

格子ゲタ構造の極限荷重に関する一研究

正員 米沢 博*

A STUDY ON THE COLLAPSE LOAD OF GRILLAGE BEAMS

By Dr. Eng., Hiroshi Yonezawa, C.E. Member

Synopsis : This paper presents a theoretical and experimental studies of the collapse load of grillage beams, composed of two main beams and of the cross beams, subjected to transverse loading at the main beam of one side such as the bending and twisting moment are introduced in the beams.

The results of study may be summarized as follows:

1. The formulas of the collapse load are obtained for the case where the main beam of one side yields.
 2. The case of the collapse of the loaded main beam is distinguished theoretically from the case of the collapse of both loaded and unloaded main beam.
 3. It is ascertained by the experimental models tested that these theoretical analysis is proper to obtain the collapse load on such a grillage beam as discussed in this paper.

1. まえがわ

近年、構造物の極限解析に関する研究はきわめて盛んに行われ、ハリ、トラス、ラーメン、アーチ、平板、シェルなどの極限荷重が、各種の荷重状態に対して研究されているようである。それらのうちで、ラーメン構造について考えてみると、面内荷重に対しては非常に多数の研究結果があるが、横荷重を受けた場合、例えば格子ゲタ構造などに関する研究は二、三のものを除いては^{1)~3)}、あまり見当たらないようである。格子ゲタ構造に関するものでは、直角二方向のすべてのケタの端部が、単純支持あるいは固定支持され、各格点に等しい荷重が同時に載つた場合を扱つたものが主である。

ここでは、両端固定された2本の主ゲタと1, 2あるいは3本の横ゲタよりなる簡単な格子ゲタ構造に、偏心荷重が載った場合の極限荷重並びに極限タワミを理論的に求め、多数の小型格子ゲタ模型に対する実験結果と比較考察したので、その結果について述べる。

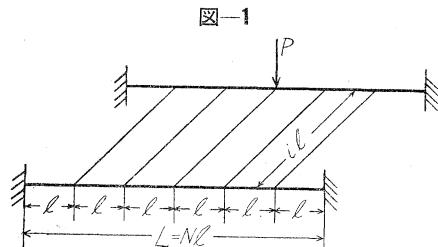
2. 極限荷重

横荷重を受けたラーメン構造の極限解析としては、J. Heymanが二部材よりなり隅角部が直角なラーメンについて解析している⁴⁾。いま、この理論を適用して、図-1に示すようなスパン $L = Ni$ (ただし $N=2, 3, 4$)、主ゲタ間隔 il 、横ゲタ 1, 2 あるいは 3 本の格子ゲタの一方の主ゲタのスパン中央に集中荷重が載つた場合について、極限荷重の大きさ P_c を求めてみよう。

主ゲタ、横ゲタの全塑性モーメントをそれぞれ M_0, jM_0 、断面 X のタワミ速度、曲げモーメント、ねじりモーメント、曲げ速度、ねじり速度などをそれぞれ $\delta_X, M_X, T_X, \beta_X, \theta_X$ とし、かつケタは完全塑性体であるとする。降伏条件としてはせん断力、軸方向力の影響を無視して、次の式を採用する。

ただし、 α と k は断面形によって決まる常数で、主ゲタと横ゲタの断面が幾何学的に相似の場合は、 $k=1$ となる。

塑性ヒンジの生ずる位置として、図-2(a),(b)に示すように、両主ゲタが同時に崩壊する場合と、載荷ゲタと横ゲタが崩壊する場合とが考えられる。このいづれが生ずるかは、主ゲタの間隔、主ゲタと横ゲタの断面の関



* 工学博士，山口大学教授，工学部土木工学教室

係、横ゲタの数などによつて異なるはずである。

まず、両主ゲタが同時に崩壊する場合は、 P_0 は全塑性モーメント $2M_0$ の両端固定パリと全く同じ値で、横ゲタの数などに関係なく、次のようになる。

$$P_0 = 16M_0/L \quad \dots \dots \dots (2)$$

載荷ゲタと横ゲタが崩壊する場合の P_0 を、横ゲタ 1, 2, 3 本の場合について求めてみよう。

(1) 横ゲタ 1 本の場合 図-3 に示すような塑性ヒンジが生じた場合を考えてみよう。塑性ヒンジによつて分割される各部分の釣合を考えると

$$T_A = T_B = jM_0/2, R_A = R_B = 2M_A/l,$$

$$R_C = 2jM_0/il \quad \dots \dots \dots (3)$$

である。降伏条件式 (1) および式 (3) から、 M_A は次のようにになる。

$$M_A = M_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha j^2}{4}} \quad \dots \dots \dots (4)$$

従つて、式 (3) から

$$R_A = \frac{2M_0}{l} \sqrt{1 - \frac{\alpha j^2}{4}} \quad \dots \dots \dots (5)$$

となり、極限荷重 P_0 は次のようになる。

$$P_0 = 2R_A + R_C = \frac{M_0}{l} \left\{ 4 \sqrt{1 - \frac{\alpha j^2}{4}} + \frac{2j}{i} \right\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

式 (6) の P_0 を用いて曲げモーメント図を書き、仮定した点以外で降伏条件を破る点がなければ、 P_0 は求める極限荷重である。もし破る点があれば、Greenberg-Prager の理論⁵⁾によつて、下限値と上限値が求められる。降伏条件を破る点があるか否かは、 i, j, α などの値によつて決まるが、著者の調べた範囲では、破らない場合が相当多いようである。いずれにしても、ここでは式 (6) で与えられる値を極限荷重として採用することにしよう。

(2) 横ゲタ 2 本の場合 図-4 に示すような塑性ヒンジが生じた場合を考えてみよう。塑性ヒンジ A, D における θ と β の比を、次のようにそれぞれ x, y とする。

$$\theta_A = x \beta_A = x \delta_C/l, \theta_D = y \beta_D = y \delta_C/i l \quad \dots \dots \dots (7)$$

さらに次の関係が成り立つ。

$$\theta_D + \theta_C = \beta_A = \delta_C/l, \beta_C = \beta_D - \theta_A \quad \dots \dots \dots (8)$$

また、 M, T と θ, β の間には、次の式が成り立つ⁶⁾。

$$\frac{T_C}{M_C} = \frac{T_D}{M_D} = \frac{\theta_C}{k \alpha \beta_C} = \frac{\theta_D}{k \alpha \beta_D} = \frac{y}{k \alpha} \quad \dots \dots \dots (9)$$

式 (7), (8), (9) から θ, β を消去すると、 x と y の関係式として、次の式が得られる。

$$y(2/i - x) = 1 \quad \dots \dots \dots (10)$$

さらに、降伏条件式として、次の式が得られる。

$$M_A^2 + \alpha T_A^2 = M_A^2 + \alpha M_C^2 = M_0^2, M_C^2 + k \alpha T_C^2 = j^2 M_0^2 \quad \dots \dots \dots (11)$$

式 (9) と同様にして、次の式が成り立つ。

$$M_A = \alpha M_C/x \quad \dots \dots \dots (12)$$

式 (9), (11), (12) から M と T を消去すると、 x と y の関係式として、次の式が得られる。

$$\frac{j^2 \alpha^2}{x^2} + j^2 \alpha = 1 + \frac{y^2}{k \alpha} \quad \dots \dots \dots (13)$$

式 (10), (13) から x, y が求められるから、その結果 M_C, T_C, M_A, T_A などが決まる。さらに 図-4 において、 AB, CD の部分の釣合の関係から、 $R_A, R_C = R_D$ が決定し

$$P_0 = 2R_A + 2R_C \quad \dots \dots \dots (14)$$

図-2 塑性ヒンジの生ずる位置

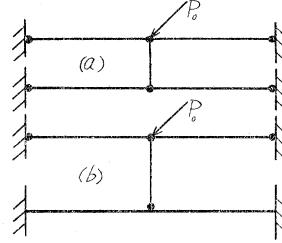


図-3 格子ゲタ 1 本の場合

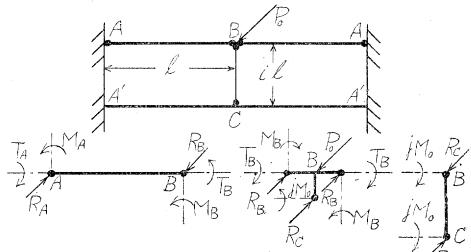
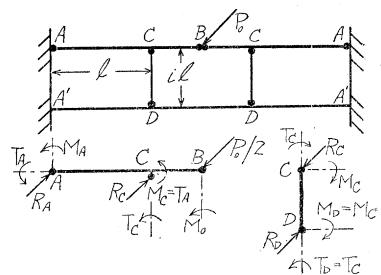


図-4 横ゲタ 2 本の場合



から、極限荷重 P_0 が求められる。

(3) 横ゲタ3本の場合 図-5に示すような塑性ヒンジが生ずる場合の P_c を求めてみよう。塑性ヒンジ A, D における θ と β の比を、次のようにそれぞれ x, y とする。

横ゲタ 2 本の場合と同様にして、次の式が成り立つ。

主ゲタと横ゲタの降伏条件式は、それぞれ次のようになる。

$$M_A^2 + \alpha T_A^2 = M_B^2 + \alpha T_B^2 = M_0^2,$$

$$M_C^2 + k \propto T_C^2 = j^2 M_0^2 \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

釣合の関係式として、次の式が得られる。

$$T_B = j M_0 / 2, \quad T_A = M_C + T_B \quad \dots \dots \dots (18)$$

さらに M, T と β, θ の間に、次の式が成り立つ。

$$\frac{M_A}{T_A} = \frac{\alpha \beta_A}{\theta_A} = \frac{\alpha}{x}, \quad \frac{T_C}{M_C} = \frac{\theta_C}{k \alpha \beta_C} = \frac{y}{k \alpha} \quad \dots \dots \dots (19)$$

従つて、式(17), (18), (19)から M, T を消去すると、 x と y の関係式として、次の式が得られる。

$$\alpha j^2 \left(1 + \frac{\sqrt{1+y^2/\alpha k}}{2}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{x^2} + 1\right) = 1 + \frac{y^2}{\alpha k} \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

式(16), (20)から x, y が決まれば、各塑性ヒンジの M, T が求まり、さらに釣合の関係から R_E, R_B が求められる。従つて、極限荷重 P_0 は次のような。

(4) 計算結果とその考察 主ゲタ、横ゲタともに正方形断面とすると、 $\alpha=27/16^*$, $k=1$ となる。いま種々の主ゲタ間隔および断面に対し、すなわち種々の i, j の値に対する極限荷重 P_0 を、横ゲタの数が 1, 2, 3 の各場合について、式(6), (14), (21) から求めると、図-6(a), (b), (c) のようになる。これらの図において $P_0L/M_0=16$ の線は、両主ゲタが同時に崩壊する場合の極限荷重を与える。従つて、図の曲線で $P_0L/M_0=16$ 以上にある点線の部分に相当する荷重は、実際には生じないで、それより小さい $P_0L/M_0=16$ の荷重にて、両主ゲ

図-6 (a) 横ゲタ 1 本で
 $\alpha = 27/16$ の場合の P_0 の
 理論値

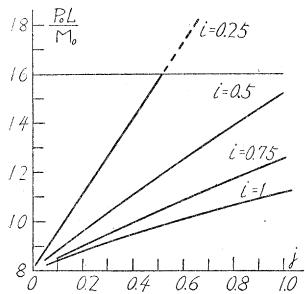


図-6 (b) 横ゲタ 2 本で
 $\alpha = 27/16$ の場合の P_0 の
 理論値

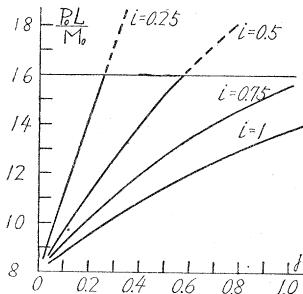
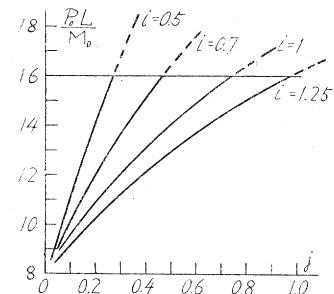


図-6 (c) 横ゲタ3本で
 $\alpha = 27/16$ の場合の P の
 理論値



タが同時に崩壊すると考えられる。さらに、曲線のうちで意味のある実線の部分、すなわち $8 < P_o L / M_o < 16$ の間にある荷重は、載荷ゲタと横ゲタで崩壊する場合の荷重を与えると考えられる。これらの曲線について見るに、 i が大なるほど、また j が小なるほど、すなわち、主ゲタ間隔の大なるほど、横ゲタ断面が小なるほど低い荷重で、かつ載荷ゲタのみが崩壊しやすいことを示している。また、横ゲタの数が増すに従つて、極限荷重が大きくなることがよくわかる。

次に、極限荷重に対する α の影響を見るため、ねじりに対する抵抗の大きい箱型断面の場合、すなわち $\alpha = 3/4$, $k=1$ で横ゲタ 1, 2, 3 本の場合について計算すると、図-7 (a), (b), (c) のようになる。図からわかるように、極限荷重に関する一般的性質は、正方形断面の場合と全く同じである。ただ、ねじりに対する抵抗が大なるほど、すなわち、 α が小なるほど P_0 の値が大きくなることが、図-6, 7 を比較してわかる。

* von Mises の降伏条件 $\sigma + 3\tau^2 = \sigma_0^2$ を採用し、また二辺長 $b \times h$ の矩形断面では $M_0 = bh^2\sigma_0/4$, $T_0 = b^3\tau_0/3 + b^2(h-b)\tau_0/2$ とすると、正方形断面すなわち $b=h$ の場合は $\alpha=27/16$ となる。

図-7 (a) 横ゲタ1本で
 $\alpha = 3/4$ の場合の P_0 の
 理論値

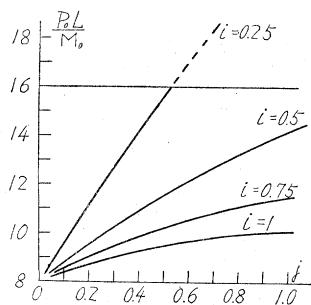


図-7 (b) 横ゲタ2本で
 $\alpha = 3/4$ の場合の P_0 の
 理論値

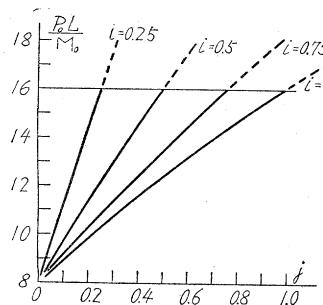
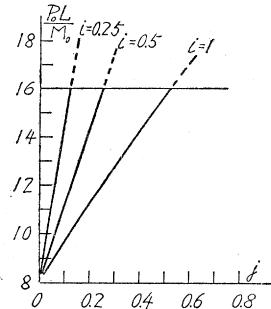


図-7 (c) 横ゲタ3本で
 $\alpha = 3/4$ の場合の P_0 の
 理論値



3. 極限タワミ

後述の模型実験を検討するため、崩壊直前の載荷点のタワミを P.S. Symonds の方法⁷⁾で求めてみよう。この場合、最後に生ずる塑性ヒンジを仮定しなければならない。最後に生ずる塑性ヒンジを種々仮定し、そのうちで最大の極限タワミを与える場合が、眞の最後の塑性ヒンジであると考えられる。両主ゲタが同時に崩壊する場合は、両端固定パリの場合のタワミを求めればよいから、ここでは載荷ゲタと横ゲタが崩壊する場合に限定する。この場合、横ゲタが最後に崩壊すると仮定するのが自然であり、また極限タワミも最大になる。まず、横ゲタ 1 本の場合を考えよう。図-3 に示すような崩壊を生ずる寸前の点 B,C のタワミを δ_B, δ_C 、ヒンジ C が最後に生ずるヒンジとすると、点 C における横ゲタのタワミ角 i_{CB} は次のように表わされる。

ただし EI は横ゲタの曲げコワサである。式 (22)において、 i_{CB} は両端固定バリ $A'A'$ の点 C にねじりモーメント jM_0 が作用した時のねじり角、 δ_C は同じ固定バリの点 C に 2. において求めた R_C が載つた場合のタワミとして計算できる。従つて δ_B が求められる。

次に、図-4 に示すような横ゲタ 2 本の場合、点 D が最後の塑性ヒンジと仮定しよう。この場合は次の式が成り立つ。

$$i_{CD} = \frac{2\delta_B/3 - \delta_D}{il} + \frac{il}{6EI} (-2M_D + M_C) \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

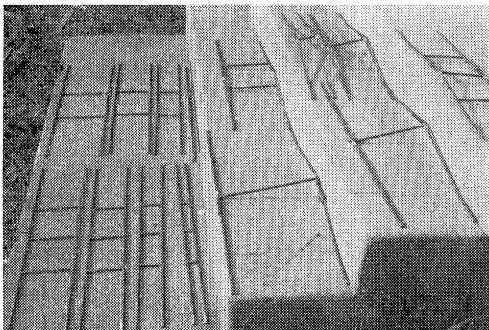
式(23)において、 i_{CD}, δ_D は横ゲタ1本の場合と同様の考え方で計算できるから、 δ_B が求められる。横ゲタ3本の場合も同様に求められるが、ここでは省略する。

4. 格子ゲタ模型による載荷実験並びに理論との比較

格子ゲタ構造に偏心荷重を載せた場合の極限荷重と載荷点の極限タワミについて述べてきたが、ここでは種々の主ゲタ間隔および横ゲタ数の模型に対する載荷実験の結果および理論との比較考察を行つてみよう。載荷模型は 6.4×6.4 および 8.8×8.8 の角鋼をガス溶接後焼鈍したものについて実験した。模型に使用した角鋼の一部を、模型と同時に焼鈍し、スパン 60 cm の単純バリとして曲げ試験し、また引張試験した結果、降伏点は約 2 600 kg/cm² であつた。使用した模型を **写真-1**、その寸法を **表-1** に示す。ただし、すべての模型に対し、

写真-1 実験模型

表一



模型番号	横ゲタ数	主ゲタ間隔(cm)	主ゲタ寸法(mm)
No. 1	1	30	6.4×6.4
No. 2	1	22.5	6.4×6.4
No. 3	1	15	6.4×6.4
No. 4	1	7.5	6.4×6.4
No. 5	2	20	6.4×6.4
No. 6	2	15	6.4×6.4
No. 7	2	10	6.4×6.4
No. 8	2	5	6.4×6.4
No. 9	3	15	6.4×6.4
No. 10	3	11.3	6.4×6.4
No. 11	3	7.5	6.4×6.4
No. 12	3	3.8	6.4×6.4
No. 13	3	15	8.8×8.8
No. 14	3	12	8.8×8.8
No. 15	3	7.5	8.8×8.8

主ゲタのスパンは 60 cm, 横ゲタの断面は 6.4×6.4 とした。固定支持用に製作したチャックにて主ゲタを支持し、No.1~12 の模型に対しては、重錘をハンガーにより点荷重として作用させ、No.13~15 の模型では、荷重検定リングとジャッキにより点荷重を加えた。載荷装置を写真-2 に示す。

載荷点(スパン中央)のタワミはカセットメーターにより、両主ゲタのスパン中央のヒズミは電気抵抗線ヒズミ計で測定した。これらの測定結果を図-8(a)~(f) および図-9(a)~(c) に示す。図にて、 δ および ϵ_1 は載荷点のタワミおよびヒズミを、 ϵ_2 は載荷しない主ゲタのスパン中央のヒズミを、 P_0 および δ_0 は極限荷重および極限タワミの理論値を示す。図-8よりわかるように、No.1, 2, 3, 5, 6, 13 の模型では、載荷ゲタの変形のみがいちじるしい。これらの模型に対しては、極限荷重 P_0/M_0 の理論値が 16 より小さくなり、載荷ゲタと横ゲタに塑性ヒンジが生ずることが理論的に予想されるが、実験結果もよくこのことを示している。なお、 P_0L/M_0 の値が 16 に近づくほど、非載荷ゲタの変形も大きくなっている。

図-8 (a) 模型 No.1 のタワミ、
ヒズミの測定値

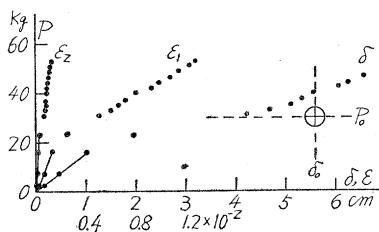


図-8 (b) 模型 No.2 のタワミ、
ヒズミの測定値

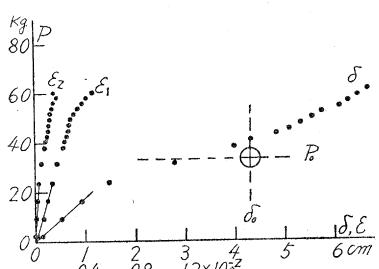


図-8 (c) 模型 No.3 のタワミ、
ヒズミの測定値

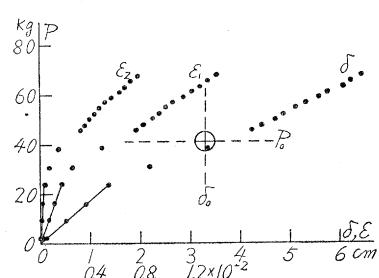


図-8 (d) 模型 No.5 のタワミ、
ヒズミの測定値

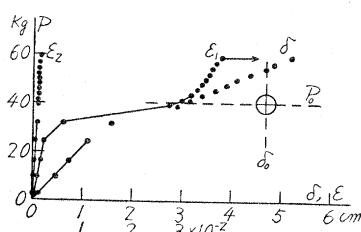


図-8 (e) 模型 No.6 のタワミ、
ヒズミの測定値

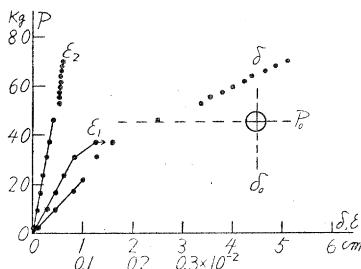


図-8 (f) 模型 No.13 のタワミ、
ヒズミの測定値

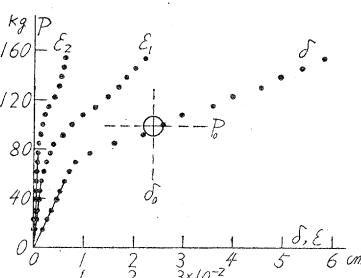
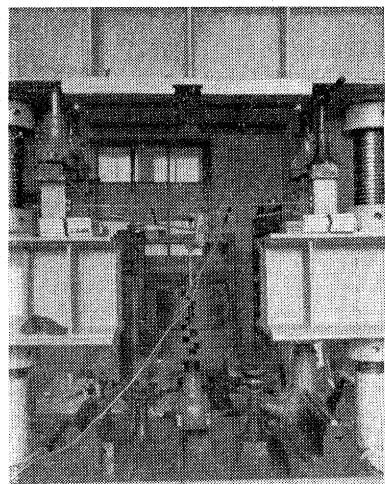


写真-2 載荷装置



次に、No.4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15 の模型では、両主ゲタの変形が同程度にいちじるしく現われた。これらの模型に対しては、載荷ゲタと横ゲタに塑性ヒンジを仮定した場合の P_0L/M_0 の理論値が 16 より大きくなり、両主ゲタに塑性ヒンジが生ずるとする理論結果とよく一致する。No.4, 9, 15 の場合を 図-9 に示しておいた。

図-9 (a) 模型 No.4 のタワミ, ヒズミの測定値

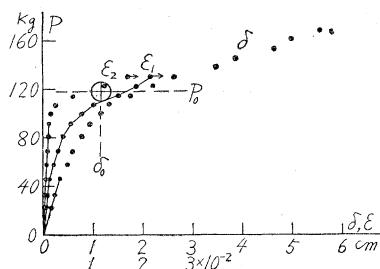


図-9 (b) 模型 No.9 のタワミ, ヒズミの測定値

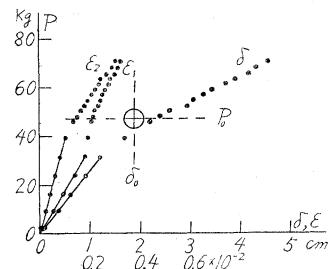


図-9 (c) 模型 No.15 のタワミ, ヒズミの測定値

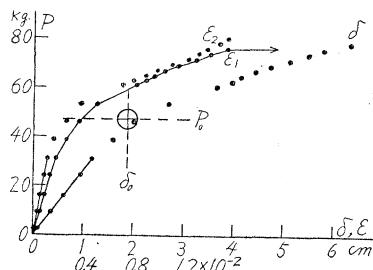


図-8, 9 の荷重-タワミ曲線をみると、単純パリなどの場合ほど明らように極限荷重が決定できないことがわかる。これは単純パリに比べて模型の構造が相当に複雑であり、かつ四点で固定支持した結果（固定用チャックは、なるべくタワミ角だけ0に拘束し、引張力が加わらないように製作したが）、タワミが大きくなると曲げ、ねじりの外に軸方向力が生ずるためであろう。しかし、図に記入した極限荷重および極限タワミの理論値と、実験の曲線を比較してみると、極限荷重の理論値はいずれもほぼ妥当な値を示していると考えてさしつかえないであろう。

5. 結論

格子ゲタ構造として一番簡単な主ゲタ2本よりなる格子ゲタにおいて、一方の主ゲタに集中荷重が一個載つた場合の極限荷重に関して、理論的並びに実験的考察を行つた。その結果を要約すると、次のようなである。

1. 一方の主ゲタのみ崩壊する場合の極限荷重の理論式を求めた。
2. 主ゲタのスパン、全塑性モーメントに対する横ゲタのスパン、全塑性モーメントの比や横ゲタの数などによつて、両主ゲタ同時に崩壊するか、載荷ゲタのみ崩壊するかが決まるわけであるが、その関係を理論的に明らかにした。
3. 格子ゲタ模型による載荷実験によつて、理論結果がほぼ妥当であることを確かめた。

なお、主ゲタの数が増加した場合、変動荷重が載る場合、降伏条件式に軸方向力を考慮した場合、主ゲタの支持条件を変えた場合その他興味ある問題が多數残されているが、著者の行つた研究が格子ゲタ構造の合理的な設計法の一助ともなれば、幸とするところである。

終りに、本研究を卒論研究の一部として、実験および計算に協力頂いた落合正治、竹内 靖、平田郁朗、藤井 雅雄の四君に感謝の意を表し、また、文部省科学研究所費の補助を得たことを付記する次第である。

参考文献

- 1) J. Heyman: J. of Appl. Mech., Vol.18, 1951, p.157
- 2) J. Heyman: J. of Appl. Mech., Vol.19, 1952, p.153
- 3) J. Heyman: Engineering, Vol.176, 1953, p.804
- 4) 文献1) 参照
- 5) H. Greenberg, W. Prager: Proc. ASCE, Vol.77, No.59, 1951
- 6) R. Hill: Q.J. of Mech. and Appl. Math., Part 1, Vol.1, 1948, p.18 あるいは文献1) 参照
- 7) P.S. Symonds, B.G. Neal: J. of Franklin Inst., Vol.252, No.6, 1951, p.469

(昭.34.3.14)