

不完全合成桁材のねじり

正 員 山 本 稔*

TORSION OF AN INCOMPLETE COMPOSITE BEAM

By Minoru Yamamoto, C.E. Member

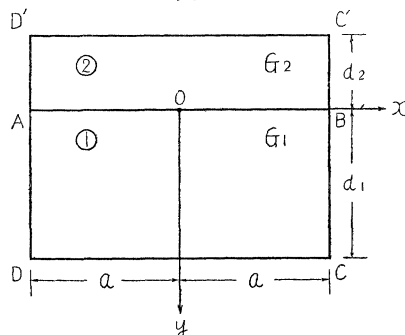
Synopsis : The author proposes a new theory of an incomplete composite rectangular beam composed of two rectangular beams of different shear modulus combined at their sides, on the basis of St. Venant's torsional theory, and examines the torsional moment and the stress distribution in the bond surface by means of numerical calculation.

要旨 剛性率の異なる2種の矩形材をその側面で一樣に結合して作った合成矩形桁材の St. Venant のねじり理論を組立てるとともに、数値計算によつて端面に働くねじりモーメントおよび接合面のせん断応力分布について考察した。

1. 緒 言

合成桁では材相互の結合の程度に応じてズレが接合面に発生するからせん断応力が完全に伝達されず、従つて曲げ剛性が低下するが、この現象については実験および理論ですでに種々論じられてきた。これと同様な現象が合成桁材のねじり剛性においても存在するわけで単一材のねじりとはその様相を異にすると考えられる。しかし筆者の知るところではこの方面の研究はいまだ見あたらないようである。そこでこの一事例としてまず図-1に示すごとき断面の合成桁材の純ねじり問題を取扱つてみることにしよう。この材は剛性率 G_1 なる矩形材 ABCD と同じく剛性率 G_2 なる矩形材 ABC'D' とを接合面いたるところで一樣に接合してつくられている。そして簡単のため普通しばしば用いられているようにこの接合面のせん断応力はその面のズレに比例するとする。このような仮定を設けると境界条件が総て定まり St. Venant のねじり問題は解けることになる。次にはこの理論の概要を述べるとともに数値計算例からねじり剛性や接合面のせん断応力分布についても調べたいと思う。

図-1



また最近構造法の進歩により桁のねじり剛性も考慮されるような傾向になつてきたから、この種の問題の解明は設計上の参考にもなると思われる。

2. 微分方程式および境界条件

以下簡単のために ABCD 断面材を ① 材, ABC'D' 断面材を ② 材と呼ぶ。そして各種記号**に ① 材にかんするものは添符 1 を ② 材にかんするものは添符 2 をつけて、それが属する材を区別することにす。例えば ϕ_1, τ_{xy1} は ① 材にかんする応力関数およびせん断応力 τ_{xz} などのごとし。ねじり角は両材で同一であるから単位長さ当りのねじり角を θ とすれば St. Venant のねじりは次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \text{① 材において} \quad & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = -2 G_1 \theta \\ \text{② 材において} \quad & \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = -2 G_2 \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

応力および変位の主なる関係をあげれば次のごとし。ただし添符 1 および 2 は省略してある。

* 東京都立大学講師, 工学部土木工学教室
 ** 記号はとくにことわらざるかぎり Timoshenko and Goodier 著 "Theory of Elasticity" (1951年) による。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} & \tau_{yz} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0 \\ u &= -yz\theta & v &= xz\theta \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \theta y + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} &= -\theta x - \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

周辺の条件は側面に外力が働かぬことから定められる。側面において x 軸方向, y 軸方向ともに表面力が存在しないことは式 (2) から明らかである。従つて z 軸方向の表面力が 0 であることが条件となる。これは

$$\left. \begin{aligned} \text{① 材の AD, DC, CB 面で} & \quad \phi_1 = 0 \\ \text{② 材の AD', D'C', C'B 面で} & \quad \phi_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

とすればよい。かく定めると他の周辺をかたちづくる端面には合力として, ねじりモーメントしか働かないことも証明できる。次に連続条件について考える。接合面 AB には式 (2) から x 軸方向および y 軸方向の力が存在しないことが明らかであり, また変位 u, v も等しいから, τ_{yz} と変位 w とに連続条件を考えればよい。かくて応力の連続性からただちに

$$\tau_{yz1}|_{y=0} = \tau_{yz2}|_{y=0} \dots \dots \dots (4)$$

をうる。また仮定から接合面のズレはそこに発生するせん断応力に比例するから k' を常数として次式をうる。

$$(w_1|_{y=0} - w_2|_{y=0})k' = \tau_{yz1}|_{y=0} \dots \dots \dots (5)$$

従つて問題は条件 (3), (4), (5) を満足するような応力関数を求めることにきする。

3. 条件方程式

微分方程式 (1) の解として次の級数を用いる。

① 材において

$$\phi_1 = G_1 \theta a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ A_{1(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + B_{1(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right\} \dots (6)$$

② 材において

$$\phi_2 = G_2 \theta a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ A_{2(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + B_{2(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right\}$$

ここに $A_{1(2n+1)}, B_{1(2n+1)}, A_{2(2n+1)}, B_{2(2n+1)}$ は任意常数で境界条件から決定される。

これら応力関数は $x = \pm a$ (AD, CB, AD', C'B 面) においてすでに条件 (3) を満足している。また DC, D'C' 面でもこの条件を満足しなければならないから

$y = d_1$ (DC 面) で

$$G_1 \theta a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ A_{1(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1 + B_{1(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1 \right\} = 0$$

$y = -d_2$ (D'C' 面) で

$$G_2 \theta a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ A_{2(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2 - B_{2(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2 \right\} = 0$$

が成立しなければならない。ここで $\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$ を Fourier の級数に展開して整理すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ (-1)^n \frac{2^5 G_1 \theta a^2}{(2n+1)^3 \pi^3} + A_{1(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1 + B_{1(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1 \right\} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ (-1)^n \frac{2^5 G_2 \theta a^2}{(2n+1)^3 \pi^3} + A_{2(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2 - B_{2(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2 \right\} = 0$$

これらは x の値いかんにかかわらず成立しなければならない。かくして条件 (3) は次のように書きなおされる。

$$\left. \begin{aligned} A_{1(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1 + B_{1(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1 &= (-1)^{n+1} \frac{2^5 G_1 \theta a^2}{(2n+1)^3 \pi^3} \\ A_{2(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2 - B_{2(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2 &= (-1)^{n+1} \frac{2^5 G_2 \theta a^2}{(2n+1)^3 \pi^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

次に式 (2) および (6) から

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz1}|_{y=0} &= 2G_1\theta a \frac{x}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{1(2n+1)} \frac{(2n+1)\pi}{2a} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \\ \tau_{yz2}|_{y=0} &= 2G_2\theta a \frac{x}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2(2n+1)} \frac{(2n+1)\pi}{2a} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

これを条件 (4) に代入して

$$2\theta a(G_1 - G_2) \frac{x}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi}{2a} \{A_{1(2n+1)} - A_{2(2n+1)}\} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x = 0$$

ここで $\frac{x}{a}$ を Fourier の級数に展開して整理すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left[(-1)^n \frac{2^4}{(2n+1)^2\pi^2} (G_1 - G_2)\theta a + \frac{(2n+1)\pi}{2a} \{A_{1(2n+1)} - A_{2(2n+1)}\} \right] = 0$$

これも x の値いかににかかわらず成立しなければならない。従つて条件 (4) は次のように書きなおされる。

$$A_{1(2n+1)} - A_{2(2n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{2^5}{(2n+1)^2\pi^2} (G_1 - G_2)\theta a^2 \dots\dots\dots (9)$$

さて終りに条件 (5) を式 (2) および (6) を用いて変形してみよう。式 (6) を式 (2) に代入し積分して

$$\begin{aligned} w_1 &= \theta xy + \frac{1}{G_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ A_{1(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + B_{1(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right\} + C_1 \\ w_2 &= \theta xy + \frac{1}{G_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ A_{2(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + B_{2(2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right\} + C_2 \end{aligned}$$

ここに C_1, C_2 は任意常数である。 $y=0$ として両者の差をとれば

$$w_1|_{y=0} - w_2|_{y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{B_{1(2n+1)}}{G_1} - \frac{B_{2(2n+1)}}{G_2} \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x + (C_1 - C_2)$$

かくして式 (4), (5) から

$$\tau_{yz1}|_{y=0} = \tau_{yz2}|_{y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} k' \left\{ \frac{B_{1(2n+1)}}{G_1} - \frac{B_{2(2n+1)}}{G_2} \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x + k'(C_1 - C_2)$$

ここで ① 材あるいは ② 材の z 方向の釣合を考える。 z 面においては $\sigma_z=0$ であるし、AB 面をのぞく他の側面においても z 方向の表面力は存在しない。したがつて z 方向の釣合は AB 面の τ_{yz} の合力が 0 であることと同一である。

かくて上式の右辺を $-a$ から $+a$ まで積分すればその値は 0 であるから

$$2ak'(C_1 - C_2) = 0$$

これは AB 面に一様なズレが存在しえないことを示す。かくして

$$\tau_{yz1}|_{y=0} = \tau_{yz2}|_{y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} k' \left\{ \frac{B_{1(2n+1)}}{G_1} - \frac{B_{2(2n+1)}}{G_2} \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \dots\dots\dots (10)$$

これを式 (8) とともに式 (5) に代入し $\frac{x}{a}$ を Fourier の級数に展開して整理すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ \frac{k'}{G_1} B_{1(2n+1)} - \frac{k'}{G_2} B_{2(2n+1)} - \frac{(2n+1)\pi}{2a} A_{1(2n+1)} - (-1)^n \frac{2^4 G_1 \theta a}{(2n+1)^2 \pi^2} \right\} = 0$$

この式も x の値いかににかかわらず成立しなければならない。かくして条件 (5) は次のように変形される。

$$\frac{k'}{G_1} B_{1(2n+1)} - \frac{k'}{G_2} B_{2(2n+1)} - \frac{(2n+1)\pi}{2a} A_{1(2n+1)} = (-1)^n \frac{2^4 G_1 \theta a}{(2n+1)^2 \pi^2} \dots\dots\dots (11)$$

4. 連立方程式の解

応力関数に含まれた任意常数 $A_{1(2n+1)}, B_{1(2n+1)}, A_{2(2n+1)}, B_{2(2n+1)}$ は式 (7), (9), (11) を連立して解けば求められる。なお無次元の記号に置きかえるため次の関係式をもうける。

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{n+1} \frac{2^5 G \theta a^2}{(2n+1)^2 \pi^3} a_{1n} &= A_{1(2n+1)}, & (-1)^{n+1} \frac{2^5 G \theta a^2}{(2n+1)^2 \pi^3} b_{1n} &= B_{1(2n+1)} \\ (-1)^{n+1} \frac{2^5 G \theta a^2}{(2n+1)^2 \pi^3} a_{2n} &= A_{2(2n+1)}, & (-1)^{n+1} \frac{2^5 G \theta a^2}{(2n+1)^2 \pi^3} b_{2n} &= B_{2(2n+1)} \\ k_n &= \frac{2ak'}{(2n+1)\pi G}, & g_1 &= \frac{G_1}{G}, & g_2 &= \frac{G_2}{G} \\ \alpha_{1n} &= \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1, & \beta_{1n} &= \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1, & \alpha_{2n} &= \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2, & \beta_{2n} &= \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに G は基準の剛性率を表わしている。このような記号を用いると式 (7), (9), (11) は

$$\left. \begin{aligned} a_{1n}\alpha_{1n} + b_{1n}\beta_{1n} &= g_1 \\ a_{2n}\alpha_{2n} - b_{2n}\beta_{2n} &= g_2 \\ a_{1n} - \alpha_{2n} &= g_1 - g_2 \\ a_{1n} - k_n \left(\frac{b_{1n}}{g_1} - \frac{b_{2n}}{g_2} \right) &= g_1 \end{aligned} \right\}$$

のように簡略化される。これらを連立して解けば

$$\left. \begin{aligned} a_{1n} &= \frac{(g_1 - g_2) \frac{k_n \beta_{1n}}{g_2 \alpha_{1n}} + \frac{1}{\alpha_{1n} \alpha_{2n}} (g_1 \beta_{1n} \beta_{2n} + k_n \beta_{1n} + k_n \beta_{2n})}{\frac{\beta_{1n} \beta_{2n}}{\alpha_{1n} \alpha_{2n}} + \frac{k_n \beta_{2n}}{g_1 \alpha_{2n}} + \frac{k_n \beta_{1n}}{g_2 \alpha_{1n}}} \\ a_{2n} &= \frac{-(g_1 - g_2) \left(\frac{\beta_{1n} \beta_{2n}}{\alpha_{1n} \alpha_{2n}} + \frac{k_n \beta_{2n}}{g_1 \alpha_{2n}} \right) + \frac{1}{\alpha_{1n} \alpha_{2n}} (g_1 \beta_{1n} \beta_{2n} + k_n \beta_{1n} + k_n \beta_{2n})}{\frac{\beta_{1n} \beta_{2n}}{\alpha_{1n} \alpha_{2n}} + \frac{k_n \beta_{2n}}{g_1 \alpha_{2n}} + \frac{k_n \beta_{1n}}{g_2 \alpha_{1n}}} \\ b_{1n} &= \frac{k_n \left(1 - \frac{1}{\alpha_{2n}} \right) - g_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha_{1n}} \right) \left(\frac{k_n}{g_2} + \frac{\beta_{2n}}{\alpha_{2n}} \right)}{\frac{\beta_{1n} \beta_{2n}}{\alpha_{1n} \alpha_{2n}} + \frac{k_n \beta_{2n}}{g_1 \alpha_{2n}} + \frac{k_n \beta_{1n}}{g_2 \alpha_{1n}}} \\ b_{2n} &= \frac{-k_n \left(1 - \frac{1}{\alpha_{1n}} \right) + g_2 \left(1 - \frac{1}{\alpha_{2n}} \right) \left(\frac{k_n}{g_1} + \frac{\beta_{1n}}{\alpha_{1n}} \right)}{\frac{\beta_{1n} \beta_{2n}}{\alpha_{1n} \alpha_{2n}} + \frac{k_n \beta_{2n}}{g_1 \alpha_{2n}} + \frac{k_n \beta_{1n}}{g_2 \alpha_{1n}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

特別の場合として $k' \rightarrow \infty$, $G_1 = G_2 = G$ とすれば $2a \times (d_1 + d_2)$ なる単一矩形材のねじりとなる。そこで式 (13) に $k_n \rightarrow \infty$, $g_1 = g_2 = 1$ を代入すれば

$$a_{1n} = a_{2n} = \frac{\beta_{1n} + \beta_{2n}}{\alpha_{1n} \beta_{2n} + \alpha_{2n} \beta_{1n}} \qquad b_{1n} = b_{2n} = \frac{\alpha_{2n} - \alpha_{1n}}{\alpha_{1n} \beta_{2n} + \alpha_{2n} \beta_{1n}}$$

これらを式 (6) に代入し、更に $y' = y - \frac{1}{2} (d_1 - d_2)$ として式を整理すれば

$$\begin{aligned} \phi &= G \theta a^2 \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^5}{(2n+1)^3 \pi^3} \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y'}{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{4a} (d_1 + d_2)} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right\} \\ &= \frac{32 G \theta a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left\{ 1 - \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y'}{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{4a} (d_1 + d_2)} \right\} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \end{aligned}$$

となつてすでに得られている応力関数*に一致する。また $k' = 0$ とすれば独立した2種の矩形材のねじりとなる。この場合も $k_n = 0$ として式 (13) から a_{1n} , a_{2n} , b_{1n} , b_{2n} を求め、式 (6) に代入し、更に座標原点を材断面の中央に移して式を整理すれば、上式と同じ型の単一矩形材の応力関数をうることができる。

5. 端面に働くねじりモーメントおよび接合面のせん断応力

端面に働くねじりモーメント \mathfrak{M} は

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \iint_{\textcircled{1}} (\tau_{xy_1} x - \tau_{yx_1} y) dx dy + \iint_{\textcircled{2}} (\tau_{xy_2} x - \tau_{yx_2} y) dx dy \\ &= 2 \int_0^{d_1} \int_{-a}^a \phi_1 dx dy + 2 \int_{-d_2}^0 \int_{-a}^a \phi_2 dx dy \\ &= \frac{8}{3} G_1 \theta d_1 a^3 + \frac{8}{3} G_2 \theta d_2 a^3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^4 a^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \left\{ A_{1(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1 + B_{1(2n+1)} \left(\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_1 - 1 \right) \right\} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^4 a^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \left\{ A_{2(2n+1)} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2 - B_{2(2n+1)} \left(\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d_2 - 1 \right) \right\} \end{aligned}$$

* 例えば Timoshenko and Goodier 著 “Theory of Elasticity” (1951年) p. 276 参照

これを式 (12) の関係を用いて書きかえると

$$\mathfrak{M} = G \theta a^4 \left[\frac{8}{3} g_1 \frac{d_1}{a} + \frac{8}{3} g_2 \frac{d_2}{a} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)^5 \pi^5} \{ a_{1n} \beta_{1n} + a_{2n} \beta_{2n} + b_{1n} (\alpha_{1n} - 1) - b_{2n} (\alpha_{2n} - 1) \} \dots (14) \right]$$

この級数はかなり速く収斂するから、実用計算では 2, 3 項とれば十分である。応力関数の場合と同様に $k' \rightarrow \infty$, $G_1 = G_2 = G$ とすれば $2ax(d_1 + d_2)$ なる断面の単一矩形材のねじりモーメントを、また $k' = 0$ とすれば相異なる 2 個の単一矩形材のねじりモーメントをそれぞれ表わす。これらは式 (13), および (14) に各 $k_n \rightarrow \infty$, $g_1 = g_2 = 1$ あるいは $k_n = 0$ を代入してえられる。もちろんその結果はすでにえられている単一矩形材の式*と一致する。

接合面におけるせん断応力は式 (8) および (10) で与えられる。式 (12) を用いてこれらを書きかえてみると

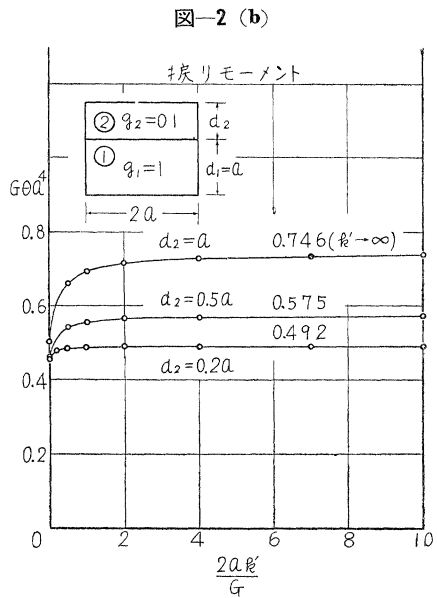
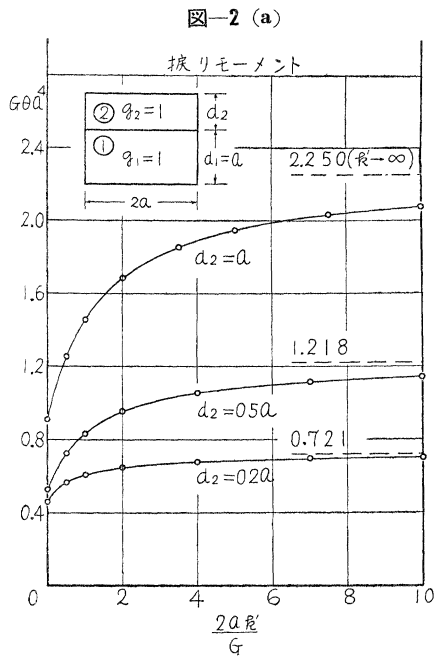
$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}|_{y=0} &= G \theta a \left\{ 2g_1 \frac{x}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^4}{(2n+1)^2 \pi^2} a_{1n} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right\} \\ \text{あるいは} \quad &= G \theta a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^4}{(2n+1)^3 \pi^3} \frac{2ak'}{G} \left(-\frac{b_{1n}}{g_1} + \frac{b_{2n}}{g_2} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \\ \text{これを更に式 (13) を用いて変形すると} \quad &= G \theta a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^4}{(2n+1)^3 \pi^3} \frac{2ak'}{G} \frac{\left\{ \left(1 - \frac{1}{\alpha_{1n}}\right) \frac{\beta_{2n}}{\alpha_{2n}} + \left(1 - \frac{1}{\alpha_{2n}}\right) \frac{\beta_{1n}}{\alpha_{1n}} \right\}}{\frac{\beta_{1n}\beta_{2n}}{\alpha_{1n}\alpha_{2n}} + \frac{k_n\beta_{2n}}{g_1\alpha_{2n}} + \frac{k_n\beta_{1n}}{g_2\alpha_{1n}}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

数値計算にあたりこの第 1 式は収斂が遅いから実用には不便である。第 2 式あるいは第 3 式によるのがよい。もちろんこの式も特別の場合として $k_n \rightarrow \infty, g_1 = g_2 = 1$ とすれば、すでにえられている単一矩形材のせん断応力公式*と一致することはいうまでもない。

6. 数 値 計 算

端面に働らくねじりモーメントは式 (14) で、また接合面のせん断応力は式 (15) で与えられる。次にこれら両式の数値計算例からおおよその様子をうかがうことにする。

(1) 端面のねじりモーメント \mathfrak{M} 合成桁材のねじりに関する重要な問題の一つである端面のねじりモーメントと接合面のズレの常数との関係について考察しよう。ここにズレの常数として $\frac{2ak'}{G}$ を用いることにする。 $\frac{2ak'}{G}$ は接合面単位長さ当りのズレの常数で基準の剛性率 G を単位としているから次元は 0 である。そして結合の度



* 例えば Timoshenko and goodier 著 “Theory of Elasticity” (1951年) p. 278 参照
 ** 例えば Timoshenko and goodier 著 “Theory of Elasticity” (1951年) p. 276 参照

合に応じて 0 から ∞ までの値をとることができる。0 はただ単に 2 材を重ねてねじつた場合に、 ∞ は結合が完全でズレが生じない場合に相当するからである。図-2 はこのズレの常数を横軸にとつて表わしたねじりモーメントで、図-2 (a) は合成 2 材の剛性率が同一の場合 ($g_1=g_2=1$) を、図-2 (b) は ② 材が ① 材の 0.1 の剛性率の場合 ($g_1=1, g_2=0.1$) を表わしている。そして各場合に図示のごとく 3 種の断面の合成桁材について数値計算した。ここに式 (14) の計算で $n=3$ までとつたが普通は $n=1$ までとれば十分であろう。それは $n=2, 3$ 項の和は $n=1$ 項までの計算値の 0.5% 程度であり、これ以下の項も微小な影響しか与えないと考えられるからである。端面のねじりモーメントはズレの常数が小さいときはこの大きさにかなり影響される。また各合成部材の剛性率および断面寸法によつて相違はあるが、ねじりモーメントはズレの常数がある程度以上の大きな値になると事実上これに無関係になると考えることができる。これは shear connector 等による接合の度合いにたいする一つの指針を与えるように思われる。

(2) 接合面のせん断応力 端面のねじりモーメントはズレの常数によつて変わるが、これにともなつて接合面のせん断応力分布がいかに変化するか調べてみよう。図-3(a), (b) は各図-2 (a) の $d_2=a$ および $d_2=0.2a$ の場合の接合面のせん断応力分布である。式 (15) から明らかのように応力分布は y 軸にかんして逆対称である

図-3 (a)

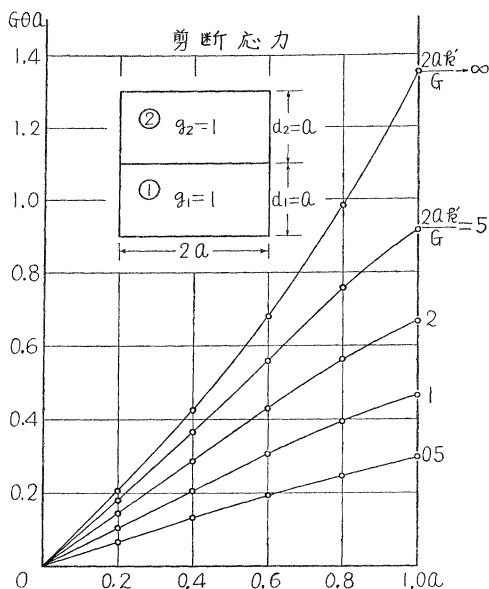
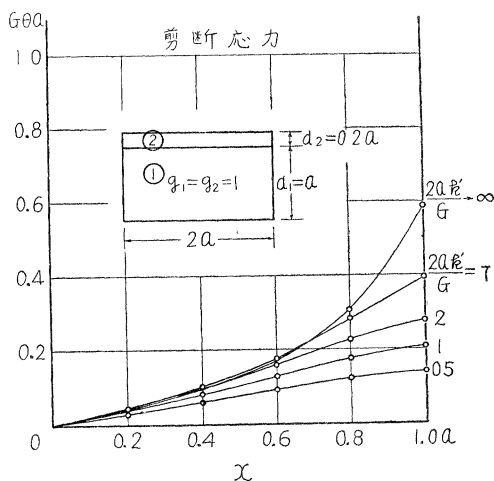


図-3 (b)



から図にはその半分のみが描かれている。数値計算には式 (15) の第 3 式を用いたが、この級数は式 (14) に比してかなり収斂が遅い。ここには $n=13$ までとつて計算したが、実用には $n=7$ 程度までで十分であろう。それは $n=8\sim 13$ の項の和は $n=7$ までの級数の和の約 1% でこれ以下の項も無視できると考えられるからである。せん断応力は d_2 が d_1 に比して小さい場合でもズレが存在すると三角形分布に近いことは注目すべきことである。なお d_1, d_2 がこの例より大きくなるとますます三角形分布に近づくことは単一材のねじりから容易に想像できるし、そのうえズレも考慮すれば一般的に接合面のせん断応力分布は三角形分布をなすとみなしてよからう。これはまた shear connector の配置にかんする一つの論拠を与えるようにみえる。接合面のズレは式 (5) から $\tau_{yz}|_{y=0}/k'$ として与えられるからズレの分布も図-3 からただちに類推することができる。

7. 結 言

剛性率の異なる 2 種の矩形材をその接触面で一樣に結合してつづつた 矩形合成桁材の純ねじり理論とその数値計算例を示した。そして端面のねじりモーメントはズレの常数が小さいときはこの影響をうけるが、ズレの常数がある程度以上大きくなると、これに無関係になること、および接合面のせん断応力はズレを考慮して一般に三角形分布をなすこと等を例証することができた。これはまた shear connector 使用上の参考にもなる。

終りに数値計算にあたりいろいろと援助して下さいた保国光敏君に紙面をかりて厚くお礼申し上げます。