

## Kötter の方程式の理論土質力学への適用

# 正員 山 口 柏 樹\*

## APPLICATION OF KÖTTER EQUATION TO THE THEORETICAL SOIL MECHANICS

*By Hakuju Yamaguchi, C.E. Member*

**Synopsis:** A reasonable analysis of earth pressure computation or bearing value estimation is presented by solving the difference forms of generalized Kötter's equations; developing Ohde's method an approximate analysis of earth pressure on a rotating wall around its upper end is also discussed, and these theories are checked up experimentally. Through these investigations it has been clarified that the usual approximate formulae have fairly good accuracy with respect to the pressure intensity, except the passive case, when an angle of internal friction exceeds 40 degrees, and that, on the contrary the pattern of a slip line field obtained by any approximate method is known to be considerably erroneous.

It is added finally the correction method to obtain more accurate Stability numbers than Jáký's values.

**要旨** 一般的な Kötter 方程式の差分解を主働、受働の場合に求め、壁面土圧や支持力の精密な解析法を論じた。上端周りに回転する壁上の土圧を Ohde の方法を修正し近似的に計算し、これらの結果を実験的に検討した。これにより従来の近似法による土圧評価式は受働で摩擦角の大きい場合を除いては良い精度を与えるが、塑性域の範囲は明らかな差が見られることが判明した。なお Jáký の法面解析法の簡単な補正法を述べ、より Taylor 値に近い安定数を導くことができた。

## 1. 序論

粘着力のないあるいはそれを含む Kötter の方程式の近似積分を土質力学の基本的問題（土圧、支持力、法面安定）に適用して議論することは Ohde<sup>1)</sup>, Jáky<sup>2)</sup> などが試みているが、差分式を解いて辺り線を組み立てることにより、塑性場の状態がさらに合理的に解析し得る。これは多くの場合、過渡域内の辺り線場を構成することに帰するがまだ果たされていないようである。本文に述べるごとく主、受働土圧の過渡域では差分解法が可能であるが、例えは壁が任意の変形を行う時の背面塑性場、法面崩壊部の辺り線などについての厳密な解はまだ不明である。しかしこの種の問題に対しても Kötter 式の近似適用によりある程度の成果が得られるし、従来の方法を修正してより合理的に解析することができる。

さて塑性場を定める一般の Kötter 式は  $\tan \phi = \mu$  として

$$\frac{dp}{ds_1} - 2\left(\mu p + \frac{c}{\cos \phi}\right) \frac{d\theta}{ds_1} = r \sin(\theta - \phi), \quad \frac{dp}{ds_2} + 2\left(\mu p + \frac{c}{\cos \phi}\right) \frac{d\theta}{ds_2} = r \cos \theta \dots\dots(1.1)$$

で（記号については前論文<sup>3)</sup> 参照）ある。または (1.1) の差分式を用いることができる。境界条件としては Rankine 域と過渡域の境界（限界線）での  $\beta$  が多く考えられるが 図-1 b) のごとく表面荷重を  $q_0$  として地表面が水平である時は周知のように

$$p = \left[ \frac{r \rho_0 \sin(\pi/4 \pm \phi/2) + q_0}{1 \pm \sin \phi} \right] \cos \phi \mp c \quad (\text{複号順に主, 受動}) \dots\dots\dots(1.2)$$

また剛体壁と交差する辺り線の交角  $\nu$  は粗度角を  $\delta$  とすると

複号は壁より見る二通り線交角が  $\pi/2$  や  $\phi$  なるに応ずる。通常過渡域問題は (1.2), (1.3) の下に (1.1) を解くのであるがその実際上の手続きを以下の本文に示そう。

## 2. 主働土圧の差分解

代表的な場合として  $\delta = \phi$  を考える。この時  $s_1$  近り線群は壁面包絡線とせねばならぬ<sup>4)</sup>。過渡域内の近り線

\* 中央大学助教授，工学部土木工学部

綱は図-1a)に示すごとくであるが、まず基本要素①②の構成法を述べる。図b)はその拡大図でOAは限界線であつて地表面が水平でなければ一般に曲線であるが、一般にその作図はMohr内により容易に遂行できる(4.参照)。簡単のためOBとx軸は一致するものとすると  $\alpha = \pi/4 + \phi/2$  である。

OCは頂点で壁面OWに接する  $S_1$ 線でACWは  $S_2$  線であり  $\nu = \pi/2 - \phi$ 。粘着力がある時頂点は応力特異点となるのでOA方向とOC方向に関する  $p_o$  (これを  $p_o(A), p_o(C)$  と表わす)は一般に異なる。 $p_o(C)$  の他に未知数は  $OC, AC, \theta_C (\equiv \theta)$  とおく)、 $\overline{CW}, \overline{OW} (\rho_w)$  とおく)、 $p_C, p_w$  であるがこれらは一般Kötter式を差分的に用い各辺り線素を円弧と仮定することにより求められる。まず円弧仮定より

$$\delta_1 = \delta_3 = (\alpha + \lambda - \theta)/2, \quad \delta_2 = (\theta - \delta)/2$$

従つて  $\triangle OCA, \triangle OCW$  に關し正弦法則を用いると

$$\left. \begin{aligned} \overline{OC} &= \frac{\rho_o}{K_1} \cos\left(\phi - \frac{\theta - \alpha}{2}\right), \quad \overline{AC} = \frac{\rho_o}{K_1} \sin\left(\theta + \lambda - \alpha\right), \quad K_1 = \cos\left(\phi + \frac{\lambda}{2}\right) \\ \overline{CW} &= \frac{\overline{OC}}{K_2} \sin\left(\frac{\alpha + \lambda - \theta}{2}\right), \quad \rho_w = \frac{\overline{OC}}{K_2} \cos\phi, \quad K_2 = \cos\left(\phi + \frac{\alpha + \lambda - \theta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)^{*}$$

Oの周りの微小な  $S_2$  線素 ( $dS_2 \rightarrow 0$ ) につき(1.1)を用いると

$$p_o(C) \sin \phi = \frac{1 - \mu \lambda}{1 + \mu \lambda} (1 - \sin \phi) (C + \mu q_o) \quad (2.2)$$

ここで  $C, q_o = 0$  なら  $p_o(C) = p_o(A) = 0$  (正常点) である。 $\rho \sin \phi + C \equiv \tau$  として  $\overline{OA}, \overline{OC}, \overline{CA}$  について差分式を作ると

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= \tau_o(A) + \tau \sin \phi \cdot \rho_o \sin(\alpha - \phi), \quad (\tau_o(A) = (1 - \sin \phi)(C + \mu q_o)) \\ \tau_C - \tau_o(C) - \mu[\tau_C + \tau_o(C)] (\theta - \alpha - \lambda) &= \tau \sin \phi \overline{OC} \sin\left(\frac{\theta + \alpha + \lambda}{2} - \phi\right) \\ \tau_C - \tau_A + \mu(\tau_C + \tau_A) (\theta - \alpha) &= \tau \sin \phi \overline{AC} \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

上式より  $\tau_C, \tau_A$  を消去し(2.1)から  $\overline{OC}, \overline{AC}$  を  $\rho_o$  で表わすと  $\theta$  を定める式

$$\begin{aligned} &\{1 - \mu(\theta - \alpha - \lambda)\} [\{\tau_o(A) + \tau \sin \phi \cdot \rho_o \sin(\alpha - \phi)\} \{1 - \mu(\theta - \alpha)\} \\ &+ \tau \sin \phi \cdot \rho_o \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta + \lambda - \alpha}{2}\right) / \cos\left(\phi + \frac{\lambda}{2}\right)] \\ &= \{1 + \mu(\theta - \alpha)\} [\tau_o(A) \{1 + \mu(\theta - \alpha - \lambda)(1 - \mu \lambda)\} / (1 + \mu \lambda) \\ &+ \tau \sin \phi \cdot \rho_o \sin\left(\frac{\theta + \alpha + \lambda}{2} - \phi\right) \cos\left(\phi - \frac{\theta - \alpha}{2}\right) / \cos\left(\phi + \frac{\lambda}{2}\right)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

が得られる。

(2.3)は円弧曲率が小さい限り十分精確であるが、曲率が大きくなると(受動ではこの場合である)円弧に沿う線積分表示を用いれば精度が改善される(7.参照)。

(2.4)を試探的に解いて  $\theta$  を求めると(2.1)より辺り線要素の寸度が決り(2.3)の第三式とCW間に關する類似の差分式から順に  $\rho_w$  が求まる。(2.4)は  $\tau_o(A)$  を介して  $C, q_o$  も含むから  $\theta$  は  $\rho_o$  の他に  $C, q_o$  によつても変るが、 $C, q_o = 0$  である時は  $\rho_o$  にも無関係な式

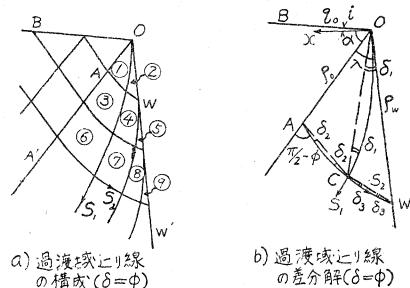
$$\begin{aligned} &\{1 - \mu(\theta - \alpha - \lambda)\} \left[ \sin(\alpha - \phi) \cos(\phi + \lambda/2) \{1 - \mu(\theta - \alpha)\} + \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta + \lambda - \alpha}{2}\right) \right] \\ &= \{1 + \mu(\theta - \alpha)\} \sin\left(\frac{\theta + \alpha + \lambda}{2} - \phi\right) \cos\left(\phi - \frac{\theta - \alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.4')$$

となる。 $\phi$ の二、三の値について(2.4')を用いて数値計算せる結果は次節に示そう。

一般的場合はさらに③④⑤……の順序に差分解を求めて行くのであるが、③④などの作図はRiemannの問題にはかならず線素の辺長の幾何学的表示<sup>4)</sup>を利用すれば上記と類同に処し得る。

$\delta < \phi$  であれば  $\lambda$ の値によつて頂点に特異性の現われることがあるが次節の近似法-IIIを利用して基本要素を定めればよく本節と方法上本質的な差は無い。

図-1



### 3. 主働土圧の近似評価の二、三の方法

#### (1) 対数螺旋による近似法

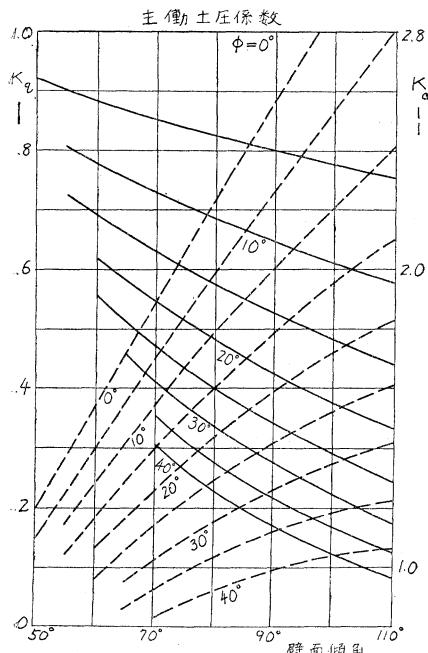
古くから金属塑性論の扇形塑性場の analogy として用いられて来たが、 $r, \phi=0$  の場合には正しいにり線を与えることは前に論じた<sup>3)</sup>。しかし本近似法で求めた土圧係数は粘着力、表面荷重に対しては正解である上、重力に応ずる土圧係数は主働はもちろん $\phi$  の過大でない時は受働土圧に対しても大きな差を生じないし、さらに対数螺旋に沿う積分値は塑性域に関する Moment の釣合いを自動的に満たすことが容易に示されるから慣用解析法とも一致することなどが本近似法の優れた点である。図-2 a) について  $AW$  を極  $O$  に対する対数螺旋  $\rho = \rho_0 e^{\mu(\theta - \alpha)}$  とするとこれは壁面での条件  $\delta = \phi$  を満足する。(1.1) の第二式で  $dS_2 = \rho_0 \mu \sec \phi e^{\mu(\theta - \alpha)} d\theta$  を用い (1.2) を考えると

$$\begin{aligned} p &= \frac{q_0 \cos \phi}{1 + \sin \phi} e^{-2\mu(\theta - \alpha)} - \frac{c}{\sin \phi} \{1 - (1 - \sin \phi)e^{-2\mu(\theta - \alpha)}\} + \gamma \rho \cos \phi \left[ \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \phi} e^{-2\mu(\theta - \alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 + 8 \sin^2 \phi} \times \{(3 \mu \cos \theta + \sin \theta)e^{\mu(\theta - \alpha)} - (3 \mu \cos \alpha + \sin \alpha)e^{-2\mu(\theta - \alpha)}\}\right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

壁面上では  $\theta = \beta$  とおき、垂直土圧  $\sigma_w = p(\beta) \cos \phi$  は

$$\begin{aligned} \sigma_w &= K_q \cdot q_0 - K_c \cdot C + K_\tau \cdot \gamma \rho_w \\ \text{ただし } K_q &= \frac{\cos^2 \phi e^{-2\mu \lambda}}{1 + \sin \phi} \\ K_c &= \cot \phi \{1 - (1 - \sin \phi)e^{-2\mu \lambda}\} \\ K_\tau &= \cos^2 \phi \left[ \frac{\sin \alpha e^{-3\mu \lambda}}{1 + \sin \phi} + \frac{1}{1 + 8 \sin^2 \phi} \{(3 \mu \cos \beta + \sin \beta) - (3 \mu \cos \alpha + \sin \alpha)e^{-3\mu \lambda}\} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

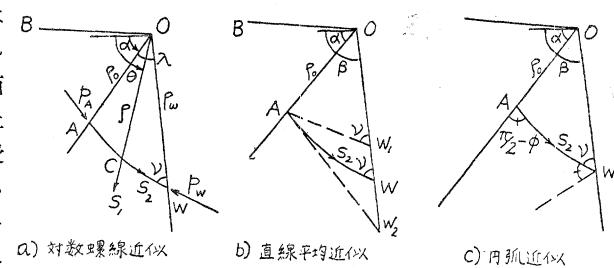
図-3



$$\theta \sim \bar{\theta} = (\theta_A + \theta_W)/2 = 3\phi/4 + \nu/2 - \beta/2 - \pi/8$$

$$\frac{d\theta}{dS_2} \sim \bar{\theta} = \frac{1}{AW} \int_A^W \frac{d\theta}{dS_2} dS_2 = \frac{\phi/2 + \nu + \beta - 3\pi/4}{AW} \left( AW \div \frac{AW_1 + AW_2}{2} \right) \quad (3.3)$$

図-2



のごとくなる。壁面傾角  $\beta$  に応ずる正解  $K_q, K_c$  を図-3 に示した。粘着性土では creep に伴う時間効果があるため理論値ことに  $K_c$  は実際上の適用に当り慎重に考慮せねばなるまい（受働の場合の  $F_c$  は壁面移動が強制的であることが多いので  $K_c$  よりも妥当性を持つと思われる）。

$|\delta| \neq \phi$  ならば  $AO$  またはその延長上に極を定めることにより、上と同様に論ぜられるが  $c, q_0 = 0$  の場合は Ohde<sup>1)</sup> も扱つてゐるので省略する。この場合の  $K_q, K_c$  は次項を参照せられたい。

#### (2) 直線平均近似法

本法は主働過渡域内で  $S_2$  線  $AW$  の平均曲率が大でないことに着目し (1.1) 内の  $d\theta/dS_2, \cos \theta$  等を  $AW$  間の平均値で置代えて積分する方法である。図-2 b) で簡単な考慮により正しい  $AW$  は  $OA$  と  $\pi/2 - \phi$  で交差する  $AW_2$  と壁面で  $\nu$  ( $\delta$  に応じ (1.2) より決る) で交わる  $AW_1$  の二線分に挿まれることが知れるので近似的に

として(1.1)を積分すれば

$$\rho_w = \left\{ \begin{array}{l} \left( r \cos \theta - \frac{2c}{\cos \phi} \bar{\theta} \right) (1 - e^{-2\mu \zeta}) - \frac{1}{2\mu \bar{\theta}} + \left( \frac{r\rho_0 \sin \alpha + q_0}{1 + \sin \phi} \phi \cos \phi - c \right) e^{-2\mu \zeta} \\ \zeta = \phi/2 + \nu + \beta - 3\pi/4 \end{array} \right\} \dots \quad (3.4)$$

さらに  $\rho_w = OW \approx (OW_1 + OW_2)/2$  とすると

$$\rho_w = \frac{\rho_0}{2} \left\{ \frac{\cos \phi}{\sin(3\pi/4 - \phi/2 - \beta)} + \frac{\sin(5\pi/4 + \phi/2 - \beta - \nu)}{\sin \nu} \right\}$$

$$\widehat{AW} = \frac{\rho}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin(\beta - \pi/4 - \phi/2)}{\sin \nu} \right\}$$

$$\left. \right\} \dots \dots \dots \quad (3.5)$$

であるので  $\sigma_w = p \{ \sin^2 \nu + \cos^2(\nu + \phi) \} / \cos \phi$  を考えると

$$K_q = \frac{e^{-2\mu \zeta}}{1 + \sin \phi} \{ \sin^2 \nu + \cos^2(\phi + \nu) \}$$

$$K_c = \frac{2}{\sin 2\phi} \{ 1 - (1 - \sin \phi) e^{-2\mu \zeta} \} \{ \sin^2 \nu + \cos^2(\phi + \nu) \} + \frac{2 \sin \nu \cos(\phi + \nu)}{\cos \phi}$$

$$K_r = \frac{\cos \bar{\theta}}{2\rho_w \bar{\theta} \sin \phi} (1 - e^{-2\mu \zeta}) + \frac{\rho_0 \sin \alpha}{\rho_w (1 + \sin \phi)} e^{-2\mu \zeta} \{ \sin^2 \nu + \cos^2(\phi + \nu) \}$$

$$\left. \right\} \dots \dots \dots \quad (3.6)$$

が得られる。この  $K_q, K_c$  は正解を与える。

### (3) 円弧近似法

$AW$  を円弧で近似せしめてもその精度は(1), (2)とほぼ同じである。本近似法は  $\delta \neq \phi$  の場合の差分解における基本領域の作図にも利用できる上  $\delta < 0$  に対しても適用が容易である。 $0 < \delta < \phi$  に対しては図-2 c) から

$$\frac{\rho_w}{\rho_0} = \frac{\cos(\phi + \alpha - \nu - \beta)}{\cos(\nu - \phi) - \sin(\beta - \alpha)} \dots \dots \dots \quad (3.7)$$

であるので(1.1)を円弧積分するか、差分的に解くか、あるいは前項のごとき平均的近似法を用いるかして各土圧係数が得られる。

### 4. 各方法による主働土圧係数値の比較

差分精密解と各種近似解の相違の要点は  $K_r$  と辺り線の形状寸度にあるから後者の尺度として  $\rho_w/\rho_0$  を採つて比較しよう。ただし簡単のため地表面は水平とし  $\beta = \pi/2$  とする。結果は表-1に示される。

表-1

$\phi$	$\theta$ (2.4')	$\rho_w/\rho_0$			$K_r$			
		差 分 解	§ 3 [I]	§ 3 [III]	差 分 解	§ 3 [I]	§ 3 [II]	Coulomb
10°	52° 5'	1.284	1.129	1.131	.6329	.6205	.6213	.6250
20°	56° 18'	1.399	1.249	1.250	.4088	.3946	.3970	.4040
30°	60° 47'	1.502	1.350	1.353	.2602	.2500	.2561	.2590
40°	65° 26'	1.581	1.442	1.447	.1616	.1547	.1616	.1616

この表によると近似解は多少小さな  $K_r$  を与えるが差分解との差は余りなく、 $\phi$  が大きくなるとより精度がよくなることが見られる。これは  $\phi$  が増すにつれ過渡域の幅が狭くなるため近似辺り線長が短くて済むことによるものと思われるが Coulomb 値の精度のよいのは驚く程である(詳細は省くが他の場合  $\delta \neq \phi, \beta \neq \pi/2, i \neq 0$  にも云える)。他方  $\rho_w/\rho_0$  の差分解と近似解の差は  $K_r$  に比べて一般に大きいから実験検討の手段として利用し得る(6. 参照)。なお  $\phi = \delta = 30^\circ$  に対する Kármán<sup>5)</sup> の得た  $K_r$  は 0.27 であり安蔵教授<sup>6)</sup> の換算値は 0.262 であることを付言する。

近似法による  $K_r$  の精度が案外よいのは、限界線上の  $\rho_0$  が与えられた近似辺り線の終点  $W$  に関する  $\rho_w$  が真の値に比べて小さくなるが同時に幸い応力の近似値そのものも小さくなるので係数  $K_r$  に入つて来る誤差が相殺されることに起因する。

正しい辺り線につき求めた応力は限界線に囲まれた塑性域の剛体的釣合い式を当然満足するはずであるが近似辺り線においてはこのようなことは期待し得ぬ。例えば対数螺旋解(3.1)を考えるに Moment 式は満足するが併進釣合い条件は満足されない。水平、鉛直方向の釣合式から形式上  $K_r$  を求めることは可能でありこれを  $K_r^h$ ,  $K_r^v$  とすると  $\phi = \delta = 30^\circ$  の時  $K_r^h = 0.275$ ,  $K_r^v = 0.3980$  となる。 $K_r^h$  は表-1の  $K_r$ ( $K_r^M$  の意)に近いが  $K_r^v$  は 60% も過大な値を示す。これは  $\rho_w/\rho_0$  が対数螺旋の場合過小なることに因るのである。なお  $K_c, K_q$  については回転、併進から求めた三つの値は安全に一致することが確かめられる。

実際力の釣合を考慮して回転により求めた土圧係数を修正する具体例は後節(7.)で論ずることとする。

前二節で地表面を水平の場合に限つたが、これが傾いていても差分法の適用上制限は生じない。ただ2.のように簡単な解析的記述がなされぬだけである。この時限界線OAはMohr円を利用することにより曲線

$$\left. \begin{aligned} (q_0 + r y) \cos i [\sin i - \sin \phi \sin(i + \lambda)] &= c \cos \phi [\sin \lambda + 2 \sin i \cos(i + \lambda)] \\ \lambda &= 2\theta - \phi - \pi/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.1)$$

で与えられる。ここで*i*は表面傾角(昇り勾配を正にとる)、*y*は限界線より地表面までの鉛直距離を表す。

### 5. 上端周り回転壁に対する土圧

本問題に初めてKötter式を用いて論じたのはOhde<sup>1)</sup>である。彼は観察により辺り線がほぼ地表面と直交し壁下端を通る円弧に近い事を認めて解析し合土圧、着力点、土圧分布の推定等を行つたが、この方法によると辺り線が十分塑性域の発達せる下端で $\delta$ に応じた角 $\nu$ で壁面と交差することができない。また筆者の実験によると回転初期では写真-3に見るとく $\lambda_0$ (図-4参照)が0でない。回転が進むにつれ $\lambda_0$ は $\lambda_0^+$ より $\lambda_0^-$ に段々減少して行くがこの $\lambda_0^\pm$ は簡単には決められない。ここでは一応次のとく推定する。回転開始時では上端拘束のため水平方向(もしくはそれに近い方向)が大きい主応力の方向であるが、回転の進むにつれArchができ初め壁が十分粗であればArch軸線と壁とのなす角はほぼ $\pi/2 - \phi$ の程度であろう。図-4 a)に示すとくこの経過に伴つて $S_2$ 線と鉛直線のなす角は大体 $(\pi/2 - \pi/2 - \phi) - (\pi/4 - \phi/2)$ の範囲にあると思われるが、実際にはこの中間の状態にあるものとみて次の平均値で与えられるものと考えよう。

$$\lambda_0^+ \sim \lambda_0^- = \pi/8 \pm \phi/4 \dots\dots (5.1)$$

この値はわれわれの実測値とも比較的近いし、 $\delta=0$ であつても背面の土が流出し去らぬ限りは近似的に本式で推定しても大きな差はないと思われる。

### 図-4 b) の記号に従い辺り線を

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_0 + n \eta - (3a_0 + 2n - m)\eta^2 + (2a_0 + n - m)\eta^3 \\ \xi &= x/h, \eta = y/h, \tan \lambda_0 = n, \tan \nu = m \end{aligned} \right\} \dots\dots (5.1)$$

とおくと上、下端の角条件は満たされる。(1.1)で $c, q_0 = 0$ とし、 $\theta$ の代りに $\lambda (= \phi - \theta)$ を用いて積分すると

$$\left. \begin{aligned} p &= r h e^{2\mu\lambda} \int_0^\eta e^{-2\mu\lambda} \frac{\cos(\phi - \lambda)}{\cos \lambda} d\eta \\ \text{ただし } \lambda &= \text{Arc tan}[n - 2(3a_0 + 2n - m)\eta + 3(2a_0 - m + n)\eta^2] \end{aligned} \right\} \dots\dots (5.2)$$

辺り線に働く $p$ の合力の $x, y$ 成分および点0に関するMomentは

$$\left. \begin{aligned} X_p &= -h \int_0^1 p \frac{d\eta}{\cos \lambda} \cos(\phi - \lambda) & Y_p &= -h \int_0^1 p \frac{d\eta}{\cos \lambda} \sin(\phi - \lambda) \\ M_p &= h^2 \int_0^1 p \eta \frac{\cos(\phi - \lambda)}{\cos \lambda} d\eta - h^2 \int_0^1 p \xi \frac{\sin(\phi - \lambda)}{\cos \lambda} d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots (5.3)$$

辺り土塊に働く重力の合成値と点0に関するMomentは

$$W = r h^2 \int_0^1 \xi d\eta \quad M_G = \frac{r h^3}{2} \int_0^1 \xi^2 d\eta \dots\dots (5.4)$$

以上の諸量によつて剛体平衡式を作ると

$$X_p + E \cos \delta = 0, \quad Y_p + W - E \sin \delta = 0, \quad M_p + M_G - Eeh \cos \delta = 0 \dots\dots (5.5)$$

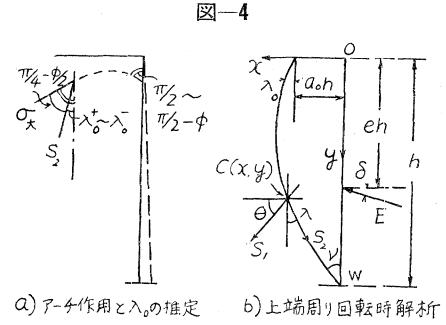
第一、二式より

$$X_p \sin \delta + Y_p \cos \delta + W \cos \delta = 0 \dots\dots (5.6)$$

これは $a_0$ のみを含むから $a_0$ を定める式となる。実際には $a_0$ を適当に仮定して(5.2), (5.3)を数値積分して丁度(5.6)が満足されるように試算を繰り返す。 $a_0$ が判明すれば(5.5)より $e, E$ が知られる。土圧分布を推定するには

$$\sigma_w = b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 \dots\dots (5.7)$$

として下端では $\sigma_w(\eta=1) = p(\eta=1) \times \{\sin^2 \nu + \cos^2(\nu + \phi)\} / \cos \phi$ であることと釣合式



$$\left. \begin{aligned} h \int_0^1 \sigma_w d\eta &= h(b_1/2 + b_2/3 + b_3/4) = -X_p \\ h^2 \int_0^1 \sigma_w \eta d\eta &= h^2(b_1/3 + b_2/4 + b_3/5) = -ehX_p \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (5.8)$$

とから  $b_1, b_2, b_3$  を解けばよい。

表-2

$\phi$	$\lambda_0$	$a_0$	$E/\gamma' h^2$	$e$	$b_1/\gamma h$	$b_2/\gamma h$	$b_3/\gamma h$
$30^\circ$	$\lambda_0^-$	0.2898	0.3466	0.5661	1.2134	- 2.3198	1.4928
	$\lambda_0^+$	0.3741	0.3428	0.5834	1.1138	- 1.9269	1.4264
	Ohde	0.3660	0.3494	0.5172	-	-	-
$40^\circ$	$\lambda_0^+$	0.2378	0.2272	0.5570	0.8766	- 1.8501	1.1680
$40^\circ$	$\lambda_0^-$	0.3092	0.2244	0.5608	0.7702	- 1.5705	0.9044

$\delta=0$  に対し数値計算の結果を表-2 に示した。Ohde の値は  $\phi=31^\circ$  につき行つたものである。本法との比較に関しては次節に述べる。

### 6. 実験結果と考察

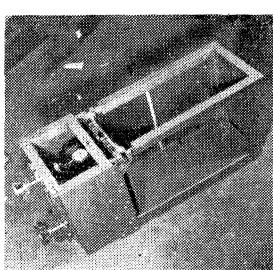
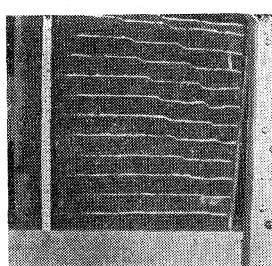
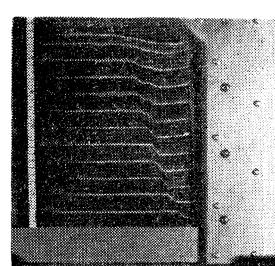
前述の解析結果を検討するため鋼製土圧測定箱(高さ 350×幅 220×長さ 750 mm)を製作した(写真-1)。内部には Ball Bearing 付き回転軸で支えられ上下端周りの回転できる Duralumin 製隔壁を設置し、これに接して上下に摺動可能、かつ前後に微動し得る二個の力計(容量 50 kg)を配して全土圧とその着力点を求める。設計または工作上の欠陥により下端周りの回転に対しては上部転がり部の摩擦が大きく出たため力の測定は上端周りの場合に限るのを余儀なくされた。

用いた試料は粒径が 0.45~1.1 mm にある乾燥砂をゆる詰めの状態にしたもので内部摩擦角は  $34^\circ$ 、密度は  $1.324 \text{ gr/cm}^3$  である。

写真-2 は隔壁に砂を糊付け( $\delta=\phi$ )して下端周りに回転せしめた時の辺り線の状況を示すが、 $\rho_w/\rho_0$  の実測値平均は 1.601 である。表-1 の与える差分値は  $\phi=34^\circ$  に対し内挿により 1.531、また近似解では 1.399 で測定値との差は前者で 4.4%、後者で 16% ある。

5. の条件に従う実験における辺り線の一例は写真-3 に示すごとくで、 $e, E$  の実測値を図-5, 6 に示した。合力は  $\phi=34^\circ$  に対する下端周り回転時の Rankine 土圧  $X_0$  に対する比で表わしてある。表-2 で知るごとく本法によるも Ohde によるも土圧係数の値は余り差はないが  $e$  の方は両方法間に相当な差があり本法の方が実測値に近い値を示している。土圧は静止土圧(係数値は 0.40~0.45)から回転と共に急激に低下し Rankine 土圧値の付近からゆるやかに減少する。これは  $\lambda$  の減少によるものと思われる(表-2 参照)。土圧の測定値は計算値より 10% 程小さいがこれは壁周の摩擦力と  $\phi$  の誤差によるのであろう。図-7 に  $\phi=30^\circ, 40^\circ$  に対する辺り線の計算値を  $\lambda_0^\pm$  に応じて示し a),  $\phi=34^\circ$  に対する内挿計算値と実測値平均を同 b) に示した。なお c) に推定土圧分布を書いてあるがこれは側方支持の矢板土圧の実測結果と定性的に一致すると見られる。なおこの実験的傾向は Terzaghi<sup>2)</sup> の行つた結果とはや一致している。

写真-1 装置全景

写真-2 下端周り回転時の辺り線( $\delta=\phi$ )写真-3 上端周り回転時の辺り線( $\delta=0$ )

### 7. 受働土圧の解析と支持力問題の応用

受働土圧に対する過渡域解析は主働の場合と大差ない。 $\delta=\phi$  の一般受働圧力を計算しておけば壁体を Kurdjumoff 土楔に置き代えることにより Prandtl の支持力問題が容易に扱える。図-8 a) で 2 と異なるのは  $S_i$  の取り方が逆であることと、辺り線曲率が大きいために線型差分解の代りに(1.1)を円弧積分したものを用いね

図-5

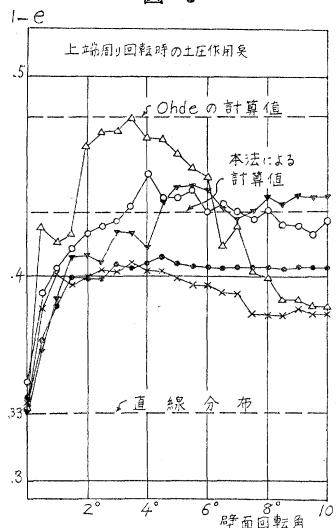


図-6

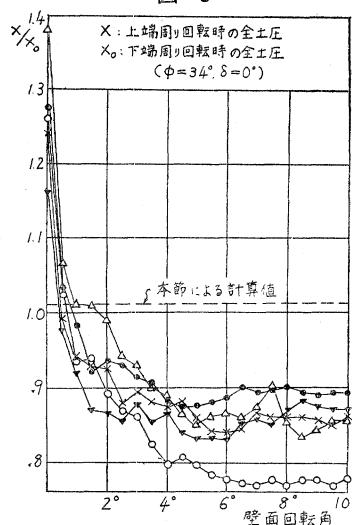


図-7

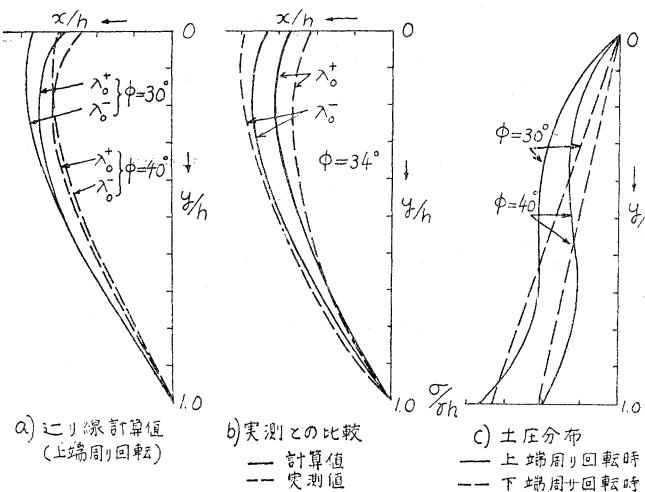
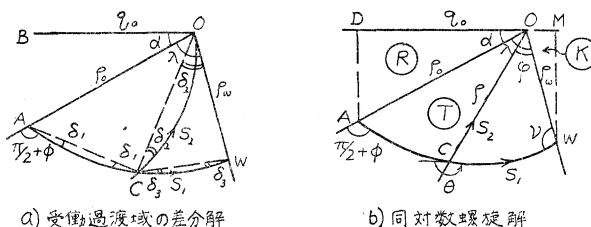


図-8



ばならぬ点である。

(2.4) に対応する  $\vartheta = \theta_c$  を定める式は

$$\begin{aligned}
 & \sin \frac{\vartheta - \theta_A}{2} \cos \left( \phi + \frac{\vartheta - \theta_A}{2} \right) [ (2\mu \cos \vartheta + \sin \vartheta) - e^{2\mu(\theta_w - \vartheta)} (2\mu \cos \theta_w + \sin \theta_w) ] \\
 & = 2 \cos \left( \phi - \lambda + \frac{\theta_w - \theta_A}{2} \right) \sin \frac{\vartheta - \theta_A}{2} \sin \frac{\theta_w - \vartheta}{2} \sin(\alpha + \phi) (1 + 4\mu^2) e^{2\mu(\vartheta - \theta_A)} \\
 & + \sin \frac{\theta_w - \vartheta}{2} \sin \left( \lambda - \frac{\theta_w - \vartheta}{2} \right) [ e^{2\mu(\vartheta - \theta_A)} (2\mu \cos \alpha - \sin \alpha) - \{ 2\mu \sin(\vartheta - \phi) + \cos(\vartheta - \phi) \} ]
 \end{aligned} \quad \left. \right\} \dots (7.1)$$

ただし  $\theta_w = 2\pi - \alpha - \lambda$ ,  $\theta_A = \pi/2 + \phi + \alpha$

また各要素長の幾何学的関係は

$$\left. \begin{aligned} \overline{AC} &= \frac{\rho_0}{K'_1} \cos \frac{\theta_w - \vartheta}{2}, \quad \overline{CO} = \frac{\rho_0}{K'_1} \cos \left( \phi + \frac{\vartheta - \theta_A}{2} \right) \quad K'_1 = \cos \left( \phi - \frac{\pi}{4} \right) \\ \overline{CW} &= \frac{\overline{CO}}{K'_2} \sin \frac{\theta_w - \vartheta}{2}, \quad \rho_w = \frac{\overline{CO}}{K'_2} \cos \phi \quad K'_2 = \cos \left( \phi - \frac{\theta_w - \vartheta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

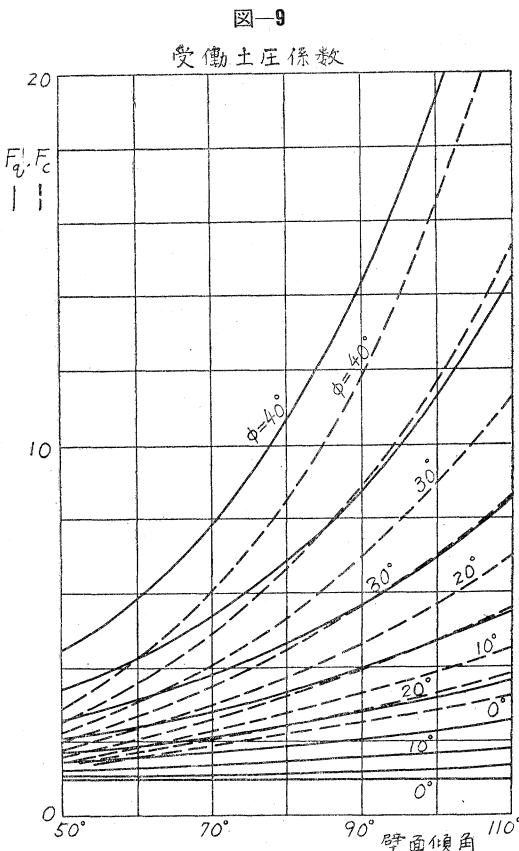
綱目が確定すれば、 $ACW$  を径て円弧積分を繰り返し  $\rho_w$  が得られるので受働土圧係数 ( $F$ ) が求められる。帶状基礎で底面粗度角  $\delta'$  が  $\phi$  に等しければ  $\lambda = \pi/2$  として受働土圧と載荷重の釣合から支持力係数 ( $N$ ) は

$$N_r = \frac{\cot \alpha}{2} \left( \frac{\rho_w}{\rho_w} \operatorname{cosec} \alpha - 1 \right) \quad (7.3)$$

主働の場合と同様  $AW$  を対数螺旋で近似せしめて受働土圧 ( $F^L$ ) や支持力係数 ( $N^L$ ) を求めることができる。ここで得られた  $F_c^L, F_q^L$  は厳密値である(図-9)。これは Moment 釣合式によるものと恒等であるが、4. で触れたように R(T)K の鉛直方向の力の釣合式からもこれら係数を形式的に求めることができる。このように求めた支持力係数  $N_r^L$  は Moment 式によるものの約二倍を示す。これは  $AW$  に沿う  $\rho$  の積分値の過大、換言すればこり線が対数螺旋の仮定では深きに過ぎるためであつて、塑性範囲を  $1/\sqrt{2}$  に縮少すれば二つの釣合式はほぼ一致し正しい値に近いものを示すことが推論できる。これによる修正支持力  $\bar{N}_r^L$  は  $(1/\sqrt{2}) N_r^L \div 0.7 N_r^L$  となる。

表-3 鉛直壁の受働土圧係数とこり尺度表

$\phi$	$F_r$		$\rho_0/\rho_w$		$\vartheta$	
	差分解	対数螺旋	Coulomb	差分解		
10°	1.619	1.686	1.730	.9798	1.142	144°45'
20°	2.910	3.070	3.525	1.148	1.418	152°15'
30°	6.166	6.384	10.09	1.410	1.831	160°50'
40°	14.77	17.44	92.30	1.871	2.591	171°30'



次の表-4 で  $N_r^M$  は Meyerhof<sup>8)</sup> の求めたもの、 $N_r^T$  は Terzaghi の値であり、 $l, B$  は 図-8 b) で  $OD = l$ ,  $OM = B$  と表わされる長さ、 $r_M, r_L$  は Meyerhof, 対数螺旋による値である。表-3 によると Coulomb 値は著しく過大な  $F_r$  を与えるが  $F_r^L$  は差分解と相当よく合致する。これは  $N_r$  についても  $\phi < 45^\circ$  の範囲では同傾向であるが  $\rho_0/\rho_w$  または  $l/B$  に関しては差分解と他の解の間に小さな  $\phi$  に対しても明らかな差が見られることは主働の時と同様である。

表-4 支持力係数とこり線尺度

$\phi$	$N_r$	$N_r^M$	$N_r^T$	$N_r^L$	$\bar{N}_r^L$	$r=l/B$			$\vartheta$
						$r$	$r_M$	$r_L$	
20°	5.357	4.8	4.9	6.949	4.894	1.619	1.7	2.529	151° 9'
30°	22.09	22.9	24.0	30.58	21.40	2.306	3.0	4.295	159°10'
40°	106.6	116	128	165.1	115.60	4.036	4.6	8.013	167°40'
45°	245.4	305	355	351.1	245.8	5.420	8.0	11.62	172°20'
50°	705.1	1455	1800	1502	1051	7.955	12	17.86	177°20'

Meyerhof の実験によると  $\phi = 46^\circ$  の砂について  $r$  の実測値は 4.12 であった。他方表より  $r_M \div 8.2$   $r \div 5.4$  であるのでこの点差分解の方が良い一致を示している。

### 8. 法面崩壊を対象とするが、法面付近の応力状態は全域塑性よりも弾塑性応力状態に近いことが Geratine の模型実験で知られる。法尻の局部塑性化領域と表面近傍の引張りきれつ部より発する進行性崩壊も加わり法面の辺り線を理論的に決めるることはなかなか困難である。Jáky<sup>2)</sup> は円形辺り線を仮定して Kötter 式を積分し法面に生ずる引張り力と圧着力の総和を零とおくことによつて安定数を導いたが Taylor<sup>3)</sup> の Friction Circle 法によるよりも小さく危険側に出ることが指摘されている。法面に現われる表面力は抵抗 Moment を生ずるように働くからこれは当然である。

本論文では円弧の代りに対数螺旋を考え(図-10) Jáky と同様に計算する(細部の計算は省略する) 安定数の最終式は

$$\frac{C}{rH} = \frac{e^{\mu\lambda_0}\{3\mu\cos(\lambda_0+\alpha)+\sin(\lambda_0+\alpha)\}-e^{-2\mu\lambda_0}(3\mu\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\{(1+e^{-2\mu\lambda_0})+\frac{1}{\sin\phi}(1-e^{-2\mu\lambda_0})\}\{e^{\mu\lambda_0}\cos(i-\alpha)-\sin\alpha\}\cos\phi\cdot(1+9\mu^2)}$$

ただし  $\lambda_0=\pi/2-i$      $\alpha=\pi/4+\phi/2$

これに対し前記抵抗 Moment がないとした時の修正安定数を求める

$$\left(\frac{C}{rH}\right)_C = \left(\frac{C}{rH}\right)_Y \left[ 1 + \frac{\mu}{3} \frac{(1+e^{-2\mu\lambda_0})+(1-e^{-2\mu\lambda_0})\{e^{\mu\lambda_0}\cos(i-\alpha)-\sin\alpha\}^2}{\sin\phi\sin^2i(e^{2\mu\lambda_0}-1)} \right] \quad \dots\dots\dots(8.2)$$

となる。円弧に関する Jáky の値  $(C/rH)_Y$  に同様の補正を行うと

$$\left(\frac{C}{rH}\right)_{YC} = \left(\frac{C}{rH}\right)_Y \left[ 1 + \frac{2\sin^2(\pi/4-i/2)\sin^2\frac{i}{2}}{6(\pi/2-i)\sin^2i} \left\{ (1+e^{-2\mu\lambda_0}) + \frac{(1-e^{-2\mu\lambda_0})}{\sin\phi} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots(8.3)$$

表-5 各方法による安定数の値

$i$	90°				75°				60°			
	$\phi$	0	5	10	20	0	5	10	20	0	5	10
$(C/rH)_Y$	—	0.229	0.210	0.175	—	0.172	0.156	0.119	—	0.135	0.116	0.081
$(C/rH)_{YC}$	—	0.229	0.210	0.175	—	0.180	0.164	0.126	—	0.148	0.128	0.091
$(C/rH)_G$	0.250	0.229	0.210	0.175	0.207	0.185	0.170	0.132	0.178	0.151	0.130	0.092
$(C/rH)_T$	0.261	0.239	0.218	0.182	0.219	0.195	0.173	0.135	0.191	0.163	0.139	0.098

これら補正によつて Jáky の安定数または (8.1) が修正され, Taylor 値  $(C/rH)_T$  に近付くのが見られる。Bishop<sup>10)</sup> によれば改良された分割法はより経済的な断面を設計し得るというが,  $r, \phi, C$  などが不均一である法面に対しては Bishop 法が最も推奨し得るものと思われる。均一土質に対してその安定数表示を導くと

$$\left(\frac{C}{rH}\right)_B = \frac{\sum_{n=1}^K h_n [\sin\alpha_n - \sin\phi \sec(\phi - \alpha_n)]}{\sum_{n=1}^K \cos\phi \sec(\phi - \alpha_n)} \quad \dots\dots\dots(8.4)$$

である。ここに  $h_n H$  は  $n$  目分割帶の辺り面上の高さ,  $\alpha_n$  はその線素の勾配角である。 $(C/rH)_B$  は  $(C/rH)_T$  よりやや小さい値を与えるがその差は一般に小さく 1~2% 程度であるようである。

### 9. 結論

本論文で解析実験した結果 Kötter 式の差分解により得られた塑性場の力学的性質は理想的な摩擦性塑性材料に対しては十分な適応性のあることが認められ、また近似的に応用することにより複雑な問題にも相当適用し得ることが判明した。土圧に限れば周知のごとく Coulomb 公式は主働時には各種の条件に対し簡易に良好な値を与えるが主受働を通じては対数螺旋の誤差の方が平均的に小さい。これらの値と差分解との差は受働時において  $\phi > 45^\circ$  程度から大きくなり、支持力係数においては  $\phi > 40^\circ$  位から差が現われる。しかしいずれの場合も辺り線の形については近似解と差分解の間には相当のズレを生じてくることが結論される。

本論文は摩擦性塑性材料の理論的研究の一部であるが東京大学教授最上博士の御懇意な御指導を頂いたことを付記し深く謝意を表し度い。

### 参考文献

- J. Ohde: "Zur Theorie des Erddruckes unter besonderer Berücksichtigung der Erddruckverteilung," Die Bautechnik (1938)
- J. Jáky: "Stability of Earth Slopes," Proc. 1st. I.C.S.M. Vol. II (1936)
- 山口柏樹: "拡張せる Kötter の方程式に関する二、三の考察," 土木学会論文集 第 60 号 (1959)
- 山口柏樹: "摩擦性塑性体の辺り線の幾何学," 土木学会論文集 第 61 号 (1959)
- V. Kármán: Über elastische Grenzzustände," Proc. 2nd C.A.M. (1926)
- 安藤義之輔: "土圧理論," 九大工学部彙報 (1931)
- K. Terzaghi: "A Fundamental Fallacy in Earth Pressure Computations," Boston Soc. of Civil Engr. (1940)
- G.G. Meyerhof: "An Investigation of the Bearing Capacity of Shallow Footings on the dry Sand," Proc. I.C.S.M.F.E. Vol. I (1948)
- D.W. Taylor: "Stability of Earth Slopes," Boston Soc. of Civil Engr. (1937)
- A.W. Bishop: "The Use of Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes," Géotechnique Vol. 5 (1955).  
(昭. 34. 2. 23)

