43% (1.00)
3	+0.79%	0.79%	+0.16%	(0.49)	0.39%	(0.48)	+0.26%	0.38%	+0.31%	0.36% (0.45)
4	+0.46%	0.51%	-0.04%	(0.40)	0.20%	(0.48)	+0.07%	0.25%	+0.19%	0.32% (0.63)
5	+0.27%	0.29%	-0.01%	(0.32)	0.09%	(0.41)	+0.02%	0.12%	+0.08%	0.22% (0.75)

表-5 中  $\bar{E}$  が負となるのは 2 つあるが、全資料 336 個中で誤差が負となるのは 76 個 (23%) であつた。

表-5 から明らかのように、精度を  $\bar{E}$  の大きさで考えれば、精度の良さは平均値第 2、等重、修正等分割、従来の式の順となり、観測点数が同じならば平均値第 2、等重各公式の誤差は従来の式のそれの 0.3~0.5 倍であり、また、従来の 5 点法でえられるのと同程度の精度が平均値第 2 および等重各公式では 2~3 点で、修正等分割公式では 3 点でえられ、結局全観測点数をほぼ半減させることができる。

このように、理論分布に合致するとは考えられない図-1 のような流速分布に対しても、4. までに述べた理論的考察や理論分布に適用してえられた 5. の結果とほとんど同じ結果がえられたのである。

以上によつてわれわれは、実測に際して選ぶべき算定式は平均値第 2 公式か等重公式かであつて、このいずれを選んでも従来の方法より観測点数をほぼ半減させうることを知つた。観測点数を減少させるということは、測定が簡単化されるに止まらず、少數の観測点に計器を固定させて同時測定を可能とし、計器に流塵の引つかかる機会を少なくし、ピトー管ならば水圧計間の干渉を少なくするなど、いずれも測定精度を上昇させることとなるのである。

## 1. 結 語

1) 管水路の測定断面での流速分布曲面が管軸のまわりの回転面で十分近似的に表わせる場合の平均流速算定式は、誘導過程の相違から平均値第 1、第 2、第 3 各公式にわけられ、その剩余誤差はそれぞれ (33) 式、(34) 式、(36) 式で与えられる。また、平均値第 1 および第 3 公式の  $n$  点法の近似度はそれぞれ  $2n-2$  および  $2n-1$  で、平均値第 2 公式の近似度は (17) 式の変数に関して  $2n-1$  である。

2) 従来の等分割法によつてすでにえられている資料を基としてその結果を修正するために、観測点の位置はそのままで係数を合理的に改めた修正等分割公式が導かれ、その剩余誤差は (43) 式で与えられる。

3) 従来の式は最小の分散を持ち計算も簡単であるが、これと同じ長所を持ちしかも観測点の位置を合理化して近似度を高めた等重公式が導かれ、その剩余誤差は (51) 式で与えられる。

4) 平均値第 1 公式は第 3 公式に比べて、近似度が低く、剩余誤差が大きく、分散も大きいから、存在理由を失い、従来の式も等重公式に比べて存在理由を失う。

5) 各式を管中の流速に関する理論分布 (指數分布と対数分布) および実測に適用すれば、理論的結論と同じ結果をうる。ただ理論では不明な平均値第 2、第 3 両公式の精度の比較ができる。それによれば前者が後者よりも優れる点で優れ、第 3 公式は存在理由を失う。

6) 平均値第 2 公式の誤差は同じ観測点数に対し従来の式の誤差の 0.3~0.6 倍で、このような精度の改善は観測点数が増大するにつれて漸減的に増大する。ゆえに、従来の式の 5 点法でえられるのと同程度の精度が平均値 3 点第 2 公式でえられる。

7) 等重公式は、近似度が比較的高く、分散が最小で、計算が簡単なばかりでなく、理論分布および実測に適用したときの精度も平均値第 2 公式について良い。ゆえに、等重公式は十分実用性の高い公式と考えられる。

この研究に対しては昭和 32 年度文部省科学研究費（各個研究）の交付を受けた。また、中部電力 KK は有意義な実測に筆者の参加しうる機会を与えられた。ここに記して謝意を表する次第である。

#### 参考文献

- 1) 春日屋伸昌：平均値法に基づく管水路内の流量算定式の誘導、土木学会論文集、第 61 号、1959、p. 38～p. 46
- 2) Kopal, Z.: Numerical Analysis, 1955, p. 373
- 3) 小倉金之助、近藤 鶴：ザンデン実用解析学（改訂版）、1948、p.140～p.141
- 4) Howe, J.W.: Rouse, Engineering Hydraulics, 1950, p.202
- 5) 春日屋伸昌：最小 2 乗法と実験式、応用数学講座、第 5 卷、第 2 部、1957、p.299
- 6) 同 上、p.316～p.317
- 7) 中川 元、春日屋伸昌：自然科学のための数学汎論、1953、p.293
- 8) 春日屋伸昌：最小 2 乗法と実験式、応用数学講座、第 5 卷、第 2 部、1957、p.94～p.95
- 9) 同 上、p.300
- 10) 春日屋伸昌：平均値法の原理と流量測定への応用、中央大学 70 周年記念工学部論文集、1955、p.59
- 11) Hildebrand, F.B.: Introduction to Numerical Analysis, 1956, p.350
- 12) Schlichting, H.: Boundary layer theory, translated by Kestin, J., 1955, p.402