

測角器械の軸並びに分度円関係誤差について

正員 多 谷 虎 男*

ON THE ERRORS DUE TO INCORRECTNESS OF AXES AND GRADUATED CIRCLE IN THE ANGLE MEASURING INSTRUMENTS

By Dr. Eng., Torao Taya, C.E. Member

Synopsis : The errors due to the incorrectness of axes and graduated circle constitute, together with the errors due to optical parts, the greatest part of the instrumental errors in angle measuring instruments. It is needless to say that the accurate grasp of these errors is indispensable to the execution of precise geodetic surveying. In this paper, following the previous paper, "On the shape of locus of collimation points in the surveying telescopes and observation errors due to them", the author made an exhaustive analytical study about the errors due to incorrectness of axes and graduated circle in the angle measuring instruments, and filled the gap in its present theory. Further, he applied the analytical results to the 1st order theodolite "Wild T 3" and cited the actual observational results concerning the axial and graduated circular errors by using collimators.

要旨 軸並びに分度円関係誤差は望遠鏡部分の光学的誤差と共に測角器械誤差の主要部分を占めるもので、その正確な把握は一等経緯儀などによる高精度の測地的測量において欠くべからざるものであることはいうまでもない。本文は前回の「視点軌跡の曲線形の形状並びにこれに基づく観測差について」に引き続き、測角器械の軸並びに分度円関係誤差について徹底的に解析検討を加えて從来の所論の不備を補足し、かつその結果を一等経緯儀“WildT 3”に適用して軸並びに分度円関係誤差の collimator による実地観測結果について推計論的処理を示したものである。ただし本文では紙数制限の関係上、大綱に支障ない限り所々省略してある。

1. 軸関係誤差

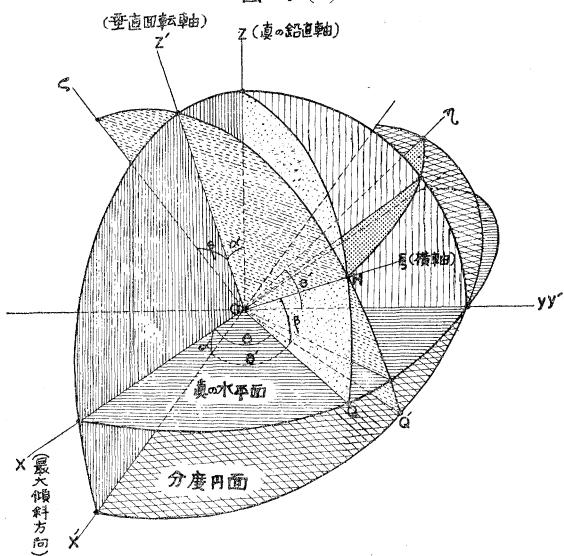
(a) 傾斜軸による水平角誤差

本節においては垂直回転軸（縦軸）と水平分度円面とは垂直なるものと仮定し（垂直でない場合については 2 (a) で述べる）視準軸、横軸、および垂直回転軸、の三軸は一点に会するものとする。（一点に会しない場合については 1 (c) および (d) において考察する）。

今、 α =垂直回転軸の真の鉛直線に対する傾き、
 β =横軸の真の水平面に対する傾き、 γ =視準線の横軸に垂直な方向に対する偏向角、 ϕ' =器械における高度角の読み、 OT =望遠鏡視準線、
 とすれば 図-1 (a), (b) より、 (x', y', z') 座標系と (x, y, z) 座標系との関係から、横軸 OH の (x', y', z') 座標系に対する方向余弦を λ', μ', ν' とすると
 きは、

$$\begin{aligned}\lambda' &= \cos \theta' \cdot \cos \beta, \quad \mu' = \sin \theta' \cdot \cos \beta, \quad \nu' = \sin \beta \\ \text{従つて } OH \text{ の } (x, y, z) \text{ 座標系に対する方向余弦} \\ \lambda, \mu, \nu &\text{ は,} \\ \lambda &= \lambda' \cos \alpha + \nu' \cos(\pi/2 - \alpha) \\ &= \cos \theta' \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \\ \mu &= \mu' = \sin \theta' \cos \beta \\ \nu &= \lambda' \cos(\pi/2 + \alpha) + \nu' \cos \alpha \\ &= -\cos \theta' \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha\end{aligned}\right\} (1)$$

图—1 (a)



* 工学博士，国鉄鉄道技術研究所，主任研究員

次に横軸 OH と垂直回転軸 OZ' を含む平面に垂直な直線 $O\eta$ をとれば $O\eta$ は分度円面 ($x'y'$) 面上にあつて、 OQ' と垂直である。今 OH を ξ 軸、 $O\eta$ を η 軸にとり、直交座標系 (ξ, η, ζ) を考え、視準線 OT の三座標系に対する方向余弦をそれぞれ、

$$\begin{aligned} (x, y, z) \text{ 座標系に対し}, & l, m, n \\ (x', y', z') \text{ 座標系に対し}, & l', m', n' \\ (\xi, \eta, \zeta) \text{ 座標系に対し}, & l'', m'', n'' \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} l'' = \sin \gamma \\ \text{とすれば } m'' = \cos \gamma \cos \phi' \\ n'' = \cos \gamma \sin \phi' \end{aligned} \right\}$$

従つて (ξ, η, ζ) 座標系と (x', y', z') 座標系との関係から、

$$\begin{aligned} l' &= l'' \cos \beta \cos \theta' + m'' \cos(\pi/2 + \theta') + n'' \cos(\pi/2 + \beta) \cos \theta' \\ &= \sin \gamma \cos \beta \cos \theta' - \cos \gamma \cos \phi' \sin \theta' - \cos \gamma \sin \phi' \sin \beta \cos \theta' \\ m' &= l'' \cos \beta \sin \theta' + m'' \cos \theta' + n'' \cos(\pi/2 + \beta) \sin \theta' \\ &= \sin \gamma \cos \beta \sin \theta' + \cos \gamma \cos \phi' \cos \theta' - \cos \gamma \sin \phi' \sin \beta \sin \theta' \\ n' &= l'' \sin \beta + n'' \cos \beta = \sin \gamma \sin \beta + \cos \gamma \sin \phi' \cos \beta \\ \therefore l &= l' \cos \alpha + n' \sin \alpha = \cos \theta' \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \theta' \cos \phi' \cos \alpha \cos \gamma \\ &\quad - \cos \theta' \sin \phi' \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \phi' \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ m &= m' = \sin \theta' \cos \beta \sin \gamma + \cos \theta' \cos \phi' \cos \gamma - \sin \theta' \sin \phi' \sin \beta \cos \gamma \\ n &= -l' \sin \alpha + n' \cos \alpha = -\cos \theta' \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \theta' \cos \phi' \sin \alpha \cos \gamma \\ &\quad + \cos \theta' \sin \phi' \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \phi' \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} l = l' \cos \alpha + n' \sin \alpha \\ m = m' \\ n = n' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

一方、 OT が真水平面となす角を ϕ_0 、 OT の真水平面への射影が一定直線 Oy となす角を θ_0 とすれば、(2) 式から次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} l &= -\sin \theta_0 \cos \phi_0 = \cos \theta' \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \theta' \cos \phi' \cos \alpha \cos \gamma \\ &\quad - \cos \theta' \sin \phi' \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \phi' \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ m &= \cos \theta_0 \cos \phi_0 = \sin \theta' \cos \beta \sin \gamma + \cos \theta' \cos \phi' \cos \gamma - \sin \theta' \sin \phi' \sin \beta \cos \gamma \\ n &= \sin \phi_0 = -\cos \theta' \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \theta' \cos \phi' \sin \alpha \cos \gamma + \cos \theta' \sin \phi' \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ &\quad + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \phi' \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

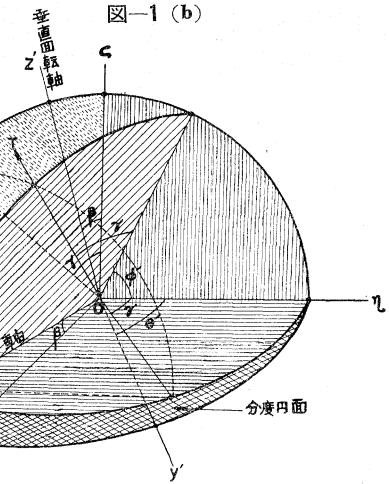
ここに、一般に $\theta_0 \neq \theta$ である。さて α, β, γ は微小量であるから、上記の l, m, n の式において α, β, γ の三角関数を無限級数に展開し、二次以下の微小量をまとめてそれぞれ A_1, A_2, A_3 として表わせば、

$$\begin{aligned} l &= \gamma \cos \theta' - \sin \theta' \cos \phi' - \beta \cos \theta' \sin \phi' + \alpha \sin \phi' + A_1 \\ m &= \gamma \sin \theta' + \cos \theta' \cos \phi' - \beta \sin \theta' \sin \phi' + A_2 \\ n &= \alpha \sin \theta' \cos \phi' + \sin \phi' + A_3 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \tan \theta_0 &= \frac{\sin \theta' \cos \phi' - \alpha \sin \phi' + \beta \cos \theta' \sin \phi' - \gamma \cos \theta' - A_1}{\cos \theta' \cos \phi' - \beta \sin \theta' \sin \phi' + \gamma \sin \theta' + A_2} \\ \tan \theta' - \tan \theta_0 &= \frac{\alpha \cos \theta' \sin \phi' - \beta \sin \phi' + \gamma + A_1 \cos \theta' + A_2 \sin \theta'}{\cos \theta' (\cos \theta' \cos \phi' - \beta \sin \theta' \sin \phi' + \gamma \sin \theta' + A_2)} \\ \frac{\sin(\theta' - \theta_0)}{\cos \theta_0} &= \frac{\alpha \cos \theta' \sin \phi' - \beta \sin \phi' + \gamma + A_1 \cos \theta' + A_2 \sin \theta'}{\cos \theta_0 \cos \phi_0} \\ \therefore \sin(\theta' - \theta_0) &= \frac{1}{\cos \phi_0} (\alpha \cos \theta' \sin \phi' - \beta \sin \phi' + \gamma + A_1 \cos \theta' + A_2 \sin \theta') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

実際上一般に $\phi_0 = -45^\circ \sim 45^\circ$ または $135^\circ \sim 225^\circ$ であるから、二次以上の微小量を無視すれば、

$$\theta' - \theta_0 = \alpha \cos \theta' \tan \phi' - \beta \tan \phi' + \gamma \sec \phi'$$

今、横軸 OH が xoz 面内にあつて、視準線 OT が Hoy 面上にある場合を OT の始原位置として、この始原視準線と一般の場合の OT との間の真水平角を、これに対する水平分度円上の読み角度から差引いた量を $\Delta\theta$ と



すれば、 $\Delta\theta$ はすなわち水平測角誤差であつて、

$$\Delta\theta \equiv \theta' - (\theta_0 + r) = \alpha \cos \theta' \tan \phi' - \beta \tan \phi' + r(\sec \phi' - 1) \dots \dots \dots \quad (4)$$

(4) 式の第一項 $\alpha \cos \theta' \tan \phi'$ は望遠鏡 r, l によつて変化しないが、第二項 $\beta \tan \phi'$ よび第三項 $r(\sec \phi' - 1)$ は望遠鏡 r, l によつて符号相反する。ゆえに望遠鏡 r, l の両位で観測してその平均をとれば、第二項および第三項の誤差は消去できる。

(b) 傾斜軸による高度角誤差

前節の式(3)の第三式から $\sin \phi_0 - \sin \phi' = \alpha \sin \theta' \cos \phi' + I_3$ を得る。上式から更に高度測角における誤差 $d\phi$ として次式が得られる。(中間省略)。

$$\Delta\phi \equiv \phi' - \phi_0 = -\alpha \sin \theta' \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

ここに, ϕ_0 : 視準線 OT が真の水平面となす角, α, θ', ϕ' : (4) 式に於けるものと同じ, とする。

(c) 非共点軸による水平測角誤差

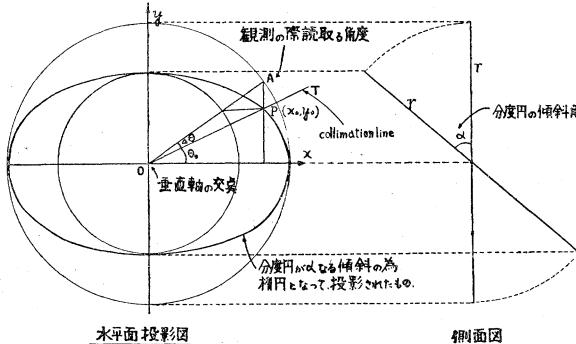
(d) 非共点軸による高度測角誤差

以上の二項目の誤差は特殊の器械（例えば Bamberg 二等セオドライト等）を除けば通常ほとんど考慮する必要がないから本稿においては省略することとする。

2. 分度円関係誤差

(a) 分度円の傾斜による誤差

図-2



記号を 図-2 のように定めれば次式が成立する。

$$\tan \theta_0 = \frac{y_0}{x_0} = \frac{r \cos \alpha \sin(\theta_0 + \Delta\theta)}{r \cos(\theta_0 + \Delta\theta)} = \cos \alpha \tan(\theta_0 + \Delta\theta)$$

$$\text{上式から } \tan A\theta = \frac{\cos(\theta_0 + A\theta)}{\cos(A\theta)} \sin \theta_0 (\sec \alpha - 1)$$

$$\therefore \sin A\theta = \frac{\sec \alpha - 1}{\sec \alpha + 1} \cdot \sin(2\theta_0 + A\theta) = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin(2\theta_0 + A\theta)$$

上式の右辺を級数に展開して

$$\Delta\theta = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \left\{ \sin 2\theta_0 + \cos 2\theta_0 \cdot \Delta\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \cdot (\Delta\theta)^2 + \dots \right\} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot \sin 2\theta_0 \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

(b) 分度円の橢円変形による誤差

分度円が離心率 ε の橜円形に変形している場合には、前節における諸式に $\sin \alpha = \varepsilon$ と置けば $(\because \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a})$
 $= \sin \alpha$ 誤差を表わす式がこの場合にもそのまま成り立つ。従つて

$$\Delta\theta = \varepsilon^2 / 4 \sin 2\theta_0 \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

橢円の長半径と短半径との差を $4r$ とすれば

$$\Delta r = r - r \cos \alpha = r(2 \sin^2 \alpha / 2)$$

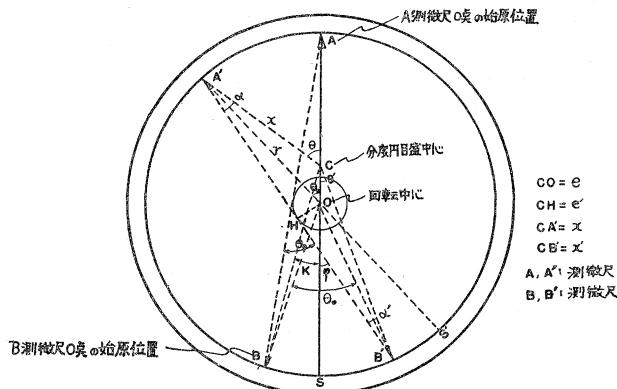
(c) 偏心誤差

ここに偏心誤差といふのは、分度円目盛の彫刻中心と回転機構中心とが一致していないことによる誤差を意味する。従つて非共点軸誤差(1. (e) および (d))とは考へている対象を全然異にすることに注意する必要がある。

る。

本節においては望遠鏡筒軸は分度円の回転中心軸と相交るものとして考えることにする。(筒軸が回転中心軸から外れている場合については 1, (c)~(d) 参照)。

図-3



分度円の輪郭内を回転する回転円の半径を r とし、 A, B 両側微尺の始原位置を 図-3 のごとく取れば、

$$\theta = \varphi + \alpha, \text{ また } \frac{\sin \varphi}{x} = \frac{\sin \alpha}{e + e' \operatorname{cosec} \varphi} \quad \text{しかるに} \quad x^2 = r^2 \left(1 + \frac{e^2}{r^2} - 2 \frac{e}{r} \cos \theta_0 \right)$$

$$\therefore \frac{e}{x} = \frac{e}{r} \left(1 + \frac{e^2}{r^2} - 2 \frac{e}{r} \cos \theta_0 \right)^{-1/2} = \frac{e}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{r^2} - 2 \frac{e}{r} \cos \theta_0 \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{e^2}{r^2} - 2 \frac{e}{r} \cos \theta_0 \right)^2 - \dots \dots \right\}$$

従つて 2 次以上の微小量を省略すれば、 $e/x \approx e/r$

$$\text{同様に, } \frac{e'}{x} = \frac{e'}{r} \left(1 + \frac{e^2}{r^2} - 2 \frac{e}{r} \cos \theta_0 \right)^{-1/2} \approx \frac{e'}{r} \quad \text{ゆえに,} \quad \sin \alpha = \frac{e}{r} \sin \varphi + \frac{e'}{r}$$

$$\therefore \alpha \approx \frac{e}{r} \sin \varphi + \frac{e'}{r} \dots \dots \quad (9) \quad \therefore \theta = \varphi + \frac{e}{r} \sin \varphi + \frac{e'}{r}$$

$$\theta - \theta_0 \equiv \Delta \theta \text{ と置けば,} \quad \Delta \theta = (\varphi - \theta_0) + (e/r) \sin \varphi + e'/r \dots \dots \dots \quad (10)$$

$$\text{同様に} \quad \theta' = \varphi - \alpha', \quad \alpha' \approx (e/r) \sin \varphi + e'/r \quad \Delta \theta' \equiv \theta' - \theta_0 = (\varphi - \theta_0) - \{ (e/r) \sin \varphi + e'/r \} \dots \dots \dots \quad (11)$$

今 A', B' における読みの平均を取れば $1/2\{(\theta + \beta) + (\pi + \theta' + \beta)\}$ を得る。ただし β は分度円上の零点からの A の位置角すなわち A の円周目盛上における読みとする。ゆえに A', B' に於ける始原状態から測つた読みの平均に関する誤差は、

$$1/2\{(\theta + \beta) + (\pi + \theta' + \beta) - \beta - (\pi + \theta - K)\} - 1/2(2\theta_0) = 1/2(\Delta \theta + \Delta \theta' + K) = (\varphi - \theta_0) + 1/2K \dots \dots \dots \quad (12)$$

しかるに $(\varphi - \theta_0)$ は一定であるから上式の値は θ_0 の変化に関せず常に一定でなければならない。しかも始原状態においてはこの誤差は 0 であつたはずである。従つて (12) 式の値は θ_0 の変化に関らず常に 0 でなければならない。従つて次の結論を得る。

“二つの測微尺の始原状態からの読みの平均に関する偏心誤差は 0 である”。

Wild Theodolite では常に両測微尺の目盛をプリズム装置によつて合致させて読み取るのであるから、その一回ごとの読みはそのままでただちに両測微尺の読みの平均を取つたことになつてゐる。次に両測微尺 A', B' の読みの差を d とすれば (このような操作は Wild Theodolite では出来ないが Bamberg type の Theodolite では実行できる)

$$d \equiv (\theta' + \pi + \beta) - (\theta + \beta) = (\theta' - \theta) + \pi = \Delta \theta' - \Delta \theta + \pi = -2\{(e/r) \sin \varphi + e'/r\} + \pi \dots \dots \dots \quad (13)$$

d は両測微尺 A', B' の読みの差であるから、分度円周目盛の種々の位置において、望遠鏡の光学的誤差とは無関係に実験的にその値を測観することができる。この観測値の sine curve からその振幅および常数項として偏心率 e/r および e'/r を知ることが出来る。

(d) 分度円誤差の一般的表現

目盛間隔の不等にもとづく誤差は一般に不規則な誤差であるが分度円関係誤差のうち、(a)~(c) にあげた分度円誤差は $180^\circ, 360^\circ$ を周期とする周期誤差であつた。分度円関係誤差は前記の (a)~(c) の外にもこれらを更に複雑にした誤差が考えられる。例えば (b) の橿円変形の代りに “むすび型変形” を考えるときがそれである。しかしながらいざれにしても分度円関係誤差は周期誤差であるから、これらを一括して比較的小数項の

Fourier 級数を以て表わすことができる。すなわち、

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cos i \theta_0 + \sum_{i=1}^m b_i \sin i \theta_0$$

今読みの上での二方向 θ および θ' の間の夾角を ζ 、その誤差を $\Delta\zeta$ とし、観測値はそのまま、真値には添字 “0” を付して区別すると、 $\zeta = \theta' - \theta = (\theta'_0 + \Delta\theta') - (\theta_0 + \Delta\theta) = (\theta'_0 - \theta_0) + (\Delta\theta' - \Delta\theta) = \zeta_0 + (\Delta\theta' - \Delta\theta)$

しかるに、 $\zeta = \zeta_0 + \Delta\zeta$ であるから $\Delta\zeta = \Delta\theta' - \Delta\theta$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta\zeta &= \sum_{i=1}^m a_i (\cos i \theta'_0 - \cos i \theta_0) + \sum_{i=1}^m b_i (\sin i \theta'_0 - \sin i \theta_0) \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{i \zeta_0}{2} \left(-a_i \sin \frac{(i \theta'_0 + \theta_0)}{2} + b_i \cos \frac{(i \theta'_0 + \theta_0)}{2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

ゆえに a_i, b_i が既知ならば上式から角観測の誤差を知ることができる。今 $i=1$ なる場合には (14) 式は次のようになる。

$$\Delta\zeta = 2 \sin \frac{\zeta_0}{2} \left(-a_1 \sin \frac{\theta'_0 + \theta_0}{2} + b_1 \cos \frac{\theta'_0 + \theta_0}{2} \right) = 2 c_1 \sin \frac{\zeta_0}{2} \cos \left(\frac{\theta'_0 + \theta_0}{2} + \delta_1 \right) \quad (15)$$

ただし、 $c_1^2 \equiv a_1^2 + b_1^2$, $c_1 \sin \delta_1 \equiv a_1$, $c_1 \cos \delta_1 \equiv b_1$ とする。

$\frac{\theta'_0 + \theta_0}{2} = \frac{\zeta_0}{2} + \theta_0$ なるゆえ、 ζ_0 を一定として θ_0 を変化させれば $\theta_0 \pm 2n\pi$ に対して、 $\Delta\zeta$ は同じ値をとり、 $\theta_0 \pm (2n+1)\pi$ に対しては $\Delta\zeta$ は前の場合と相反する符号を取る。従つて π だけ離れた二カ所の読みの平均を取れば、この誤差は消失する。偏心誤差はこの場合に相当する。更に $i=2$ なる場合には

$$\Delta\zeta = 2 \sin \zeta_0 \{ -a_2 \sin(\theta'_0 + \theta_0) + b_2 \cos(\theta'_0 + \theta_0) \} = 2 c_2 \sin \zeta_0 \cos(\theta'_0 + \theta_0 + \delta_2) \quad (16)$$

ただし $c_2^2 \equiv a_2^2 + b_2^2$, $c_2 \sin \delta_2 \equiv a_2$, $c_2 \cos \delta_2 \equiv b_2$ とする。また $i=3$ なる場合には

$$\Delta\zeta = 2 \sin \frac{3}{2} \zeta_0 \left\{ -a_3 \sin \frac{3(\theta'_0 + \theta_0)}{2} + b_3 \cos \frac{3(\theta'_0 + \theta_0)}{2} \right\} = 2 c_3 \sin \frac{3}{2} \zeta_0 \cos \left\{ \frac{3}{2} (\theta'_0 + \theta_0) + \delta_3 \right\} \quad (17)$$

ただし $c_3^2 \equiv a_3^2 + b_3^2$, $c_3 \sin \delta_3 \equiv a_3$, $c_3 \cos \delta_3 \equiv b_3$ とする。一般に $i=m$ なる場合には

$$\begin{aligned} \Delta\zeta &= 2 \sin \frac{m}{2} \zeta_0 \left\{ -a_m \sin \frac{m(\theta'_0 + \theta_0)}{2} + b_m \cos \frac{m(\theta'_0 + \theta_0)}{2} \right\} \\ &= 2 c_m \sin \frac{m}{2} \zeta_0 \cos \left\{ \frac{m}{2} (\theta'_0 + \theta_0) + \delta_m \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

ただし $c_m^2 \equiv a_m^2 + b_m^2$, $c_m \sin \delta_m \equiv a_m$, $c_m \cos \delta_m \equiv b_m$ とする。

このとき $\frac{m}{2} (\theta'_0 + \theta_0) = \frac{m}{2} \zeta_0 + m \theta_0$ であるから、 ζ_0 を一定として θ_0 を変化させれば、 $\theta_0 \pm \frac{2n\pi}{m}$ に対して $\Delta\zeta$ は同じ値をとり $\theta_0 \pm \frac{(2n+1)\pi}{m}$ に対しては $\Delta\zeta$ は前の場合と相反する符号をとる。さて $i=1, 2, \dots, m$ なる場合がすべて同時に連合している場合の誤差は (14) および (18) 式から、

$$\Delta\zeta = 2 \sum_{i=1}^m c_i \sin \frac{i \zeta_0}{2} \cos \left\{ \frac{i}{2} (\theta'_0 + \theta_0) + \delta_i \right\} = 2 \sum_{i=1}^m c_i \sin \frac{i \zeta_0}{2} \cos \left(i \theta_0 + \frac{i}{2} \zeta_0 + \delta_i \right) \quad (19)$$

ゆえに ζ_0 を一定として θ_0 を変化せしめ（分度円の種々の位置で実際に夾角 ζ_0 なる二定点を観測する）分度円目盛の π だけ離れた位置において観測を行えば、そのときの誤差は

$$\Delta\zeta = 2 \sum_{i=1}^m c_i \sin \frac{i \zeta_0}{2} \cos \left(i \theta_0 + i \pi + \frac{i}{2} \zeta_0 + \delta_i \right) \quad (20)$$

(19) 式と (20) 式とを比較するに、奇数番目の調和項は符号互に相反し、偶数番目の調和項は互に相等しい。ゆえに分度円目盛の π だけ離れた二カ所で夾角を読み取り、その平均値を以て一回の角観測値と見なせば、奇数番目の調和項による誤差はすべて消失し、偶数番目の調和項による誤差のみそのまま残ることになる。すなわち

$$\Delta\zeta = 2 \sum_{j=1}^p c_{2j} \sin j \zeta_0 \cos(2j \theta_0 + j \zeta_0 + \delta_{2j}) \quad (21)$$

次にこのような π だけ離れた二カ所（正確に π だけ離れた二カ所でなくとも A, B 両測微尺の位置であればよい。前記 (c) 参照のこと）での読みの平均たる角度観測を、更に分度円の π/n だけの等分点位置において (n : 整数とする) 観測を行いそれら全部の相加平均をとれば、(21) 式から、

$$\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0 = \sum_{j=1}^p \alpha_j \cos(2j \theta_0 + \beta_j) \quad (\text{ここに } \alpha_j = 2 c_{2j} \sin j \zeta_0, \beta_j = j \zeta_0 + \delta_{2j}, \text{ とし、簡単のために } \theta_0 \text{ を } \theta \text{ と書くことにした。})$$

ゆえに全部の相加平均値は、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \zeta_i - \zeta_0 = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \alpha_j \cos(2j \theta_i + \beta_j) \right\} \frac{1}{n} \quad \text{すなわち,} \quad \Delta\zeta = \sum_{j=1}^p \alpha_j \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \cos \left(2j \frac{i \pi}{n} + \beta_j \right) \right\} \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{j=1}^p \alpha_j \left\{ \frac{\cos\left(\beta_j + \frac{n-1}{n}j\pi\right) \sin(j\pi)}{n \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)} \right\} \quad \dots \dots \dots (22)$$

ただし、 $\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) \neq 0$ とする。

(22) 式において j が n の倍数でないときは、 $\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) \neq 0$ 、分子 = 0 であるから、(22) 式 = 0、すなわち j が n の倍数でないような調和項はすべて消失する。

(e) 分度円誤差の一般的表現に対する調和解析

前節においては分度円の機械的定誤差のみについて論じたのであるが、実際の場合にはこれになお、観測に起因する偶然誤差がつけ加つてくるので、これらの未知常数の個数の連立方程式を立てるに必要な観測値だけから常数値を求めたのでは十分ではない。すなわち調和解析を行うにも推計論を適用しなければならない。以下本節では Wild T 2, T 3 を対象としてその分度円誤差を考えることにする。

写真-1

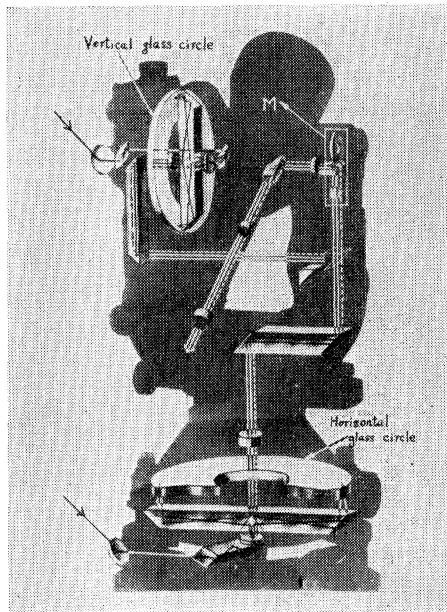


写真-2

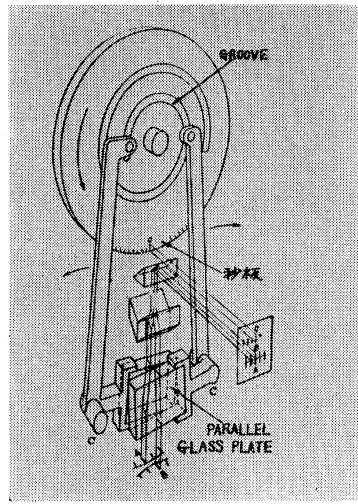


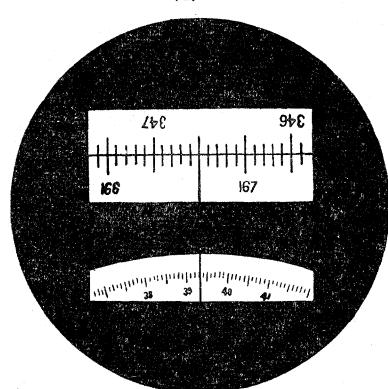
写真-1 および 2 はそれぞれ Wild T 3 の分度円目盛照明光路および秒板マイクロメーター装置の機構を示す。写真-2 の秒板マイクロメーター装置は写真-1 の M の部分を拡大図化したもので、マイクロメーター、ノップを回すときは写真-2 でヒンジ C を中心として腕棒が矢印の方向に回転するが、この際、腕棒の端は秒内の螺旋形のグループに導かれながら C を中心として移動する。従つて二枚の平行平面硝子板は互に反対方向に相接しながら回転し、その回転角に応じて分度円目盛 A, B の像をズらせて合致させるわけである。

(i) 常数の最尤推定値 今基準線の、分度円 0 点からの読みすなわち基準線の位置角を β とし、分度円 0 点から第 1 の視準方向までの読み平均（秒位を A, B 測微尺の平均による）を $\bar{\theta}$ とすれば、(21) 式に於て常数値をそのままとする限り $\theta_0 = \bar{\theta}$ とするもこれによる誤差は少くとも二次以上の微小量である。従つて (21) 式は次のように書くことができる。

$$\zeta - \zeta_0 = 2 \sum_{j=1}^p c_{2j} \sin j \zeta_0 \cos(2j\bar{\theta} - 2j\beta + j\zeta_0 + \delta_{2j}) \quad \dots \dots \dots (23)$$

$$(23) \text{ 式において, } 2c_{2j} \sin j \zeta_0 = \alpha_j, j \zeta_0 + \delta_{2j} - 2j\beta = k_j, \dots \dots \dots (24)$$

図-4



と置けば、 $\zeta - \zeta_0 = \sum_{j=1}^p \alpha_j \cos(2j\bar{\theta} + k_j) = \alpha_1 \cos(2\bar{\theta} + k_1) + \alpha_2 \cos(4\bar{\theta} + k_2) + \alpha_3 \cos(6\bar{\theta} + k_3) + \dots$

$$\begin{aligned} \text{上式を変形して, } \zeta - \zeta_0 &= \sum_{j=1}^p \alpha_j (\cos 2j\bar{\theta} \cos k_j - \sin 2j\bar{\theta} \sin k_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \cos k_j \cos 2j\bar{\theta} - \sum_{j=1}^p \alpha_j \sin k_j \sin 2j\bar{\theta} \end{aligned}$$

$$= (A_1 \cos 2\hat{\theta} + A_2 \cos 4\hat{\theta} + A_3 \cos 6\hat{\theta} + \dots)$$

(27) 式は ζ_0, A_j, B_j を未知常数とし θ を変数とする関数 ζ の式であると考えることができる。しこうして θ および ζ を観測するのであるが観測値には観測に伴う偶然誤差がつけ加わるので、個々の観測値をこれらと区別して表わすこととし、 θ (以後簡単のために $\bar{\theta}$ を単に θ と書くこととし、 i 番目の分度円位置におけるものを表わすときは θ_i と書くことにする) および ζ の観測値をそれぞれ θ, Z で表わすことにする。すなわち θ は第1の方向に対する二つの測微尺の読みの平均の観測値、 Z は両測微尺の読みの平均による一定夾角の観測値である。実際問題として(27)式において第何項迄取れば十分かということが問題であるが、考え得る原因の数から考えて通常、第3調和項迄取れば十分であるといえる [(27) 式において第3調和項迄 (\sin, \cos それぞれ第3調和項まで) 取るということは (19) 式において第6調和項まで取つたことになる]。従つて決定すべき常数は通常、 $A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; \zeta_0$ の7つである。これらの常数を決定するため 180° を n 等分した分度円位置において collimator による観測を実施し θ_i を $N(\theta_i, \sigma^2 \theta_i)$ なる正規分布に従う偶然量の1実現値、 Z_i を $N(\zeta_i, \sigma^2 \zeta_i)$ なる正規分布に従う偶然量の1実現値と考える。すなわち、通常の場合のように y 方向だけに誤差を伴うのではなく、Deming の新しい最小自乗法のように x 方向にも誤差を伴うと考えるのである。また今の場合 $N(\theta_i, \sigma^2 \theta_i)$ と $N(\zeta_i, \sigma^2 \zeta_i)$ とは互いに独立な分布ではないから最小自乗法をそのまま適用するわけには行かない。従つてまず θ_i, Z_i の同時分布の式を誘導し、最小自乗法の源たる最尤法を適用する。このためまず最初に誤差の構成を次のように細かく分けて考えることから出発する。

一回の観測における視準誤差（十字線と目標点との合致識別における偶然誤差）； ϵ_s ， 読定値におけるマイクロメーター合致識別誤差； ϵ_c ， 読定値における目盛不同に基く誤差； ϵ_K ， 垂直軸の傾きによる誤差（**1 (a)** で述べたように望遠鏡 r, l によつては不变である）； K_1 ， 横軸の傾きおよび視準線の偏向による誤差（望遠鏡 r, l 両位の観測値について符号相反する）； K_2

今、 Z_r, Z_l を同一分度円位置における望遠鏡 r 、または l の夾角観測値、 α, β を真の読み角（角度中心は分度円目盛中心とする）とし、一方向について 2 回づつの観測を行いその平均を取るものとすれば

$$Z_r = - \left(\alpha + \frac{\varepsilon_{s\alpha}^{(1)} + \varepsilon_{c\alpha}^{(1)} + \varepsilon_{s\alpha}^{(2)} + \varepsilon_{c\alpha}^{(2)}}{2} + \varepsilon_{K\alpha} \right) + \left(\beta + \frac{\varepsilon_{s\beta}^{(1)} + \varepsilon_{c\beta}^{(1)} + \varepsilon_{s\beta}^{(2)} + \varepsilon_{c\beta}^{(2)}}{2} + \varepsilon_{K\beta} \right) + K_1 + K_2$$

$$Z_l = - \left(\alpha + \frac{\varepsilon_s \alpha + \varepsilon_c \alpha + \varepsilon_{sc} \alpha + \varepsilon_{cc} \alpha}{2} + \varepsilon_K \alpha \right) + \left(\beta + \frac{\varepsilon_s \beta + \varepsilon_c \beta + \varepsilon_{sc} \beta + \varepsilon_{cc} \beta}{2} + \varepsilon_K \beta \right) + K_1 - K_2$$

$$d = Z_r - Z_l = (-\varepsilon_\alpha + \varepsilon_{\alpha'} + \varepsilon_\beta - \varepsilon_{\beta'}) + 2K,$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= 1/2 (\varepsilon_{s\alpha}^{(1)} + \varepsilon_{c\alpha}^{(1)} + \varepsilon_{s\alpha}^{(2)} + \varepsilon_{c\alpha}^{(2)}) \\ \varepsilon_{\beta} &= 1/2 (\varepsilon_{s\beta}^{(1)} + \varepsilon_{c\beta}^{(1)} + \varepsilon_{s\beta}^{(2)} + \varepsilon_{c\beta}^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad \text{とする。}$$

$\varepsilon_s, \varepsilon_c$ は独立に正規分布に従う変数であるとすれば、 ε_{α} もまた正規分布に従う変数である。ゆえに ε_{α} の分散を μ^2 とすれば、 ε_{α} の分布は $N(0, \mu^2)$ である。同様に $\varepsilon_{\alpha}', \varepsilon_{\beta}, \varepsilon_{\beta}'$ の分布もすべて $N(0, \mu^2)$ である。従つて d は $N(2K_2, 4\mu^2)$ なる正規分布をするものでなければならない。 μ^2 の不偏推定値を $\hat{\mu}^2$ とすれば、

$$\hat{\mu^2} = \frac{1}{4(n-1)} \sum_{d=1}^n \left(d - \frac{[d]}{n} \right)^2 = \frac{1}{4(n-1)} \left\{ [d^2] - \frac{[d]^2}{n} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{次}\nexists\in Z_i &= \frac{Z_{ri} + Z_{ti}}{2} = (-\alpha + \beta) + \frac{-\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'} + \varepsilon_\beta + \varepsilon_{\beta'}}{2} - \varepsilon_K \alpha + \varepsilon_K \beta + K_1 \\ &= \zeta_i - \varepsilon_K \alpha + \varepsilon_K \beta + \frac{-\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'} + \varepsilon_\beta + \varepsilon_{\beta'}}{2} \end{aligned}$$

$$\Theta_i = \alpha + \varepsilon_K \alpha + \varepsilon_{C_0} \alpha = \theta_i + \varepsilon_K \alpha + \varepsilon_{C_0} \alpha$$

ただし、 ε_{c0} は分度円廻転ノップによる分度円目盛合致誤差を表わすものとし ε_c と区別する（一般に ε_{c0} は

ϵ_c よりも大きな分散を有する)。 $\epsilon_{c_0}, \epsilon_K$ の分布をそれぞれ $N(0, c_0^2)$ および $N(0, \kappa^2)$ とすれば、 $\epsilon_{K\alpha} = \text{一定}$ なるときの θ_i および Z_i の分布はそれぞれ $N(\theta_i + \epsilon_{K\alpha}, c_0^2)$ および $N(\zeta_i - \epsilon_{K\alpha}, \mu^2 + \kappa^2)$ である。ゆえに $\epsilon_{K\alpha}, \theta_i, Z_i$ の同時分布 ($i = \text{一定}$) は、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\kappa} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\epsilon_{K\alpha}^2}{\kappa^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}c_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\theta_i - \theta_i - \epsilon_{K\alpha})^2}{c_0^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\mu^2 + \kappa^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(Z_i - \zeta_i + \epsilon_{K\alpha})^2}{\mu^2 + \kappa^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa c_0 \sqrt{2\pi(\mu^2 + \kappa^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_{K\alpha}^2}{\kappa^2} + \frac{(\theta_i - \theta_i - \epsilon_{K\alpha})^2}{c_0^2} + \frac{(Z_i - \zeta_i + \epsilon_{K\alpha})^2}{\mu^2 + \kappa^2}\right)\right]$$

ゆえに θ_i, Z_i の同時分布は $\frac{1}{2\pi\kappa c_0 \sqrt{2\pi(\mu^2 + \kappa^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{(\theta_i - \theta_i - x)^2}{c_0^2} + \frac{(Z_i - \zeta_i + x)^2}{\mu^2 + \kappa^2}\right)\right] dx$

$\theta_i - \theta_i \equiv V_{\theta i}, Z_i - \zeta_i \equiv V_{\zeta i}$ とすれば

$$\text{上式} = \frac{1}{2\pi\kappa c_0 \sqrt{2\pi(\mu^2 + \kappa^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{(V_{\theta i} - x)^2}{c_0^2} + \frac{(V_{\zeta i} + x)^2}{\mu^2 + \kappa^2}\right)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa c_0 \sqrt{2\pi(\mu^2 + \kappa^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{\mu^2 + \kappa^2}\right)x^2 + 2\left(\frac{V_{\zeta i}}{\mu^2 + \kappa^2} - \frac{V_{\theta i}}{c_0^2}\right)x + \frac{V_{\theta i}^2}{c_0^2} + \frac{V_{\zeta i}^2}{\mu^2 + \kappa^2}\right)\right] dx$$

ここにおいて、 $\frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{\mu^2 + \kappa^2} = p$ $\frac{V_{\zeta i}}{\mu^2 + \kappa^2} - \frac{V_{\theta i}}{c_0^2} = q$ $\frac{V_{\zeta i}^2}{\mu^2 + \kappa^2} + \frac{V_{\theta i}^2}{c_0^2} = r$ とおいて簡単にすれば、

$$\text{上式} = \frac{1}{2\pi\kappa c_0 \sqrt{2\pi(\mu^2 + \kappa^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(px^2 + 2qx + r)\right] dx = \frac{1}{2\pi\kappa c_0 \sqrt{2\pi(\mu^2 + \kappa^2)}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(r - \frac{q^2}{p}\right)\right\} \cdot$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{p}{2}\left(x + \frac{q}{p}\right)^2\right\} dx = \frac{1}{2\pi\kappa c_0 \sqrt{2\pi(\mu^2 + \kappa^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2p}\left(\left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{\mu^2 + \kappa^2}\right) \cdot \left(\frac{V_{\zeta i}^2}{\mu^2 + \kappa^2} + \frac{V_{\theta i}^2}{c_0^2}\right) - \left(\frac{V_{\zeta i}}{\mu^2 + \kappa^2} - \frac{V_{\theta i}}{c_0^2}\right)^2\right)\right\} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(c_0^2 + \kappa^2)(\mu^2 + \kappa^2) + \kappa^2 c_0^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\left\{1 - \frac{\kappa^4}{(c_0^2 + \kappa^2)(\mu^2 + 2\kappa^2)}\right\}}\right].$$

$$\times \left\{ \frac{V_{\zeta i}^2}{(\mu^2 + 2\kappa^2)} + \frac{V_{\theta i}^2}{(c_0^2 + \kappa^2)} + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{(c_0^2 + \kappa^2)(\mu^2 + 2\kappa^2)}} \cdot \frac{V_{\theta i} V_{\zeta i}}{\sqrt{(c_0^2 + \kappa^2)(\mu^2 + 2\kappa^2)}} \right\}$$

ゆえに、 $\frac{-\kappa^2}{\sqrt{(c_0^2 + \kappa^2)(\mu^2 + 2\kappa^2)}} = \rho$, $\mu^2 + 2\kappa^2 = \sigma^2 \zeta_i$, $c_0^2 + \kappa^2 = \sigma^2 \theta_i$ とおけば

$$\text{上式} = \frac{1}{2\pi\sigma_{\theta i}\sigma_{\zeta i}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{V_{\zeta i}}{\sigma^2 \zeta_i} + \frac{V_{\theta i}}{\sigma^2 \theta_i} - 2\rho \frac{V_{\zeta i}}{\sigma \zeta_i} \cdot \frac{V_{\theta i}}{\sigma \theta_i}\right\}\right] \dots \quad (29)$$

(29) 式は $V_{\theta i}, V_{\zeta i}$ の同時分布が相関係数 ρ なる正規曲面分布をなすことを示している。正規曲面の性質から $V_{\theta i}$ の周辺分布 $f(\theta_i)$ は

$$f(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\theta i}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_{\theta i}}{\sigma \theta_i}\right)^2\right\}$$

$V_{\theta i} = \text{一定}$ なるとき $V_{\zeta i}$ の列分布 $f_{\theta i}(Z_i)$ は、

$$f_{\theta i}(Z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\zeta i}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_{\zeta i} - \rho(\sigma_{\zeta i}/\sigma_{\theta i})V_{\theta i}}{\sigma \zeta_i \sqrt{1-\rho^2}}\right)^2\right\}$$

さて、最尤法によれば (29) 式を $i = 1, 2, \dots, n$ について相乗じたものの値を尤度関数を最大ならしめるごとき推定値が最尤推定値である。ゆえに問題は、

$$F(\hat{\theta}_i, \hat{\zeta}_i; \hat{\zeta}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3) \equiv \hat{\zeta}_i - \hat{\zeta}_0 - \sum_{j=1}^3 \hat{A}_j \cos 2j\hat{\theta}_i - \sum_{j=1}^3 \hat{B}_j \sin 2j\hat{\theta}_i = 0 \quad \dots \quad (30)$$

なる条件の下に $S \equiv \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{V_{\zeta i}^2}{\sigma^2 \zeta_i} - 2\rho \frac{V_{\zeta i}}{\sigma \zeta_i} \cdot \frac{V_{\theta i}}{\sigma \theta_i} + \frac{V_{\theta i}^2}{\sigma^2 \theta_i} \right\}$ $\dots \quad (31)$

を最小ならしめるごとき推定値を求めることがある。今 $\zeta_0, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ の近似値をそれぞれ $\zeta'_0, A'_1, A'_2, A'_3, B'_1, B'_2, B'_3$ とし、 $\theta_i = \hat{\theta}_i + V_{\theta i}$, $Z_i = \hat{\zeta}_i + V_{\zeta i}$, ($i = 1, 2, \dots, n$). $\zeta'_0 = \hat{\zeta}_0 + z_0$, $A'_1 = \hat{A}_1 + a_1$, $A'_2 = \hat{A}_2 + a_2$, $A'_3 = \hat{A}_3 + a_3$, $B'_1 = \hat{B}_1 + b_1$, $B'_2 = \hat{B}_2 + b_2$, $B'_3 = \hat{B}_3 + b_3$ と置いて、この問題を解けば、 $z_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について次の連立方程式が得られる。

$$\sum_{i=1}^n \left\{ Z_i - \zeta'_0 - \sum_{j=1}^3 A'_j \cos 2j\theta_i - \sum_{j=1}^3 B'_j \sin 2j\theta_i + z_0 + \sum_{j=1}^3 a_j \cos 2j\theta_i + \sum_{j=1}^3 b_j \sin 2j\theta_i \right\} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\left\{ Z_i - \zeta_0' - \sum_{j=1}^3 A_j' \cos 2j\theta_i - \sum_{j=1}^3 B_j' \sin 2j\theta_i + z_0 + \sum_{j=1}^3 a_j \cos 2j\theta_i + \sum_{j=1}^3 b_j \sin 2j\theta_i \right\} \cos 2j\theta_i \right] = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left[\left\{ Z_i - \zeta_0' - \sum_{j=1}^3 A_j' \cos 2j\theta_i - \sum_{j=1}^3 B_j' \sin 2j\theta_i + z_0 + \sum_{j=1}^3 a_j \cos 2j\theta_i + \sum_{j=1}^3 b_j \sin 2j\theta_i \right\} \sin 2j\theta_i \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(32) 式を角括弧の形に書き直せば、

$$\left. \begin{aligned} [a_0 a_0] z_0 + [a_0 a_1] a_1 + [a_0 a_2] a_2 + [a_0 a_3] a_3 + [a_0 \beta_1] b_1 + [a_0 \beta_2] b_2 + [a_0 \beta_3] b_3 = [\alpha_0 0] \\ [a_1 a_0] z_0 + [a_1 a_1] a_1 + [a_1 a_2] a_2 + \dots + [a_1 \beta_1] b_1 + \dots = [\alpha_1 0] \\ [a_2 a_0] z_0 + [a_2 a_1] a_1 + \dots + [a_2 \beta_1] b_1 + \dots = [\alpha_2 0] \\ [a_3 a_0] z_0 + [a_3 a_1] a_1 + \dots + [a_3 \beta_1] b_1 + \dots = [\alpha_3 0] \\ [\beta_1 a_0] z_0 + [\beta_1 a_1] a_1 + \dots + [\beta_1 \beta_1] b_1 + \dots = [\beta_1 0] \\ [\beta_2 a_0] z_0 + [\beta_2 a_1] a_1 + \dots + [\beta_2 \beta_1] b_1 + \dots = [\beta_2 0] \\ [\beta_3 a_0] z_0 + [\beta_3 a_1] a_1 + \dots + [\beta_3 \beta_1] b_1 + \dots = [\beta_3 0] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ただし $[a_0 a_0] \equiv n, [a_0 a_j] \equiv \sum_{i=1}^n \cos 2j\theta_i, [a_0 \beta_j] \equiv \sum_{i=1}^n \sin 2j\theta_i,$

$$\left. \begin{aligned} [a_j a_k] \equiv \sum_{i=1}^n \cos 2j\theta_i \cos 2k\theta_i, [a_j \beta_k] \equiv \sum_{i=1}^n \cos 2j\theta_i \sin 2k\theta_i, \\ [\alpha_0 0] \equiv \sum_{i=1}^n (-Z_i + \zeta_0' + \sum_{j=1}^3 A_j' \cos 2j\theta_i + \sum_{j=1}^3 B_j' \sin 2j\theta_i), \\ [\alpha_k 0] \equiv \sum_{i=1}^n \cos 2k\theta_i (-Z_i + \zeta_0' + \sum_{j=1}^3 A_j' \cos 2j\theta_i + \sum_{j=1}^3 B_j' \sin 2j\theta_i), \\ [\beta_k 0] \equiv \sum_{i=1}^n \sin 2k\theta_i (-Z_i + \zeta_0' + \sum_{j=1}^3 A_j' \cos 2j\theta_i + \sum_{j=1}^3 B_j' \sin 2j\theta_i), \end{aligned} \right\}$$

$$j=1,2,3, k=1,2,3$$

(33) 式を三角級数の公式を応用して更に簡単にすれば、結局次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} n \hat{\zeta}_0 = [Z_i] \\ (n/2) \hat{A}_1 = [(Z_i - \hat{\zeta}_0) \cos 2\theta_i], \quad (n/2) \hat{A}_2 = [(Z_i - \hat{\zeta}_0) \cos 4\theta_i], \quad (n/2) \hat{A}_3 = [(Z_i - \hat{\zeta}_0) \cos 6\theta_i] \\ (n/2) \hat{B}_1 = [(Z_i - \hat{\zeta}_0) \sin 2\theta_i], \quad (n/2) \hat{B}_2 = [(Z_i - \hat{\zeta}_0) \sin 4\theta_i], \quad (n/2) \hat{B}_3 = [(Z_i - \hat{\zeta}_0) \sin 6\theta_i] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(ii) 推定値の変動および信頼区間 いうまでもなく推定値は観測値の関数である。従つて観測値の偶発的な変動に応じて推定値も変動する。一組の観測値から求めた推定値はこのような確率変数の一つの実現値と考えるべきである。

今、 $\varepsilon_{K\alpha} + \varepsilon_{\alpha\alpha} \equiv \varepsilon_{\theta_i}, \frac{-\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'} + \varepsilon_\beta + \varepsilon_{\beta'}}{2} - \varepsilon_{K\alpha} + \varepsilon_{K\beta} \equiv \varepsilon_{\zeta_i}$, とおけば $\theta_i - \theta_i = \varepsilon_{\theta_i}, Z_i - \zeta_i = \varepsilon_{\zeta_i}$ と記すこと

ができる、 $\varepsilon_{\theta_i}, \varepsilon_{\zeta_i}$ は (29) 式のように相関係数 ρ なる正規曲面分布に従う変数である。

次に、 $\zeta_0' - \zeta_0 = \varepsilon_z, \quad \left. \begin{aligned} A_1' - A_1 = \varepsilon_{a_1}, & \quad B_1' - B_1 = \varepsilon_{b_1} \\ A_2' - A_2 = \varepsilon_{a_2}, & \quad B_2' - B_2 = \varepsilon_{b_2} \\ A_3' - A_3 = \varepsilon_{a_3}, & \quad B_3' - B_3 = \varepsilon_{b_3} \end{aligned} \right\}$ と記すならば、これらは定数である。

$$\begin{aligned} \therefore F(\theta_i, Z_i; \zeta_0', A_1', A_2', A_3', B_1', B_2', B_3') &\equiv F(\theta_i + \varepsilon_{\theta_i}, \zeta_i + \varepsilon_{\zeta_i}; \\ &\quad \zeta_0 + \varepsilon_z, A_1 + \varepsilon_{a_1}, A_2 + \varepsilon_{a_2}, A_3 + \varepsilon_{a_3}, B_1 + \varepsilon_{b_1}, B_2 + \varepsilon_{b_2}, B_3 + \varepsilon_{b_3}) \\ &= 0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i} \right) \varepsilon_{\theta_i} + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_i} \right) \varepsilon_{\zeta_i} + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_0} \right) \varepsilon_z + \left(\frac{\partial F}{\partial A_1} \right) \varepsilon_{a_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial A_2} \right) \varepsilon_{a_2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial F}{\partial A_3} \right) \varepsilon_{a_3} + \left(\frac{\partial F}{\partial B_1} \right) \varepsilon_{b_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial B_2} \right) \varepsilon_{b_2} + \left(\frac{\partial F}{\partial B_3} \right) \varepsilon_{b_3} \end{aligned}$$

ここに偏微係数はすべて $(\theta_i, \zeta_i; \zeta_0, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ における偏導関数の値を示すものとする。 i を固定して考えれば上式の偏微係数は定数であり、また $\varepsilon_z, \varepsilon_{a_1}, \dots, \varepsilon_{b_3}$ も定数であるから $F(\theta_i, Z_i; \zeta_0', A_1', A_2', A_3', B_1', B_2', B_3')$ は平均値、 $(F_{\zeta_0}) \varepsilon_z + (F_{A_1}) \varepsilon_{a_1} + (F_{A_2}) \varepsilon_{a_2} + (F_{A_3}) \varepsilon_{a_3} + (F_{B_1}) \varepsilon_{b_1} + (F_{B_2}) \varepsilon_{b_2} + (F_{B_3}) \varepsilon_{b_3}$ の正規分布をする。なんとなれば (29) 式の正規曲面において、 $V_{\theta_i}, V_{\zeta_i}$ の代りに $\varepsilon_{\theta_i}, \varepsilon_{\zeta_i}$ を取り、これらをそれぞれ x 軸、 y 軸にとれば、 $z = \text{const.}$ なる平面とこの正規曲面との交りは橢円である。しこうしてこの橢円の主軸の方向は、

$$\tan 2\tau = \frac{-2 \cdot \frac{\rho}{\sigma_{\theta_i} \sigma_{\zeta_i}}}{\left(\frac{1}{\sigma_{\theta_i}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_{\zeta_i}} \right)^2} = \frac{-2 \rho \sigma_{\theta_i} \sigma_{\zeta_i}}{\sigma_{\zeta_i}^2 - \sigma_{\theta_i}^2} \quad (35)$$

なるとき正の最小角 τ の方向である。

$$\left. \begin{array}{l} X = \varepsilon_{\theta_i} \cos \tau + \varepsilon_{\zeta_i} \sin \tau \\ Y = -\varepsilon_{\theta_i} \sin \tau + \varepsilon_{\zeta_i} \cos \tau \end{array} \right\}$$

なる二量 X, Y は互に独立に正規分布をする。

さて統計量, $\left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i}\right) \varepsilon_{\theta_i} + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\right) \varepsilon_{\zeta_i}$ の分布は図一

5において, $\left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i}\right) \varepsilon_{\theta_i} + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\right) \varepsilon_{\zeta_i} = \text{一定} = p$ なる

直線に沿つて正規曲面の確率エレメントを積分し, それを p の関数として表わしたものとして得られる。

一方, このように考えた統計量 p はまた, 独立な正規分布の統計量 X, Y にそれぞれある常数を乗じて加えた一つの統計量であると考えることもできるから, p はまた正規分布をしなければならないからである。

統計量 p の分散を求めるに, $\sigma_{\theta_i} = \sigma_x, \sigma_{\zeta_i} = \sigma_y, \varepsilon_{\theta_i} = x, \varepsilon_{\zeta_i} = y$ とおけば, $\varepsilon_{\theta_i}, \varepsilon_{\zeta_i}$ の同時分布 ($i = \text{一定}$) は,

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{x}{\sigma_x} \cdot \frac{y}{\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right\}$$

ゆえに, $x = X \cos \tau - Y \sin \tau$
 $y = X \sin \tau + Y \cos \tau$

$$\text{Jacobian} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} = \begin{vmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{vmatrix} = 1, \quad t^2 = \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} \right) t + \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\rho \\ -\rho & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$t_1 \text{ or } t_2 = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_x^2\sigma_y^2\rho^2}}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

∴ X, Y の同時分布は, $\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(t_1 X^2 + t_2 Y^2) \right\}$

∴ X, Y の分散はそれぞれ $\frac{(1-\rho^2)}{t_1}$ および $\frac{(1-\rho^2)}{t_2} = \frac{2\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_x^2\sigma_y^2\rho^2}}$

次に, $\left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i}\right)x + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\right)y = p$ の変数を変換すれば,

$$\left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i}\right) \cos \tau + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\right) \sin \tau \right\} X - \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i}\right) \sin \tau - \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\right) \cos \tau \right\} Y = p$$

$$\therefore \text{var. } p = \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i}\right) \cos \tau + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\right) \sin \tau \right\}^2 \frac{(1-\rho^2)}{t_1} + \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i}\right) \sin \tau - \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\right) \cos \tau \right\}^2 \frac{(1-\rho^2)}{t_2}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \cos 2\tau \cdot \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_x^2\sigma_y^2\rho^2} \} \dots \dots \dots (36)$$

しかるに今の場合次の定理, “ $\hat{\zeta}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3$ はそれぞれその真値を平均値とする正規分布をなし, それらの分散および共分散の行列は [(33) 式の左辺の係数の行列の逆行列] \times (var p) に等しい” が成立し, (33) 式の左辺の係数の行列の逆行列は,

$$\begin{pmatrix} 1/n & & O \\ & 2/n & \\ O & & 2/n \end{pmatrix} \quad \text{なる正方行列である。}$$

ゆえに $\hat{\zeta}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3$ の分散はそれぞれ $1/n(\text{var } p), 2/n(\text{var } p), \dots, 2/n(\text{var } p)$ である。また $\hat{\zeta}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{B}_3$ の相互の共分散はすべて O である。次に一定な横座標 θ_i に対する推定曲線上の点の縦座標 $\hat{\zeta}_i$ の変動の分散を求めるに,

$\hat{\zeta}_i = \hat{\zeta}_0 + \hat{A}_1 \cos 2\theta_i + \hat{A}_2 \cos 4\theta_i + \hat{A}_3 \cos 6\theta_i + \hat{B}_1 \sin 2\theta_i + \hat{B}_2 \sin 4\theta_i + \hat{B}_3 \sin 6\theta_i$
 は $\hat{\zeta}, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3$ の変動によつて変動するのであるからその平均値は,

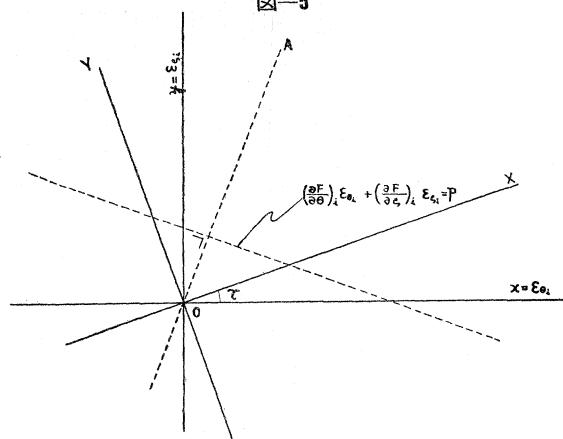
$$\zeta_i = \zeta_0 + A_1 \cos 2\theta_i + A_2 \cos 4\theta_i + A_3 \cos 6\theta_i + B_1 \sin 2\theta_i + B_2 \sin 4\theta_i + B_3 \sin 6\theta_i$$

で, 分散は

$$\sigma^2 \hat{\zeta}_i = \text{var}(\hat{\zeta}_0 + \hat{A}_1 \cos 2\theta_i + \hat{A}_2 \cos 4\theta_i + \hat{A}_3 \cos 6\theta_i + \hat{B}_1 \sin 2\theta_i + \hat{B}_2 \sin 4\theta_i + \hat{B}_3 \sin 6\theta_i)$$

$$= \frac{1}{n}(\text{var } p) + \frac{2}{n}(\text{var } p)(\cos^2 2\theta_i + \cos^2 4\theta_i + \cos^2 6\theta_i + \sin^2 2\theta_i + \sin^2 4\theta_i + \sin^2 6\theta_i) = \frac{7}{n}(\text{var } p)$$

図-5



である。

∴ $\hat{\epsilon}_i$ を中心として $\pm 1.96 \sigma_{\hat{\epsilon}_i}$ の区間をとれば、これは信頼度 95% の $\hat{\epsilon}_i$ の信頼区間である。また今の場合 $\sigma_{\hat{\epsilon}_i}$ は i の変動に対して不变であるから、この信頼区間も i について不变である。

(f) 分度円関係誤差の観測実験結果

以上の解析結果を基とし、collimator を用いて Wild T 3について行つた観測実験の計算結果の一例を示せば次の通りである。

表一 ウィルド T 3 (No. 33418) による夾角観測結果

日時：昭和 31 年 9 月 18 日

天候：曇

気温：25°C

於実験室

時 分	輪 郭	望 還 鏡	方 位	度 分	秒 板		中 数			夾 角			和	差 (d)
					1 回(秒)	2 回(秒)	度	分	秒	度	分	秒		
9.08	90°	<i>r</i>	1	90° 0'	37.9	37.1	90°	0'	75°0'	0°	0'	0"	54°9'	-0.3
			2	179 54	21.3	21.0	179	54	42.3	89	53	27.3		
		<i>l</i>	2	359 54	20.9	20.8	359	54	41.7	89	53	27.6		
			1	270 0	36.8	37.3	270	0	74.1	0	0	0		
9.12	100	<i>l</i>	1	280 0	32.2	31.8	280	0	64.0	0	0	0	54.0	-0.2
			2	369 54	15.7	15.4	369	54	31.1	89	53	27.1		
		<i>r</i>	2	189 54	16.7	16.2	189	54	32.9	89	53	26.9		
			1	100 0	33.0	33.0	100	0	66.0	0	0	0		
9.16	110	<i>r</i>	1	110 0	35.2	35.5	110	0	70.7	9	0	0	51.8	-1.8
			2	199 54	17.6	18.1	199	54	35.7	89	53	25.0		
		<i>l</i>	2	19 54	16.5	17.1	379	54	33.6	89	53	26.8		
			1	290 0	33.6	33.2	290	0	66.8	0	0	0		
9.20	120	<i>l</i>	1	300 0	31.8	31.5	300	0	63.3	0	0	0	49.9	+1.1
			2	29 54	14.2	13.5	389	54	27.7	89	53	24.4		
		<i>r</i>	2	209 54	15.8	15.3	209	54	31.1	89	53	25.5		
			1	120 0	33.3	32.3	120	0	65.6	0	0	0		
9.23	130	<i>r</i>	1	130 0	37.2	37.5	130	0	74.7	0	0	0	52.9	+0.7
			2	219 54	20.6	20.9	219	54	41.5	89	53	26.8		
		<i>l</i>	2	39 54	20.6	20.2	399	54	40.2	89	53	26.1		
			1	310 0	37.3	36.8	310	0	74.1	0	0	0		
9.26	140	<i>l</i>	1	320 0	36.6	36.8	320	0	73.4	0	0	0	52.2	-1.2
			2	49 54	20.1	20.0	409	54	40.1	89	53	26.7		
		<i>r</i>	2	229 54	20.2	20.2	229	54	40.4	89	53	25.5		
			1	140 0	37.9	37.0	140	0	74.9	0	0	0		
9.30	150	<i>r</i>	1	150 0	43.2	42.4	150	0	85.6	0	0	0	53.7	+0.5
			2	239 54	25.9	26.8	239	54	52.7	89	53	27.1		
		<i>l</i>	2	59 54	25.9	26.3	419	54	52.2	89	53	26.6		
			1	330 0	43.2	42.4	330	0	85.6	0	0	0		
9.33	160	<i>l</i>	1	340 0	41.2	41.7	340	0	82.9	0	0	0	55.6	-0.4
			2	69 54	25.5	25.4	429	54	50.9	89	53	28.0		
		<i>r</i>	2	249 54	25.9	25.8	249	54	51.7	89	53	27.6		
			1	160 0	42.3	41.8	160	0	84.1	0	0	0		
9.36	170	<i>r</i>	1	170 0	42.3	42.2	170	0	84.5	0	0	0	56.5	-1.9
			2	259 54	26.2	25.6	259	54	51.8	89	53	27.3		
		<i>l</i>	2	79 54	25.9	25.3	439	54	51.2	89	53	29.2		
			1	350 0	41.3	40.7	350	0	82.0	0	0	0		
9.40	180	<i>l</i>	1	0 0	39.4	39.3	0	0	78.7	0	0	0	56.1	-1.1
			2	89 54	23.4	23.9	89	54	47.3	89	53	28.6		
		<i>r</i>	2	269 54	24.3	24.6	269	54	48.9	89	53	27.5		
			1	180 0	40.6	40.8	180	0	81.4	0	0	0		
9.44	10	<i>r</i>	1	190 0	43.7	42.9	190	0	86.6	0	0	0	56.2	+1.0
			2	279 54	27.7	27.5	279	54	55.2	89	53	28.6		
		<i>l</i>	2	99 54	26.9	26.7	99	54	53.6	89	53	27.6		
			1	10 0	43.1	42.9	10	0	86.0	0	0	0		
9.48	20	<i>l</i>	1	20 0	41.8	41.8	20	0	83.6	0	0	0	59.4	-1.6
			2	109 54	27.4	26.7	109	54	54.1	89	53	30.5		
		<i>r</i>	2	289 54	27.9	27.9	289	54	55.8	89	53	28.9		
			1	200 0	43.1	43.8	200	0	86.9	0	0	0		
9.51	30	<i>r</i>	1	210 0	44.0	43.5	210	0	87.5	0	0	0	58.2	-0.4
			2	299 54	28.2	28.2	299	54	56.4	89	53	28.9		
		<i>l</i>	2	119 54	27.4	27.8	119	54	55.2	89	53	29.3		
			1	30 0	43.0	42.9	30	0	85.9	0	0	0		
9.54	40	<i>l</i>	1	40 0	41.3	42.0	40	0	83.3	0	0	0	56.1	-0.9
			2	129 54	26.0	25.8	129	54	51.8	89	53	28.5		
		<i>r</i>	2	309 54	24.7	25.9	309	54	50.6	89	53	27.6		
			1	220 0	41.6	41.4	220	0	83.0	0	0	0		
9.58	50	<i>r</i>	1	230 0	34.2	34.0	230	0	68.2	0	0	0	55.5	-0.1
			2	319 54	17.8	18.1	319	54	35.9	89	53	27.7		
		<i>l</i>	2	139 54	17.6	17.5	139	54	35.1	89	53	27.8		
			1	50 0	33.6	33.7	50	0	67.3	0	0	0		
10.01	60	<i>l</i>	1	60 0	36.8	37.4	60	0	74.2	0	0	0	53.2	-2.0
			2	149 54	21.0	20.8	149	54	41.8	89	53	27.6		
		<i>r</i>	2	329 54	20.9	20.9	329	54	41.8	89	53	25.6		
			1	240 0	38.1	38.1	240	0	76.2	0	0	0		

時分	輪郭	望遠鏡	方位	度 分	秒 板		中 数			夾 角			和	差(d)
					1回(秒)	2回(秒)	度	分	秒	度	分	秒		
10.05	70	<i>r</i>	1	250° 0'	38"5	38"9	250°	0'	77"4	0°	0'	0"	55.2.	-0.2
			2	339 54	22.1	22.8	339	54	44.9	89	53	27.5		
			2	159 54	21.2	21.1	159	54	42.3	89	53	27.7		
10.09	80	<i>t</i>	1	70	37.2	37.4	70	0	74.6	0	0	0	54.4	+1.0
			2	169 54	17.4	17.3	169	54	34.7	89	53	26.7		
			2	349 54	17.9	18.0	349	54	35.9	89	53	27.7		
			1	260 0	33.7	34.5	260	0	68.2	0	0	0		

表—2 マイクロメーターによる目盛線合致観測結果 (Wild T 3, No. 33418)

日時：昭和 31 年 9 月 25 日 10~12 時 天候：快晴 室温：25°C 於実験室

輪郭	秒 板 <i>e</i> ₆	1 回(秒) <i>e</i> ₁	2 回(秒) <i>e</i> ₂	3 回(秒) <i>e</i> ₃	4 回(秒) <i>e</i> ₄	5 回(秒) <i>e</i> ₅	6 回(秒) <i>e</i> ₆	平均 <i>e</i>
0° 0'	1"	0.95	0.90	1.03	0.90	0.99	1.11	0.9800
	10	10.02	9.90	9.80	10.20	9.92	9.9567	
	20	20.10	20.40	20.20	20.41	20.51	20.3550	
	30	30.50	30.60	30.45	30.71	30.71	30.5450	
	40	40.20	40.40	40.13	40.70	40.43	40.50	40.3933
	50	50.10	50.05	50.32	49.80	50.10	50.00	50.0617
	59	58.10	58.50	58.00	58.80	58.80	58.45	58.4417
30° 10'	1"	1.18	1.20	1.25	0.98	1.18	1.02	1.1350
	10	9.20	9.30	9.15	9.65	9.85	9.40	9.4250
	20	20.20	19.60	19.65	19.60	20.02	19.75	19.8033
	30	29.75	29.73	29.80	30.00	30.10	30.00	29.8967
	40	40.25	40.00	39.80	40.30	40.25	39.92	40.0867
	50	51.25	51.40	51.25	51.80	51.45	51.60	51.4583
	59	58.70	58.80	58.85	58.82	59.10	59.00	58.8878
60° 20'	1"	0.50	0.70	1.00	0.60	0.70	0.91	0.7350
	10	9.75	10.15	10.00	9.85	10.40	9.75	9.9833
	20	20.07	19.60	19.40	20.10	20.15	20.10	19.9033
	30	30.10	30.35	30.21	30.04	30.02	29.90	30.1033
	40	40.60	39.90	40.10	40.30	40.35	40.00	40.2083
	50	50.10	49.55	49.30	50.00	49.65	50.05	49.7750
	59	58.60	59.10	58.95	59.00	58.90	58.85	58.9000
90° 30'	1"	1.55	1.25	1.45	1.70	1.65	1.25	1.4750
	10	9.95	10.30	9.90	10.30	9.95	10.85	10.2083
	20	20.35	20.00	20.50	20.55	20.35	20.13	20.3133
	30	30.60	30.65	30.47	30.25	30.30	30.72	30.4983
	40	40.40	39.70	40.00	40.15	40.45	39.75	40.0917
	50	49.75	49.40	49.63	49.65	49.50	50.00	49.6550
	59	59.20	59.30	59.40	59.18	59.25	59.55	59.3133
120° 40'	1"	0.65	0.95	0.92	0.90	0.85	1.10	0.8950
	10	10.45	10.75	10.25	10.50	10.35	10.12	10.4033
	20	20.05	19.95	19.40	19.62	19.90	19.37	19.7150
	30	29.20	29.30	29.28	28.90	28.80	29.10	29.0967
	40	39.40	39.90	39.75	39.60	39.60	39.32	39.5950
	50	49.83	49.65	50.00	50.28	49.95	50.05	49.9600
	59	59.30	59.10	59.01	58.99	59.43	59.32	59.1917
150° 50'	1"	1.35	1.25	1.38	1.08	1.01	1.41	1.2467
	10	9.98	10.17	10.12	10.00	9.95	10.09	10.0517
	20	19.75	20.00	20.28	19.78	20.20	19.95	19.9883
	30	30.30	30.28	30.08	30.32	29.90	30.41	30.2150
	40	40.20	40.08	40.42	40.10	40.22	40.20	40.2033
	50	49.75	49.80	50.00	49.95	50.00	50.20	49.9500
	59	58.92	59.30	58.85	58.82	59.10	59.30	59.0483
180° 50'	1"	1.25	1.20	0.90	1.30	1.05	1.18	1.1467
	10	10.00	10.31	9.95	10.32	10.08	10.21	10.1450
	20	20.20	20.45	20.28	20.00	20.35	20.00	20.2133
	25	24.85	25.20	25.25	25.34	25.42	25.50	25.2600
	30	29.95	30.20	30.10	30.42	30.41	29.95	30.1717
	40	40.27	39.20	40.08	40.50	40.00	39.96	40.0017
	50	50.10	50.21	50.06	50.32	50.11	50.10	50.1500

$$\hat{\mu}^2 = 0.2638, \quad \sqrt{\hat{\mu}^2} = 0.''5136, \quad c^2 = 0.155, \quad c = 0.''3946 \text{ (実角)}$$

$$\hat{s}^2 = 0.3719, \quad \sqrt{\hat{s}^2} = 0.''6098, \quad c_0^2 = 0.4998, \quad c_0 = 0.''7070 \text{ (実角)}$$

$$\zeta_0 = 89^\circ 53' 27'' 383\,333$$

$$\hat{A}_1 = 0.''875\,093, \quad \hat{A}_2 = 0.''432\,830, \quad \hat{A}_3 = -0.''522\,222,$$

$$\hat{B}_1 = 0.''989\,918, \quad \hat{B}_2 = 0.''079\,324, \quad \hat{B}_3 = 0.''038\,490$$

ただし、 c^2, c_0^2, s^2 はそれぞれマイクロメーターによる目盛合致識別誤差の分散、分度円回転ねじによる目盛合致誤差の分散、および視準誤差の分散、を表すものとする。

$$\begin{aligned} \therefore \zeta_i &= 89^\circ 53' 27'' 383\,333 + 0.''875\,093 \cos 2\theta_i + 0.''432\,830 \cos 4\theta_i - 0.''522\,222 \cos 6\theta_i \\ &\quad + 0.''989\,918 \sin 2\theta_i + 0.''079\,324 \sin 4\theta_i + 0.''038\,490 \sin 6\theta_i \end{aligned}$$

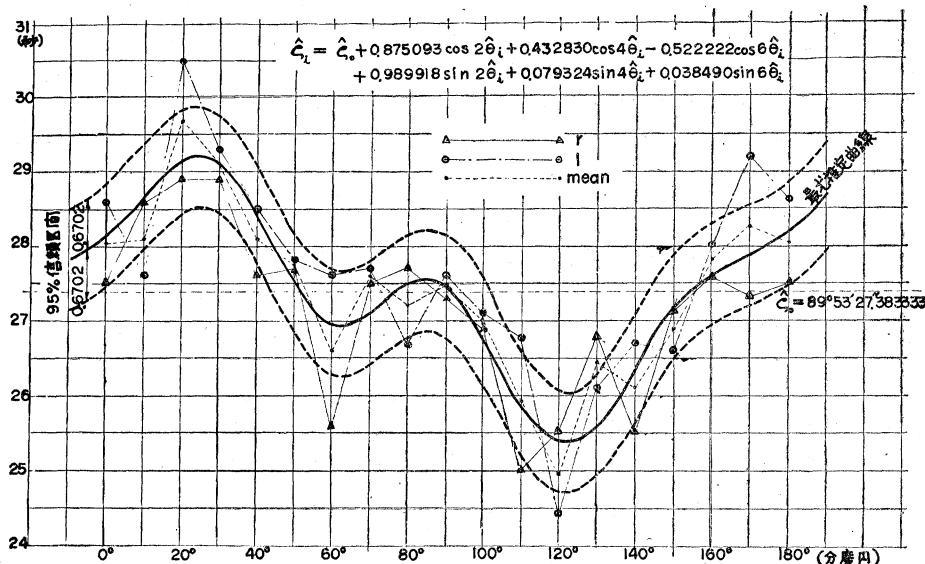
また、 $(\hat{v}ar p) = 0.2385$, $\hat{\sigma}_{\hat{\zeta}_i}^2 = 0.09275$, $\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\zeta}_i}^2} = 0.^{\prime\prime}3045$

自由度 $(18-7)=11$ の t 分布において、5%棄却域の限界点を $t_{0.05}$ とすれば、 $t_{0.05}=2.201$

$$\therefore \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\zeta}_i}^2} \cdot t_{0.05} = 0.^{\prime\prime}6702$$

ゆえに今の場合、95%の信頼区間は、 $\hat{\zeta}_i - 0.^{\prime\prime}6702 < \hat{\zeta}_i < \hat{\zeta}_i + 0.^{\prime\prime}6702$ である。以上の諸結果を図示すれば 図-6 の通りである。

図-6 分度円誤差補正推定曲線 (Wild T 3, No. 33418)



最後に止むを得ず多量の部分を省略したことをお詫びすると共に、本稿をまとめるについて種々御教示を賜わった防衛大学、新郷教授、東京大学、丸安教授に厚く御礼申上げる。

参考文献

- 1) Jordan-Eggert; Handbuch der Vermessungskunde, I-III.
- 2) W.E. Deming; Statistical Adjustment of Data.

(昭.34.2.23)