

## 放射状開水路流れの一解析

正員 荒木 正 夫\*

## HYDRAULIC BEHAVIOR OF RADIALLY OPEN CHANNEL FLOW

By Dr. Eng., Masao Araki, C.E. Member

**Synopsis :** Radially open channel flow is a flow, in which all stream lines take such direction as diverging from or converging to the supposed origin, both side-walls being vertical. An equation based on the principle of conservation of energy is derived in this paper. The hydraulic behavior of the flow is described in detail. Upon these analyses, it is shown that the classification regions of surface profiles of the flow take various and systematic changes in accordance with the difference of the bottom slope.

**要旨** 放射状開水路流れとはすべての流線が1点より発するか、または1点に向つて集中するがごとき向きを有する両側壁鉛直なる開水路流れを呼ぶものである。本論文ではこのような流れについて不等速定流公式を誘導し、この公式にもとづき流れの性質について吟味を行った。その結果、外向流、内向流ともに底勾配の変化により、水面曲線の領域および性質が系統的かつ多彩に変化することを明らかにすることができた。

## 1. 緒 言

放射状（扇形）開水路流れの特色は水深、流速および底勾配は半径  $r$  のみの関数であつて、中心角方向には変化しないことである。このような流れは、例えば（1）越流式アーチダム（図-1 (a)）、（2）河川の樋門またはポンプによる内水排除（図-1 (a)、(b)）、（3）水抜孔の周りの流れ（図-1 (c)）、（4）泉または水道の蛇口の下の流れ（図-1 (d)）、等の場合にわれわれは実際に見ることができる。

以下、このような放射状流れについて基本方程式を誘導し、続いて流れの性質について解析を加えて見ることにする。ただし流れはすべて定常的であるとし、非定常の場合については本論では取扱わない。

## 2. エネルギー関係に基づく基本方程式の誘導

## (1) 外向流

図-2 に示すように、半径  $r$  の面および微小区間  $dx$  離して半径  $(r+dx)$  の面の2つの面をとり、両断面についてエネルギー方程式を立てることにする。ここで流れの方向に底面に沿つて測つた距離を  $x$  とすれば、外向流では  $r$  と同じ向き、内向流では  $r$  と反対の向きとなる。 $\theta$  を水路両側壁のはきむ中心角、 $x$  方向の速度成分を  $u$  とすれば、仮定により  $\theta$  方向の速度成分は0となる。全流量を  $Q$ 、水深を  $h$ 、水路底の傾斜角を  $\phi$ 、水の密度を  $\rho$ 、重力の加速度を  $g$  とする。

AB 面から単位時間に流入する水を持つ全エネルギーは C 点を基準高にとれば

図-1 放射状開水路流れ

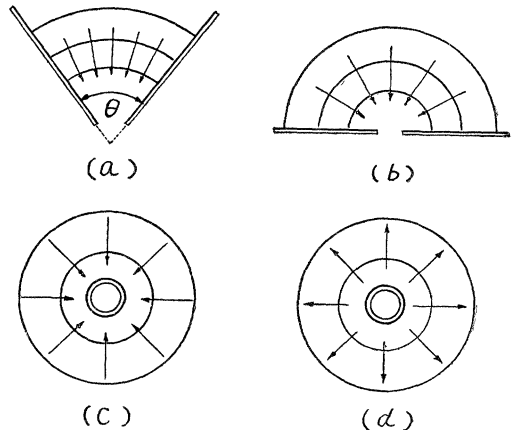
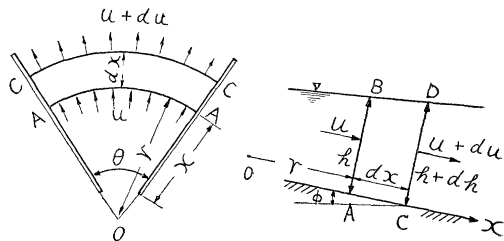


図-2 外向流



\* 工学博士，九州大学助教授，工学部土木工学教室

$$\rho g r \theta h u \left( \frac{\alpha u^2}{2g} + h \cos \phi + \sin \phi \cdot dx \right) \dots\dots\dots (1)$$

CD 面から単位時間に流出する水の有する全エネルギーは、同じく C 点を基準高にとれば

$$\rho g (r+dx)\theta(h+dh)(u+du) \left\{ \alpha \frac{(u+du)^2}{2g} + (h+dh)\cos \phi \right\} \dots\dots\dots (2)$$

また dx 区間内において摩擦抵抗によつて失われるエネルギーは C を Chezy の常数とすると

$$\rho g r \theta h u \cdot dx \cdot u^2 / C^2 h \dots\dots\dots (3)$$

(1), (2), (3) 式より高次の微小量を省略してエネルギー方程式を求めると

$$-\sin \phi + \frac{dh}{dx} \left( 2 \cos \phi + \frac{\alpha u^2}{2gh} \right) + \frac{du}{dx} \left( \frac{h}{u} \cos \phi + \frac{3\alpha u}{2g} \right) + \left( \frac{\alpha u^2}{2g} + h \cos \phi \right) \frac{1}{r} + \frac{u^2}{C^2 h} = 0 \dots\dots (4)$$

次に連続方程式は

$$r \theta h u = (r+dx)\theta(h+dh)(u+du) \dots\dots\dots (5)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -\frac{u}{h} \frac{dh}{dx} - \frac{u}{r} \dots\dots\dots (6)$$

(4), (6) 式より du/dx を消去すれば、求める次の基本方程式が得られる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sin \phi - \frac{q^2}{C^2 r^2 h^3} + \frac{\alpha q^2}{gr^3 h^2}}{\cos \phi - \frac{\alpha q^2}{gr^2 h^3}} \dots\dots\dots (7)$$

ただし

$$q = Q/\theta = rhu \dots\dots\dots (8)$$

であつて、q は単位中心角あたりの流量を意味する。以下 Q の代りに q のみを考える。なお dr/dx=1 である。

(2) 内向流

外向流の場合と全く同様にして、次の基本方程式を得ることができる (図-3)。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sin \phi - \frac{q^2}{C^2 r^2 h^3} - \frac{\alpha q^2}{gr^3 h^2}}{\cos \phi - \frac{\alpha q^2}{gr^2 h^3}} \dots\dots\dots (9)$$

ただし dr/dx=-1

(7), (9) 式において、Q, θ が消え q のみが含まれていることは、単位中心角あたりの流量が同一であれば、水面曲線は中心角 θ の大小には無関係であることを意味する。(7), (9) 式について、底勾配が比較的ゆるやかであれば

sin φ≒i, cos φ≒1 とおけるから

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{q^2}{C^2 r^2 h^3} \pm \frac{\alpha q^2}{gr^3 h^2}}{1 - \frac{\alpha q^2}{gr^2 h^3}} \dots\dots\dots (10)$$

ただし (+) 符号：外向流 (dr/dx=1), (-) 符号：内向流 (dr/dx=-1)

以下 (10) 式について吟味する。

3. 遷移点の水深と水面勾配

以下の所論においては、簡単のため C はすべて常数として取扱う。

遷移点の水深は (10) 式の分母を 0 とおくことにより

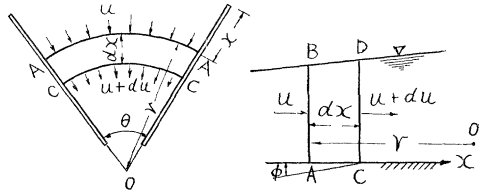
$$h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g r^2}} \dots\dots\dots (11)$$

遷移点においては (10) 式の分母、分子共に 0 となるから、(10) 式の分子を 0 とおくことにより

外向流：(h/r)<sub>c</sub>=i<sub>0</sub>-i<sub>c</sub> ..... (12)      内向流：(h/r)<sub>c</sub>=i<sub>c</sub>-i<sub>0</sub> ..... (13)

ただし i<sub>0</sub>=g/αC<sup>2</sup>, i<sub>c</sub> は遷移点 C の底勾配とする。(12), (13) 式より遷移点 (特異点) が存在するには、まず  
外向流：i<sub>0</sub>>i,      内向流：i>i<sub>0</sub>  
であることが必要である。

図-3 内向流



(1) 外向流

遷移点の水面勾配を得るために、(10)式の上下両項を別々に微分して、不定形の極限值計算により  $(dh/dx)_c$  を求めれば次の2解を得る。

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_c = \frac{i_0}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{h}{r}\right)_c \pm \frac{1}{2} \sqrt{i_0^2 - \frac{20}{9} \left(\frac{h}{r}\right)_c^2 + \frac{4}{3} h_c \left(\frac{di}{dx}\right)_c} \dots\dots\dots(14)$$

$i =$  一定、の場合には  $di/dx = 0$  であるから

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_c = \frac{i_0}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{h}{r}\right)_c \pm \frac{1}{2} \sqrt{i_0^2 - \frac{20}{9} \left(\frac{h}{r}\right)_c^2} \dots\dots\dots(15)$$

しかるに(11)式より

$$\frac{dh_c}{dx} = -\frac{2}{3} \frac{h_c}{r} \dots\dots\dots(16)$$

(15)、(16)式より、 $(dh/dx)_c$  が実数の場合について

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_c - \left(\frac{dh_c}{dx}\right)_c = \frac{i_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{i_0^2 - \frac{20}{9} \left(\frac{h}{r}\right)_c^2} > 0$$

従つて  $i =$  一定、の場合には常流より射流に遷移する支配断面は存在し得ない。 $di/dx \neq 0$  の場合には支配断面が生じ得るが、その存在の必要条件は(14)式の根号内の値が  $i_0^2$  より大きいことより次式を得る。

$$\text{支配断面} : \left(\frac{di}{dx}\right)_c > \frac{5}{3 r_c} (i_0 - i_c) > 0 \dots\dots\dots(17)$$

この関係は特異点たる遷移点に原点を移して、原点近傍の水面曲線形状を吟味すれば、(17)式は特異点が鞍形点となる条件と合致することからも証明される<sup>1)</sup>。(17)式の不等号が逆の場合には特異点は結節点(射流から常流に遷移)、または渦状点(遷移流なし)となるが、そのいずれかは(14)式の根号内の値が正または0の場合には結節点、負の場合には渦状点となる。すなわち

$$\text{結節点} : \frac{5}{3 r_c} (i_0 - i_c) > \left(\frac{di}{dx}\right)_c \geq \frac{11 i_0^2 - 40 i_0 i_c + 20 i_c^2}{12 r_c (i_0 - i_c)} \dots\dots\dots(18)$$

$$\text{渦状点} : \frac{11 i_0^2 - 40 i_0 i_c + 20 i_c^2}{12 r_c (i_0 - i_c)} > \left(\frac{di}{dx}\right)_c \dots\dots\dots(19)$$

(2) 内向流

内向流の場合にも全く同様にして

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_c = \frac{i_0}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{r}\right)_c \pm \frac{1}{2} \sqrt{i_0^2 - \frac{20}{9} \left(\frac{h}{r}\right)_c^2 + \frac{4}{3} h_c \left(\frac{di}{dx}\right)_c} \dots\dots\dots(20)$$

$i =$  一定、の場合

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_c = \frac{i_0}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{r}\right)_c \pm \frac{1}{2} \sqrt{i_0^2 - \frac{20}{9} \left(\frac{h}{r}\right)_c^2} \dots\dots\dots(21)$$

内向流の場合にも、同様にして  $i =$  一定、の場合には、常流から射流に遷移する支配断面は存在しない。 $i > i_0$  の場合には特異点が存在するが、この特異点の種類について鞍形点(支配断面)、結節点(射流から常流に遷移)、渦状点(遷移流なし)の存在範囲は同様にして

$$\text{支配断面} : \left(\frac{di}{dx}\right)_c > \frac{5}{3 r_c} (i_c - i_0) > 0 \dots\dots\dots(22)$$

$$\text{結節点} : \frac{5}{3 r_c} (i_c - i_0) > \left(\frac{di}{dx}\right)_c \geq \frac{11 i_0^2 - 40 i_0 i_c + 20 i_c^2}{12 r_c (i_c - i_0)} \dots\dots\dots(23)$$

$$\text{渦状点} : \frac{11 i_0^2 - 40 i_0 i_c + 20 i_c^2}{12 r_c (i_c - i_0)} > \left(\frac{di}{dx}\right)_c \dots\dots\dots(24)$$

ここで後章での取扱の便宜上、(15)、(21)両式を書き改めれば、いずれも次の同一式となる。

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_c = \frac{i_0}{6} \left(4 p - 1 \pm \sqrt{-11 + 40 p - 20 p^2}\right) \dots\dots\dots(25)$$

ここに  $p = i/i_0$ 。

4. 外向流の解析

(1) 基本式

本章以下ではすべて  $i =$  一定、の場合のみを取扱う。なお、本解析に当つては取扱の便宜上水深  $h$  のほかに水面高  $H$  も用いることにする。従つて基本方程式としては次の2式となる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{ih^3 - i_0 h_c^3 + \frac{h}{r} h_c^3}{h^3 - h_c^3} \dots \dots \dots (26)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dh}{dx} - i = \frac{h_c^3(i - i_0 + h/r)}{h^3 - h_c^3} \dots \dots \dots (27)$$

(26) 式の分子を 0 ならしめる  $h$  の値を  $h_1$  とすると、 $h_1$  は次式を満足する。 $h_1$  と  $r$  との関係を  $h_1$  曲線と呼ぶ。

$$ih_1^3 + \frac{\alpha q^2}{gr^3} h_1 - \frac{q^2}{C^2 r^2} = 0 \dots \dots \dots (28)$$

$h=h_1$  かつ  $h=h_c$  の場合には、 $dh/dx=0$  すなわち水面が底面に平行となる。(27) 式の分子を 0 ならしめる  $h$  の値を  $h_2$  とすると、 $h_2$  は次式を満足する。 $h_2$  と  $r$  との関係を  $h_2$  線と呼ぶ。

$$h_2 = r(i_0 - i) \dots \dots \dots (29)$$

$h=h_2$  かつ  $h=h_c$  の場合には  $dH/dx=0$  すなわち水面水平となる。

$i=0$  の場合には  $h_1$  曲線と  $h_2$  線とは全く一致して

$$h_1 = h_2 = i_0 r \dots \dots \dots (30)$$

(11) 式で与えられる  $h_c$  曲線とここに定義した  $h_1$  曲線、 $h_2$  線の 3 曲線が領域境界線となるのであるが、このうち  $h_2$  線は下流に向つて増大直線 ( $0 \rightarrow \infty$ )、 $h_c$  曲線は  $r^{-2/3}$  に比例するから下流に向つて上に凹に単調減少 ( $\infty \rightarrow 0$ ) する。 $h_1$  曲線については次節で吟味する。

### (2) $h_c$ , $h_1$ , $h_2$ 3 曲線の相互位置 ( $i \geq 0$ )

$$(11), (28), (29) \text{ 式より } h_1^3 - h_c^3 = (i_0 - i - h_1/r) h_c^3 / i = (h_2 - h_1) h_c^3 / i r \dots \dots \dots (31)$$

これより  $h_c$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  3 曲線の交点は常に 1 点に会すること、およびその交点は 1 つまたは 0 箇 ( $i \geq i_0$  の場合) しか存在し得ないことがわかる。

(a)  $i \geq i_0$  の場合 (31) 式より  $h_c > h_1$  すなわち  $h_1$  曲線は常に  $h_c$  曲線の下にあつて、両曲線は交ることがない。 $h_2$  線は存在しない。

(b)  $i_0 > i > 0$  の場合  $h_c \geq h_1 \geq h_2$  または  $h_2 \geq h_1 \geq h_c$

よつて  $h_1$  曲線は  $h_c$  曲線と  $h_2$  線の間域にのみ存在する。

(c)  $0 > i$  の場合  $h_1 > h_c$ ,  $h_1 > h_2$  または  $h_1 < h_c$ ,  $h_1 < h_2$

すなわち  $h_1$  曲線は  $h_c$ ,  $h_2$  両曲線の間域には存在しない。

### (3) $h_1$ 曲線の形状追跡

(a)  $i > 0$  の場合 (28) 式より

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{h_c^3(3h_1 - 2i_0 r)}{r(3ih_1^2 + h_c^3)} \dots \dots \dots (32)$$

(32) 式の分子を 0 ならしめる  $h_1$  の値を  $h_m$ 、その時の  $r$  を  $r_m$  とすれば、これは常にただ 1 箇存在する。

$$h_m = \frac{2}{3} i_0 r_m, r_m = \left( \frac{9q^2}{8ii_0^3 C^2} \right)^{1/5} \dots \dots \dots (33), (34)$$

次に、 $r=r_m$  の時の  $h_c$  の値を  $h_{cm}$  とする。また  $i_0 > i$  の場合には  $h_c$ ,  $h_1$  両曲線の交点  $C$  が存在するので、その交点  $C$  の  $r$  を  $r_c$  とすれば (図-4)

$$\frac{h_m}{h_{cm}} = \left( \frac{1}{3p} \right)^{1/3}, \frac{r_m}{r_c} = \left\{ \frac{9(1-p)^3}{8p} \right\}^{1/5} \dots \dots \dots (35), (36)$$

$h_m/h_{cm}$ ,  $r_m/r_c$  は  $p$  のみの関数となることは興味深い。(  $d^2 h_1 / dx^2 )_{h_1=h_m} < 0$  であるから  $h_m$  は極大値である。かつ  $r \rightarrow 0$  のとき  $h_1 \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  のとき  $h_1 \rightarrow 0$  となる。

次に  $h_1$  曲線の変曲点  $I(h_i, r_i)$  は  $d^2 h_1 / dx^2 = 0$  を計算することにより、常にただ 1 点存在する。

$$h_i = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} i_0 r_i, r_i = \left( \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} \frac{q^2}{ii_0^3 C^2} \right)^{1/5} > r_m \dots \dots \dots (37), (38)$$

$$\frac{r_i}{r_c} = \left\{ \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} \frac{(1-p)^3}{p} \right\}^{1/5} \dots \dots \dots (39)$$

これより  $i_0 > i > 0.618 i_0$  のとき  $r_i < r_c$ ,  $i = 0.618 i_0$  のとき  $r_i = r_c$  ( $C$  と  $I$  は一致)

$0.618 i_0 > i > 0$  のとき  $r_i > r_c$

(b)  $i < 0$  の場合

$$\frac{dr}{dh_1} = \frac{h_c^3(3i_0 r - 2h_1)}{h_1(i_0 h_c^3 + 3i h_1^3)} \dots \dots \dots (40)$$

(40) 式の分子を0ならしめる  $h_1$  の値を  $h_n$ , その時の  $r$  を  $r_n$  とすれば, これは常にただ1箇存在する。

$$h_n = \frac{3}{2} i_0 r_n, r_n = \left( \frac{4q^2}{27|i| i_0^3 C^2} \right)^{1/5} \dots\dots\dots(41), (42)$$

$$\frac{h_n}{h_{cn}} = \left( \frac{1}{2|p|} \right)^{1/3}, r_n = \left\{ \frac{4(1-p)^3}{27|p|} \right\}^{1/5} \geq 1 \dots\dots\dots(43), (44)$$

ここに  $h_{cn}$  は  $r=r_n$  における  $h_c$  の値である。また  $(d^2r/dh_1^2)_{r=r_n} < 0$  となるから  $r_n$  は極大値である。かつ,  $r \rightarrow 0$  のとき  $h_1 \rightarrow 0$  および  $h_1 \rightarrow \infty$  の2値となる。

次に  $h_1$  曲線の変曲点  $I(h_i, r_i)$  は常にただ1点存在する。

$$h_i = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} i_0 r_i > h_n, r_i = \left( \frac{5\sqrt{5} - 11}{2} \frac{q^2}{|i| i_0^3 C^2} \right)^{1/5} \dots\dots\dots(45), (46)$$

- $0 > i > -0.130 i_0$  のとき  $h_i > h_c, r_i > r_c$
- $i = -0.130 i_0$  "  $h_i > h_c, r_i = r_c$
- $-0.130 i_0 > i > -1.618 i_0$  "  $h_i > h_c, r_i < r_c$
- $i = -1.618 i_0$  "  $h_i = h_c, r_i = r_c$  (C と I は一致)
- $-1.618 i_0 > i$  "  $h_i < h_c, r_i > r_c$

(4)  $i \geq i_0$  ( $p \geq 1$ ) の水面曲線

$h_c, h_1$  の2領域境界線を図-4 (a) に示すか、 $h_1$  曲線上の  $h_m$  に相当する点を今後 M 点と称する。(33), (34) 式より M 点は勾配が急になるに従って, 低くなることかといえる。かつ

$$(h_m/h_{cm})_{\max} = 0.693 (i = i_0 \text{ のとき}) \dots\dots\dots(47)$$

(a) 常流域 ( $h > h_c$ )  $dH/dx > 0, dh/dx > 0$ ; 水面上昇, 水深増加 (a 領域)

(b) 射流域 ( $h < h_c$ )

(i)  $h_c > h > h_1$ :  $dH/dx < 0, dh/dx < 0$ , 水面低下, 水深減少 ( $a_{s1}$  領域)

(ii)  $h_1 > h > 0$ :  $dH/dx < 0, dh/dx > 0$ , 水面低下, 水深増加 ( $a_{s2}$  領域)

(c) 領域移行 ここに領域移行と称するのは, 常流, 射流各域の内部での移行であつて, 常流から射流へ, または射流から常流への場合を含まない。これらの場合は既述のごとく遷移と称し, 次章で一括論ずる。まずこの吟味に必要な関係式を示すと, 水面曲線と  $h_1$  曲線および  $h_2$  線との交点においては, (26) 式よりそれぞれ

$$\left( \frac{d^2h}{dx^2} \right)_{h=h_1} = \frac{h_c^3(2i_0r-3h)}{r^2(h^3-h_c^3)}, \left( \frac{d^2h}{dx^2} \right)_{h=h_2} = \frac{h_c^3(2i-i_0)}{r(h^3-h_c^3)} \dots\dots\dots(48), (49)$$

$0 < r < r_m$  において,  $a_{s1} \rightarrow a_{s2}$  (移行点において水面曲線形は上に凹)

$r = r_m$  において, 移行せず ( $(d^2h/dx^2)_{h=h_m} = 0, (d^2h_1/dx^2)_{h_1=h_m} < 0$  より明らか)

$r_m < r < \infty$  において,  $a_{s2} \rightarrow a_{s1}$  (移行点において水面曲線形は上に凸)

上記において  $\rightarrow$  は矢印の方向にのみ移行可能なことを表す。以下同様。また以後においては(移行点において水面曲線形は上に凹)の代りに, 単に(上に凹)と記すことにする。

(5)  $i_0 > i > i_0/3$  の水面曲線

$h_c, h_1, h_3$ , 3 境界線を図-4 (b) に示す。(36) 式より M 点は常に遷移点 C より上流側に位置する。

(a) 常流域 ( $h > h_c$ )

(i)  $h > h_2$ : 水面上昇, 水深増加 ( $b_c$  領域) (ii)  $h_2 > h > h_1$ : 水面低下, 水深増加 ( $b_2$  領域)

(iii)  $h_1 > h > h_c$ : 水面低下, 水深減少 ( $b_3$  領域)

(b) 射流域 ( $h < h_c$ )

(i)  $h_c > h > h_1$ : 水面低下, 水深減少 ( $b_{s1}$  領域) (ii)  $h_1 > h > h_2$ : 水面低下, 水深増加 ( $b_{s2}$  領域)

(iii)  $h_2 > h > 0$ : 水面上昇, 水深増加 ( $b_{s3}$  領域)

(c) 領域移行 (その1) ( $i_0 > i \geq i_0/2$ ) この勾配範囲においては  $h_2$  線が水平または下向き勾配を有する(図-4 (b) の通り)。

(i) 常流域:  $b_2 \rightarrow b_1$  (上に凹),  $b_3 \rightarrow b_2$  (上に凹), ただし  $i = i_0/2$  においては  $b_1, b_2$  間の移行なし。

(ii) 射流域:  $b_{s3} \rightarrow b_{s2}$  (上に凸) ( $i = i_0/2$  のとき不能)

$b_{s1} \rightarrow b_{s2}$  (上に凹) ( $0 < r < r_m$  において),  $b_{s2} \rightarrow b_{s1}$  (上に凸) ( $r_m < r < r_c$  において)

$r = r_m$  においては  $b_{s1}, b_{s2}$  間の移行なし。

(d) 領域移行 (その2) ( $i_0/2 > i > i_0/3$ )  $h_2$  線は図-4 (b) と異なり上向き勾配を有する。

(1) 常流域:  $b_1 \rightarrow b_2$  (上に凸),  $b_3 \rightarrow b_2$  (上に凹) (ii) 射流域:  $b_{s2} \rightarrow b_{s3}$  (上に凹)

$b_{s1}, b_{s2}$  相互間の移行については, 上記  $i_0 > i \geq i_0/2$  の場合と全く同じである。

(6)  $i = i_0/3$  の水面曲線

M 点は C 点と一致する (図-4 (c))。

(a) 常流域 本域は  $c_1, c_2, c_3$  の3領域に区分されるが, これらはそれぞれ  $b_1, b_2, b_3$  領域と同一の特性を有する。

(b) 射流域  $c_{s1}, c_{s2}, c_{s3}$  領域に区分され, これらはそれぞれ  $b_{s1}, b_{s2}, b_{s3}$  域に相当する。

(c) 領域移行

(i) 常流域:  $c_1 \rightarrow c_2$  (上に凸),  $c_3 \rightarrow c_2$  (上に凹)

(ii) 射流域:  $c_{s1} \rightarrow c_{s2}$  (上に凹),  $c_{s2} \rightarrow c_{s3}$  (上に凹)

図-4 (a)  $i \geq i_0$  (外向流) の水面曲線

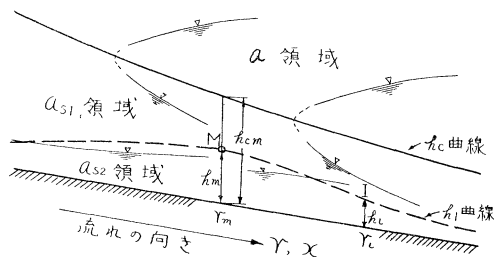


図-4 (c)  $i = i_0/3$  (外向流)

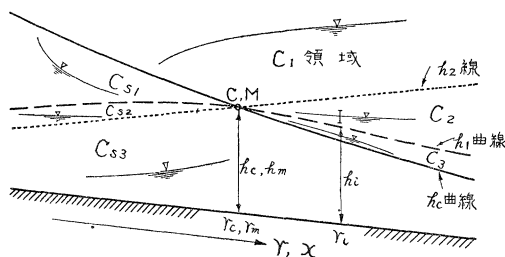


図-4 (e)  $i = 0$  (外向流)

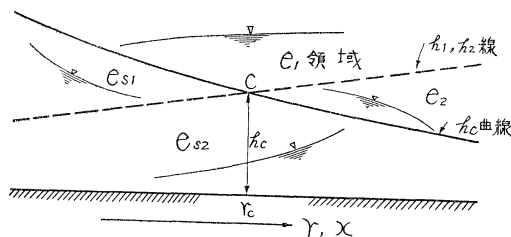


図-4 (g)  $i = -i_0/2$  (外向流)

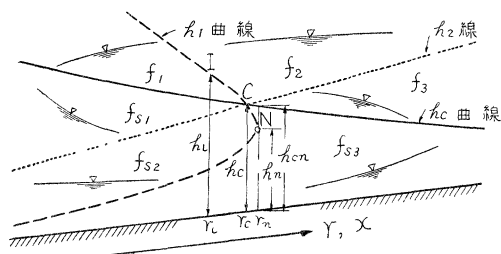


図-4 (b)  $i_0 > i > i_0/3$  (外向流)

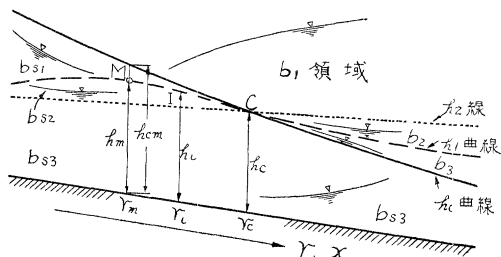


図-4 (d)  $i_0/3 > i > 0$  (外向流)

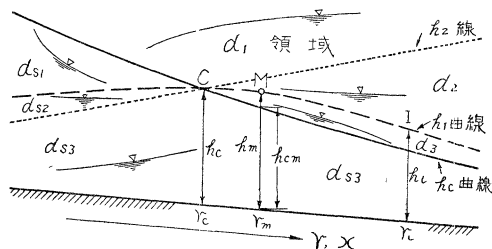


図-4 (f)  $0 > i > -i_0/2$  (外向流)

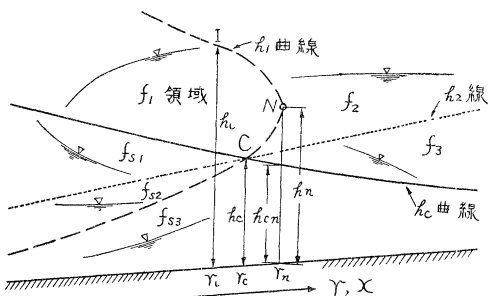
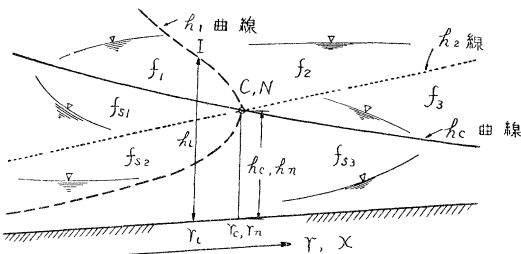


図-4 (h)  $-i_0/2 > i$  (外向流)



(7)  $i_0/3 > i > 0$  の水面曲線

M 点は常に C 点の下流側に位置する(図-4 (d))。

(a) 常流域  $d_1, d_2, d_3$  の3領域に区分され, これらもそれぞれ  $b_1, b_2, b_3$  に相当する。

(b) 射流域  $d_{s1}, d_{s2}, d_{s3}$  の3領域に区分され, それぞれ  $b_{s1}, b_{s2}, b_{s3}$  に相当する。

(c) 領域移行

(i) 常流域:  $d_1 \rightarrow d_2$  (上に凸),  $d_2 \rightarrow d_3$  (上に凸) ( $r_c < r < r_m$ ),  $d_3 \rightarrow d_2$  (上に凹) ( $r_m < r$ )

(ii) 射流域:  $d_{s1} \rightarrow d_{s2}$  (上に凹),  $d_{s2} \rightarrow d_{s3}$  (上に凹)

(8)  $i = 0$  の水面曲線

$h_1$  曲線と  $h_2$  線は一致する(図-4 (e))。

(a) 常流域 ( $h > h_c$ )

(i)  $h > h_1$ : 水面上昇, 水深増加 ( $e_1$  領域)

(ii)  $h_1 > h > h_c$ : 水面低下, 水深減少 ( $e_2$  領域)

(b) 射流域 ( $h < h_c$ )

(i)  $h_c > h > h_1$ : 水面低下, 水深減少 ( $e_{s1}$  領域)

(ii)  $h_1 > h > 0$ : 水面上昇, 水深増加 ( $e_{s2}$  領域)

(c) 領域移行:  $e_1 \rightarrow e_2$  (上に凸),  $e_{s1} \rightarrow e_{s2}$  (上に凹)

(9)  $0 > i$  の水面曲線

(a)  $h_1$  曲線の形状  $h_c, h_1, h_2$  3境界線の相互位置は, 図-4 (f), (g), (h) に示すように3通りの変化を示す。すなわち

(i)  $0 > i > -i_0/2$ , においては  $h_1$  曲線上の  $h_n, r_n$  に当る点を N 点と呼ぶと, N 点は C 点より下流側にし、かつ  $h_2$  線より上側に位置する。

(ii)  $i = -i_0/2$ , においては N 点は C 点と一致する。

(iii)  $-i_0/2 > i$ , においては N 点は C 点より下流側, かつ  $h_c$  曲線より下側に位置する。このように  $h_1$  曲線の形状は変化するが, その領域および移行の特性は次に記すごとく変わらない。

(b) 常流域 ( $h > h_c$ )

(i)  $h_1$  曲線の内側(左側): 水面上昇, 水深増加 ( $f_1$  領域)

(ii)  $h_1$  曲線の外側かつ  $h > h_2$ : 水面上昇, 水深減少 ( $f_2$  領域)

(iii)  $h_2 > h > h_c$ : 水面低下, 水深減少 ( $f_3$  領域)

(c) 射流域 ( $h < h_c$ )

(i)  $h_c > h > h_2$ : 水面低下, 水深減少 ( $f_{s1}$  領域)

(ii)  $h_1$  曲線の内側かつ  $h > h_2$ : 水面上昇, 水深減少 ( $f_{s2}$  領域)

(iii)  $h_1$  曲線の外側: 水面上昇, 水深増加 ( $f_{s3}$  領域)

(d) 領域移行: (48) 式の分子は  $0 > i$  の場合には常に負となるから

(i) 常流域:  $f_1 \rightarrow f_2$  (上に凸),  $f_2 \rightarrow f_3$  (上に凸)

(ii) 射流域:  $f_{s1} \rightarrow f_{s2}$  (上に凹),  $f_{s2} \rightarrow f_{s3}$  (上に凹)

5. 射流から常流への遷移(外向流)

すでに述べたごとく,  $i = \text{一定}$  の場合には常流から射流へは遷移しないが, 射流から常流へは跳水をとまわずに遷移する場合があるので以下それを論ずる。跳水を生ずる場合については本編では取扱わない。(18) 式より

$$1 > p \geq 1 - \sqrt{0.45} = 0.329 \dots\dots\dots (50)$$

の底勾配範囲においては, C 点は結節点となつてすべての積分曲線が通る。その他の勾配範囲については,  $p \geq 1$  の場合には C 点が存在せず, また  $0.329 > p$  の場合には C 点は渦状点となるから, いずれにせよ遷移流はあり得ない。ここで(25) 式を2つに分けて

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c1} = \frac{i_0}{6} (4p - 1 - \sqrt{-11 + 40p - 20p^2}) \dots\dots\dots (51)$$

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c2} = \frac{i_0}{6} (4p - 1 + \sqrt{-11 + 40p - 20p^2}) \dots\dots\dots (52)$$

とおくと,  $(dh/dx)_{c1}$  は1本をのぞくすべての積分曲線の C 点における勾配であるが,  $(dh/dx)_{c2}$  は独立のただ1本のみの積分曲線の C 点における勾配であることが証明される。次に(16), (29), (32) 式より各領域境界線の C 点における勾配は次式にて与えられる。

$$\left(\frac{dh_e}{dx}\right)_c = -\frac{2}{3} i_0(1-p), \left(\frac{dh_1}{dx}\right)_c = i_0 \frac{(1-3p)(1-p)}{1+2p}, \left(\frac{dh_2}{dx}\right)_c = i_0(1-p) \dots\dots (53), (54), (55)$$

(51)~(55) 式の値を比較することにより、表-1 の結果を得る。

表-1

底 勾 配	$(dh/dx)_{c_1}$ の遷移流	$(dh/dx)_{c_2}$ の遷移流
$i_0 > i > i_0/2$	$b_{s1} \rightarrow b_3^*$	$b_{s3} \rightarrow b_1^{**}$
$i = i_0/2$	$b_{s1} \rightarrow b_3^*$	水平直線解**
$i_0/2 > i > i_0/3$	$b_{s1} \rightarrow b_3^*$	$b_{s2} \rightarrow b_2$
$i = i_0/3$	$c_{s1}, c_{s2} \rightarrow c_2, c_3$	$c_{s2} \rightarrow c_2$
$i_0/3 > i > 0.329 i_0$	$d_{s2} \rightarrow d_2$	$d_{s2} \rightarrow d_2$
$i_0 = 0.329 i_0$	$d_{s2} \rightarrow d_2$	—

表-1 において\*\*印をのぞけば、他はすべて水面は下流に向つて下向き勾配を有する。また \*印では水深も減少の向きである。\*\*印のうち  $i = i_0/2$  の場合には、 $0 < r < \infty$  の全水路長にわたる水平直線水面が解となるが、これは広矩形一様断面水路における  $i = i_0$  の場合の水面形と同様である。C 点における遷移流の状況を図-5 に示した。

6. 内向流の解析

(1) 基本式

$$\frac{dh}{dx} = \frac{ih^3 - i_0 h_c^3 - \frac{h}{r} h_c^3}{h^3 - h_c^3} \dots \dots \dots (56)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{h_c^3(i - i_0 - h/r)}{h^3 - h_c^3} \dots \dots \dots (57)$$

(56)式の分子を0ならしめる  $h$  の値を  $h_1$  とし、(57)式の分子を0ならしめる  $h$  の値を  $h_2$  とする。

$$ih_1^3 - \frac{\alpha q^2}{g r^3} h_1 - \frac{q^2}{C^2 r^2} = 0 \dots \dots \dots (58) \quad h_2 = r(i - i_0) \dots \dots \dots (59)$$

$h_2$  線は下流に向つて減少直線、 $h_c$  曲線は下流に向つて上に凹に単調増大する。

(2)  $h_c, h_1, h_2, 3$  曲線の相互位置

$$h_1^3 - h_c^3 = (i_0 - i + h_1/r) h_c^3 / i = (h_1 - h_2) h_c^3 / i r \dots \dots \dots (60)$$

(a)  $i > i_0$  の場合 (60) 式より  $h_c, h_1, h_2, 3$  曲線の交点は常に1点に会すること、およびその交点は1つ存在することが分る。また  $h_1$  曲線は  $h_c, h_2$  両曲線の間域には存在しない。

(b)  $i_0 \geq i > 0$  の場合 (60) 式より  $h_1 > h_c$ 、すなわち  $h_1$  曲線は常に  $h_c$  曲線のの上側にあつて両曲線は交ることがない。 $h_2$  線は存在しない。

(c)  $0 \geq i$  の場合  $h_1, h_2$  両曲線はいずれも存在しない。

(3)  $h_1$  曲線の形状追跡 ( $i > 0$ )

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{h_1(3h_1 + 2i_0 r)}{r(2h_1 + 3i_0 r)} > 0 \dots \dots \dots (61)$$

また  $d^2 h_1 / dx^2 > 0$  となるから、 $h_1$  曲線は下流に向つて上に凹に単調増大する。かつ

$$r \rightarrow \infty \text{ のとき } h_1 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \text{ のとき } h_1 \rightarrow \infty$$

(4)  $i > i_0 (p > 1)$  の水面曲線

$h_c, h_1, h_2$  の3領域境界線を図-6 (a) に示す。

(a) 常流域 ( $h > h_c$ )

(i)  $h_2 > h > h_c$  : 水面上昇, 水深増加 ( $a_1$  領域)      (ii)  $h > h_2, h > h_1$  : 水面低下, 水深増加 ( $a_2$  領域)

(iii)  $h_1 > h > h_c$  : 水面低下, 水深減少 ( $a_3$  領域)

(b) 射流域 ( $h > h_c$ )

(i)  $h_c > h > h_1$  : 水面低下, 水深減少 ( $a_{s1}$  領域)      (ii)  $h_1 > h, h_2 > h$  : 水面低下, 水深増加 ( $a_{s2}$  領域)

(iii)  $h_c > h > h_2$  : 水面上昇, 水深増加 ( $a_{s3}$  領域)

(c) 領域移行

(i) 常流域 :  $a_1 \rightarrow a_2$  (上に凸),  $a_2 \rightarrow a_3$  (上に凸)      (ii) 射流域 :  $a_{s1} \rightarrow a_{s2}$  (上に凹),  $a_{s2} \rightarrow a_{s3}$  (上に凹)

(5)  $i_0 \geq i > 0$  の水面曲線 (図-6 (b))

(a) 常流域

(i)  $h > h_1$  : 水面低下, 水深増加 ( $b_1$  領域)      (ii)  $h_1 > h > h_c$  : 水面低下, 水深減少 ( $b_2$  領域)

(b) 射流域 水面上昇, 水深増加 ( $b_s$  領域)

(c) 領域移行  $b_1 \rightarrow b_2$  (上に凸)

(6)  $0 \geq i$  の水面曲線 (図-6 (c))

(a) 常流域 水面低下, 水深減少 ( $c$  領域)

(b) 射流域 水面上昇, 水深増加 ( $c_s$  領域)



7. 射流から常流への遷移 (内向流)

内向流においても射流から常流へは跳水をとまわずに遷移する場合がある。すなわち (23) 式より

$$1 < p \leq 1 + \sqrt{0.45} = 1.671 \dots\dots\dots (62)$$

の底勾配範囲においては、C 点は結節点となつて射流から常流に遷移する。その他の底勾配については  $p > 1.671$  においては C 点は渦状点となり、 $1 \geq p$  では C 点が消滅するので、いずれも遷移流は存在しない。 $(dh/dx)_{c1}$ 、 $(dh/dx)_{c2}$  を (51)、(52) 式と同式で定義すると、内向流の場合も  $(dh/dx)_{c1}$  は 1 本をのぞくすべての積分曲線の C 点における勾配であり、 $(dh/dx)_{c2}$  は独立のただ 1 本のみの積分曲線の C 点における勾配である。なお、(53)~(55) 式は内向流の場合にも成立するから、これらの値を吟味すれば 表-2 の結果を得る。

本表の遷移点における水面勾配はすべて下流に向つて下向き勾配を有する (ただし水深はすべて増加の向き)。C 点における遷移流の状況を 図-7 に示す。

表-2

底勾配	$(dh/dx)_{c1}$ の遷移流	$(dh/dx)_{c2}$ の遷移流
$1.671 i_0 > i > i_0$ $i = 1.671 i_0$	$a_{s2} \rightarrow a_2$ $a_{s2} \rightarrow a_2$	$a_{s2} \rightarrow a_2$ —

図-5 C 点近傍の水面曲線群 (外向流)

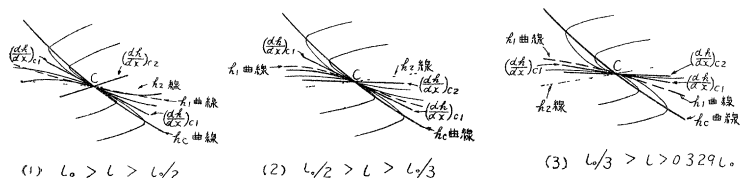


図-6 (a)  $i > i_0$  (内向流) の水面曲線

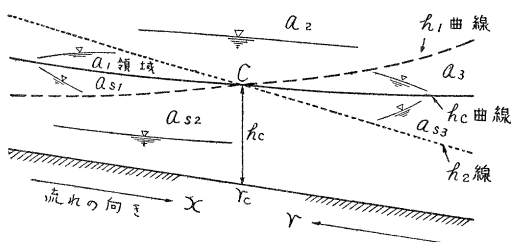


図-6 (b)  $i_0 \geq i > 0$  (内向流)

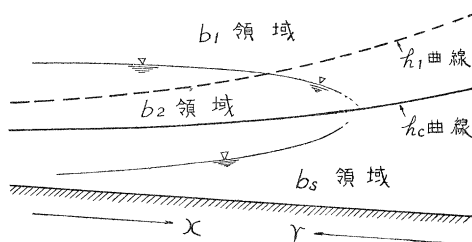


図-6 (c)  $0 \geq i$  (内向流)

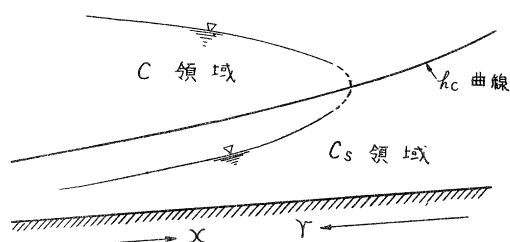
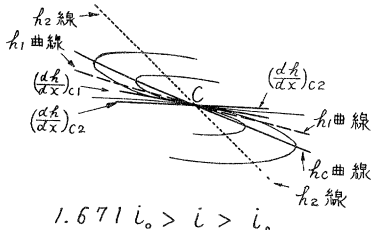


図-7 C 点近傍の水面曲線群 (内向流)



8. 結 語

以上の解析により次の諸事項を明らかにすることができた。

- (1) 放射状開水路流れに対する不等速定流公式を誘導した。
- (2) 外向流については底勾配の変化によつて、8 種に区分し、そのおのおのについての領域特性を示した。
- (3) 内向流は外向流よりもはるかに単純であつて、底勾配の変化によつて 3 種に区分されるのみであつた。
- (4) 外向流、内向流ともに遷移流の特性を明らかにした。

ただ、本取扱においては便宜上、変化するはずの C を常数と見なしているのであるから、多少近似的なものと考えなければならない。なお、放射状流れの跳水現象については、別箇の取扱と実験的考察を必要とするので、他の機会にゆずることとした。

参 考 文 献

1) 岩佐義朗, 村上 温: 幅の変化する水路におけ遷移流の特性について, 第3回水理研究会講演会, 昭.33-5 (昭.33.9.20)