

光弾性学的方法による砂中応力の測定について

正員 村山 朔 郎*
 正員 丹羽 義 次**
 正員 川本 脩 万***

STUDIES ON THE PHOTO-ELASTIC MEASUREMENT OF STRESSES IN A SOIL MASS

By Dr. Eng., Sakuro Murayama, C.E. Member, Dr. Eng. Yoshiji Niwa, C.E. Member
and Toshikazu Kawamoto, C.E. Member

Synopsis : The authors studied on the applicability of photo-elastic method to the measurement of stresses in a soil mass. For this purpose, small cylindrical hollow pieces of photo-elastic material (Epoxy resin) were embedded in the dry sand mass, which was loaded by a rigid plate locally placed on its surface, and their stresses were frozen, then the stresses and their distribution in the sand mass were measured by taking out the pieces and analyzing their frozen stresses photo-elastically.

As a result of the experiment above stated, it became clear that the directions of principal stress and the feature of stress distribution in the sand mass agreed well with the results calculated by Fröhlich's formula, but the measured magnitude of stress differed a little from the calculated one. But the difference in the stress magnitude can be corrected by multiplying an experimental coefficient K on the measured stress.

要旨 著者等は光弾性学的方法による土中応力の測定について研究を行つた。この目的のため光弾性材料で造られた小さい円環試験片を表面上に載荷された土中に埋込み、凍結光弾性実験を用いて試験片に生ずる応力を解析することにより土中の応力分布を測定した。

実験の結果土中の主応力方向および応力分布の形状は Fröhlich 式による計算結果とよく一致するが、測定応力値の大きさは計算値と相違することが明らかにされた。しかしこの応力の大きさにたいする差異は測定値に実験係数 K を乗ずることによつて補正される。

1. 緒 言

路盤や基礎地盤内などの土中に発生する応力分布に関する理論には、土を弾性体とみなして取扱つた解析法や、粉体の特性を考慮して弾性論に修正を加えた準弾性論的解法などがある。これら理論の検照の目的で行われた土中応力の測定も少なくないが、従来用いられた各種の土圧計はいずれも一平面の受圧面に感じる土圧のみを計測するもので、受圧面の法線方向の応力分値のみしか測定できない欠点があつた。この欠点を除くとともに、土中応力の正確な主応力方向と主応力値とを同時に測定するために、村山は土中に微小な光弾性材料の試験片を多数埋め込み、それを応力凍結させた後取出し、各位置に埋め込まれた試験片中に凍結された応力によつて土中応力を光弾性学的に測定することを思いついたが、その詳細な実験法ならびに解析については丹羽、川本が行い、その結果上記のような光弾性学的方法による土中応力測定法の実用上の可能性を明らかにすることができた。

本文はこの方法の一実験例として、砂槽中に入れた乾燥砂の表面に剛性板による静的載荷を与えたときの砂中応力を測定したもので、光弾性試験片としてはエポキシ樹脂 (Epoxy resin) よりなる外径 6 mm, 内径 2.4 mm 長さ 6 mm の円環を用いた。これらの円環の凍結応力を光弾性装置によつて測定し、2次元および3次元荷重状態の場合の砂中応力を求め、その結果について考察するとともに、測定結果を Boussinesq あるいは Fröhlich の式より算出した理論計算結果と対比した。

* 工学博士, 京都大学教授, 工学部土木工学教室 ** 工学博士, 京都大学助教授, 工学研究所
 *** 熊本大学助教授, 工学部土木工学教室

2. 実験方法および結果

実験には乾燥した豊浦標準砂を用い、これを丈夫な鉄製の砂槽によく締め入れて、砂の表面にはジュラルミン製の剛性載荷板を置き、これを通して荷重を加えた。荷重状態が2次元の場合と3次元の場合について実験したが、それぞれの場合の砂槽および載荷板の大きさは表-1の通りである。なおいずれの場合も載荷板の中心を砂槽の表面の中心と一致させた。

砂中に埋め込む光弾性材料の試験片はエポキシ樹脂を直径 6 mm、長さ 6 mm の円柱形に鋳込み、ついでそれに直径 2.4 mm の孔を残留応力のないように同心に穿つたものである。砂は砂槽中に水平に薄層に入れ、各層ごとに表面全面をおおう板で一回数叩いて締め固めを行った。円環試験片は軸を水平にし、かつ表面につけた目印の直径が鉛直になるようにして 図-1 (2次元の場合)、または 図-2 (3次元の場合) の各位置に各層の締め

表-1

	砂槽の幅、高さ、奥行 (cm)	載荷板の幅、奥行 (cm)
2次元の場合	15.0×10.5×2.0	5.0×1.2
3次元の場合	20.0×20.0×20.0	4.0×4.0

図-1

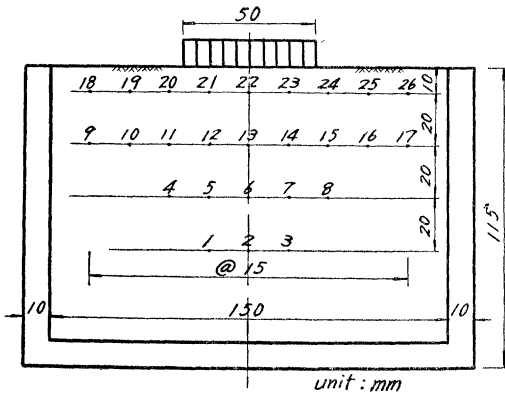
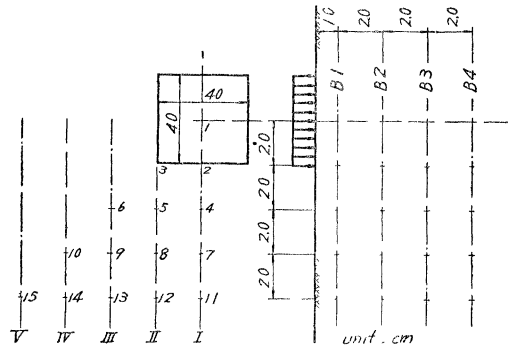


図-2



固めと同時に埋め込んだ。ついでこの砂槽を光弾性用恒温器中に入れ、載荷板を通して荷重を与え凍結操作を行って円環試験片内の応力を凍結した。その後砂を静かに削り取り応力の凍結された試験片を取出し、各試験片の埋込位置と方向を照査記録した上、浸漬法で各試験片の等色線縮写真を撮影した。この結果の一例を示すと 写真-1 は荷重強度 $w=2.76 \text{ kg/cm}^2$ (ただし w は載荷々重を載荷面積で除した値) を与えた 2次元荷重状態における

写真-1

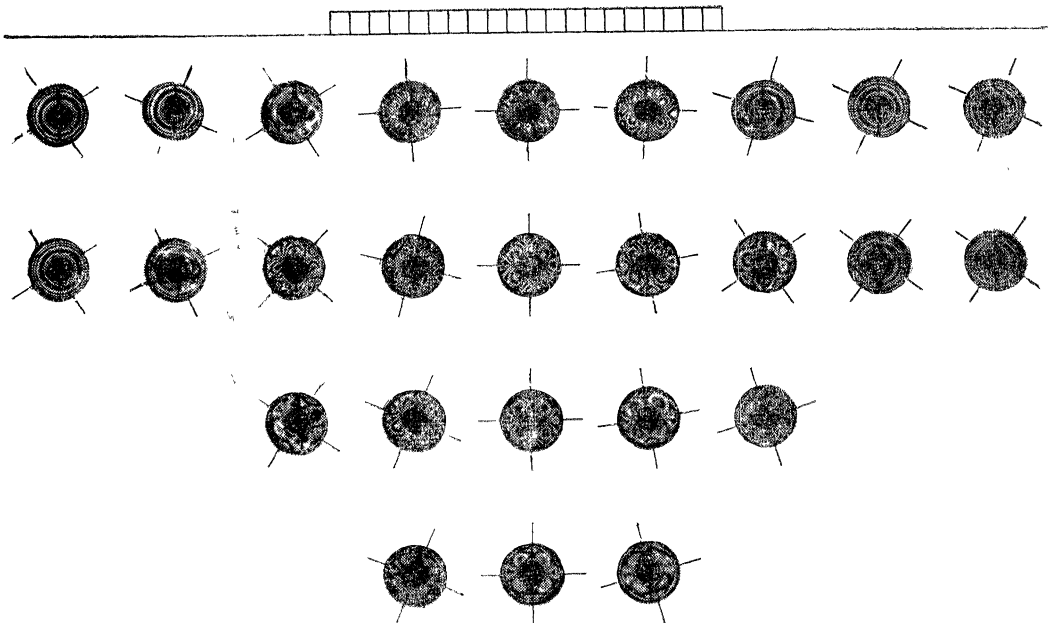


写真-2

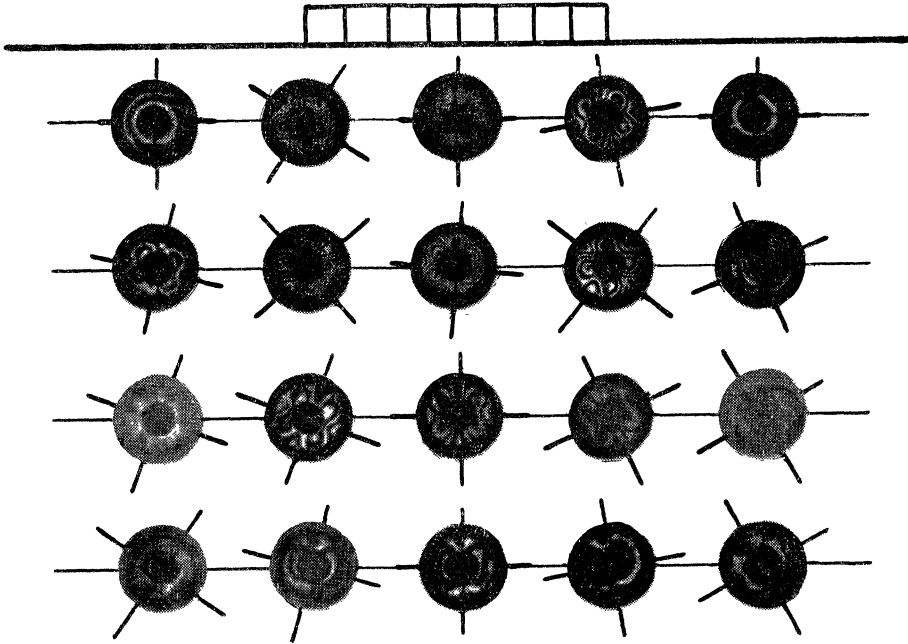
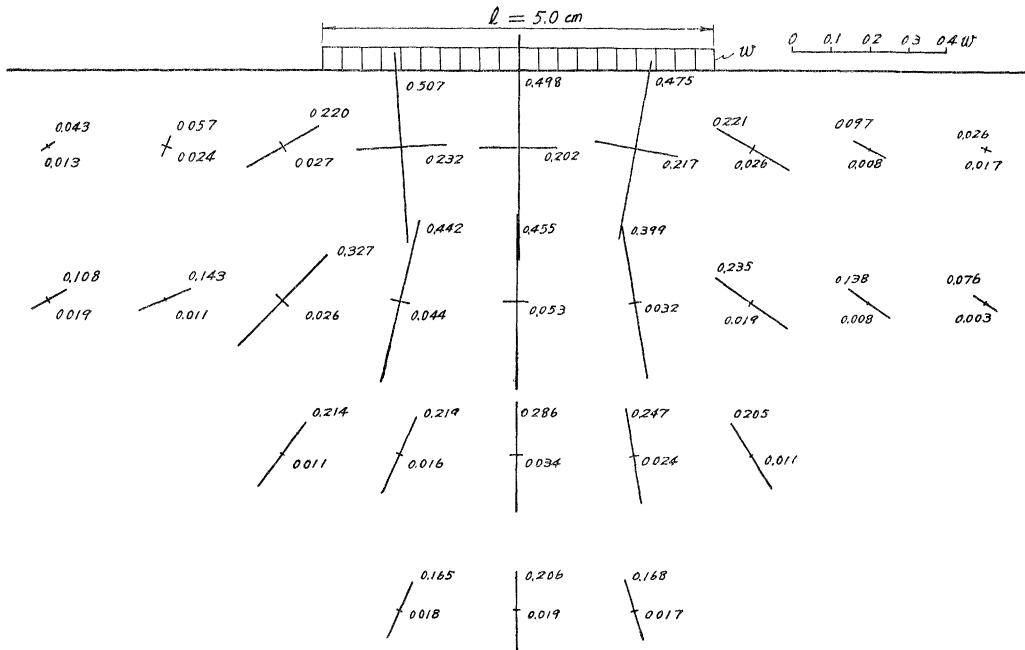


図-3



等色線写真, 写真-2 は $w=2.46\text{ kg/cm}^2$ を与えた 3次元荷重状態の場合の荷重面中心を通る鉛直面内の試験片の等色線写真である。なお 図-3 および 図-4 中の実線はそれぞれ 写真-1 (2次元荷重状態) より後述の方法によつて求めた主応力の方向と大きさおよび鉛直応力分布であり, 図-5 中の実線は 写真-2 (3次元荷重状態) より求めた鉛直応力分布である。

3. 試験片の凍結応力の解析

あらかじめ理論または光弾性実験によつて, 円環に作用する互に直交する二方向の作用荷重強度と円環の応力分

図-4

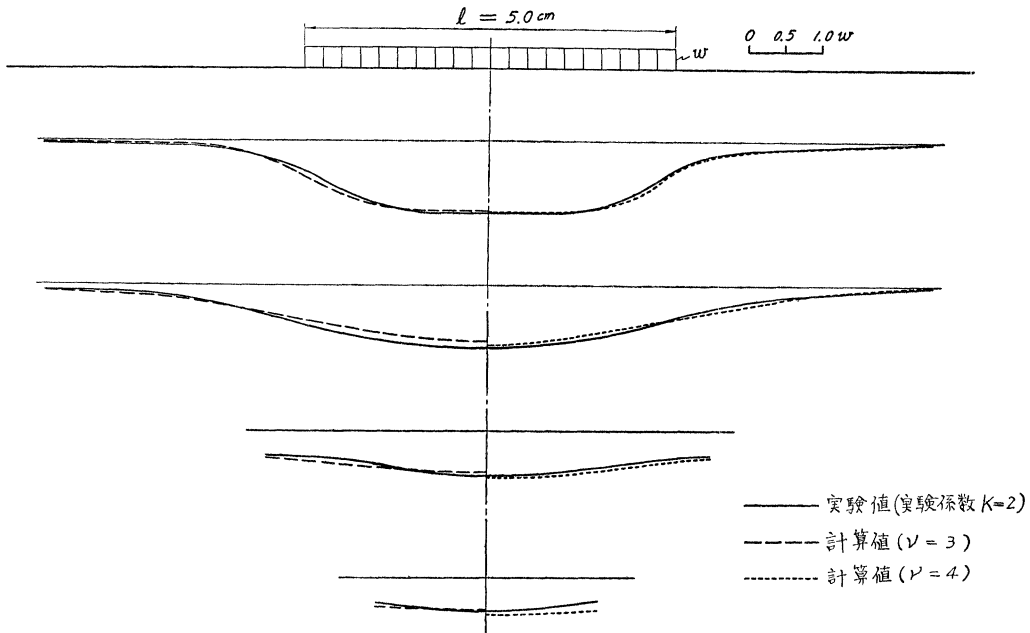


図-5

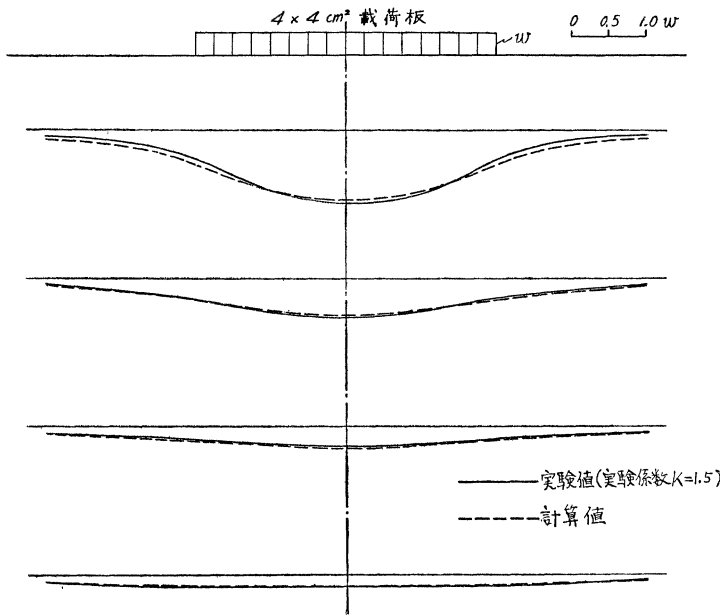
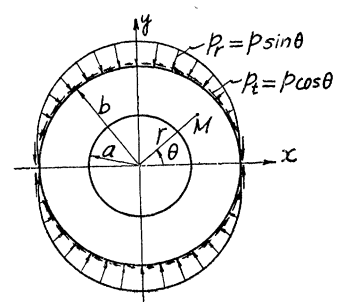


図-6



布との間の関係を求めておけば、前述の実験で得た等色線縞からただちに砂中の主応力の方向および大きさを知ることができる。しかし実験によつてこの標準の縞模様を種々の荷重状態にたいして求めることが設備上少し困難であつたので、つぎのような仮定のもとで理論計算を行い円環応力状態を明

らかにして、実験結果の整理を行うことにした。

いま砂中の一点における主応力 p, q を考え、そのうちの p のみに注目するとき、その p が円環に荷重として作用する場合には 図-6 のような分布をして円環の外周に作用するものと仮定する。いま円環内の応力状態をあらわす Airy の応力関数を F とすれば、各応力成分は周知のように、

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad \dots\dots\dots(1)$$

となり、この場合に適する関数 F は

$$F = a_0 \log r + b_0 r^2 + a_0' \theta + (b_1 r^3 + a_1' r^{-1}) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2}) \cos n \theta \quad \dots\dots\dots(2)$$

となる。

一方円環の外側境界上における半径方向荷重を $p_r(\theta)$, 接線方向荷重を $p_t(\theta)$ とし, 荷重状態を

$$0 < \theta < \pi \text{ にたいして, } p_r(\theta) = p \sin \theta, \quad p_t(\theta) = p \cos \theta$$

$$-\pi < \theta < 0 \text{ にたいして, } p_r(\theta) = -p \sin \theta, \quad p_t(\theta) = -p \cos \theta$$

と仮定してこれを Fourier 級数で表わせば, つぎのようになる。

$$p_r(\theta) = \frac{2p}{\pi} - \frac{4p}{\pi} \sum_{n=2,4,6..} \frac{1}{(n^2-1)} \cos n\theta \dots\dots\dots (3)$$

$$p_t(\theta) = \frac{4p}{\pi} \sum_{n=2,4,6} \frac{n}{(n^2-1)} \sin n\theta \dots\dots\dots (4)$$

したがって境界条件はこの場合つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ において, } \sigma_r=0, \tau_{r\theta}=0 \\ r=b \text{ において, } \sigma_r=-p_r(\theta), \tau_{r\theta}=-p_t(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ゆえに (5) 式に (1) ~ (4) の各式を代入して応力関数中の諸常数を求めればつぎのようになる。

$$n=0 \text{ の項, } a_0'=0, a_0=2p/\pi(a^2-b^2), b_0=-pa^2/\pi(a^2-b^2) \dots\dots\dots (6)$$

$$n=1 \text{ の項, } a_1'=b_1=0 \dots\dots\dots (7)$$

$n \geq 2$ の項,

$$n \text{ が奇数のとき, } a_n=b_n=a_n'=b_n'=0$$

n が偶数のとき,

$$n(n-1)a_n a^{n-2} + (n-2)(n+1)b_n a^n + n(n+1)a_n' a^{-n-2} + (n+2)(n-1)b_n' a^{-n} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$n(n-1)a_n a^{n-2} + n(n+1)b_n a^n - n(n+1)a_n' a^{-n-2} - n(n-1)b_n' a^{-n} = 0$$

$$n(n-1)a_n b^{n-2} + (n-2)(n+1)b_n b^n + n(n+1)a_n' b^{-n-2} + (n+2)(n-1)b_n' b^{-n} = -4p/\pi(n^2-1)$$

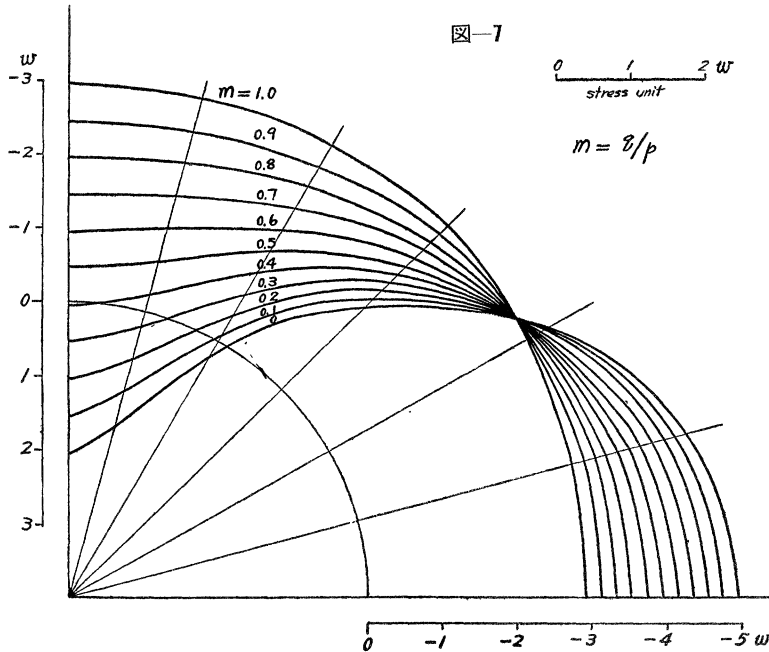
$$n(n-1)a_n b^{n-2} + n(n+1)b_n b^n - n(n+1)a_n' b^{-n-2} - n(n-1)b_n' b^{-n} = -4pn/\pi(n^2-1)$$

表-2

n	a_n	b_n	a_n'	b_n'
0	1.091×10^{-2}	-3.789×10^{-1}	—	—
2	-4.684×10^{-1}	6.085×10^{-1}	-9.370×10^{-5}	1.313×10^{-2}
4	1.369×10^{-1}	-2.460	1.156×10^{-8}	-1.106×10^{-6}
6	1.489	-1.900×10	5.176×10^{-11}	-4.343×10^{-11}
8	-1.304×10	1.600×10^2	-1.345×10^{-13}	1.079×10^{-11}
10	5.989×10	-5.940×10^2	1.667×10^{-16}	-1.334×10^{-14}

したがって (6) ~ (8) 式より諸常数が求まり円環内の応力をうることができる。

いま実験に用いた試験片 ($a/b=0.4$) について, $p=1$ とし $n=0, 2, 4, 6, 8, 10$ の 6 項をとつて計算を行い, (6), (8) 式中の諸常数を算出すれば表-2 のようになる。これらの諸常数を (2), (1) 式に代入して円環内孔

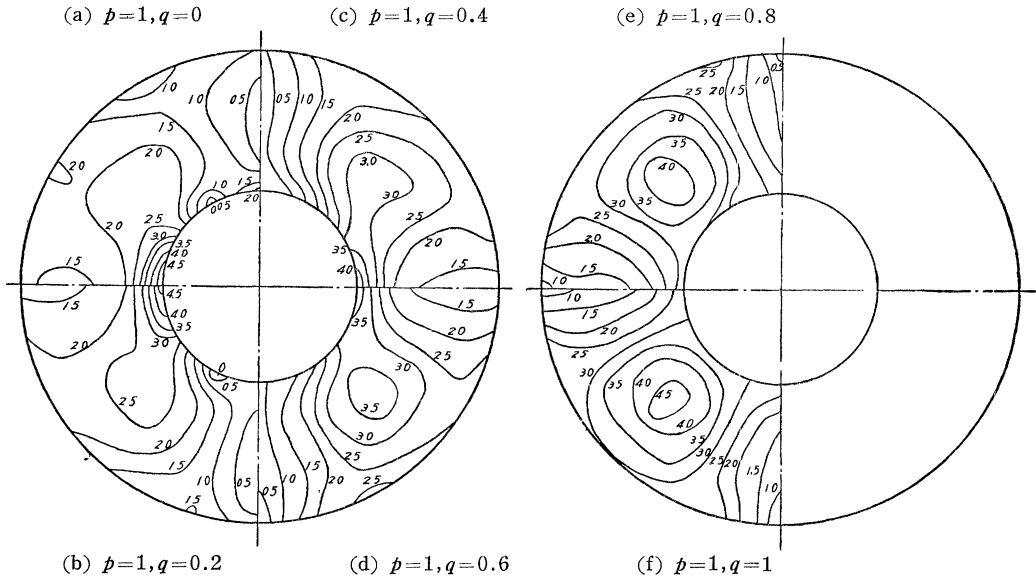


周辺 ($r=a$) 応力分布を求めれば 図-7 の $m=0$ の分布曲線になる。つぎに円環内の各点における主応力差 ($\sigma_1 - \sigma_2$) は次式で表わされる。

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}$$

上式中の σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ に 表-2 の常数を用いて各点の ($\sigma_1 - \sigma_2$) を求め、光弾性縞を与えるところの円環内の等主応力差線を求めると 図-8 のようになる。実際には砂中の荷重状態は一軸方向の p のみとは限られていない

図-8 等主応力差線

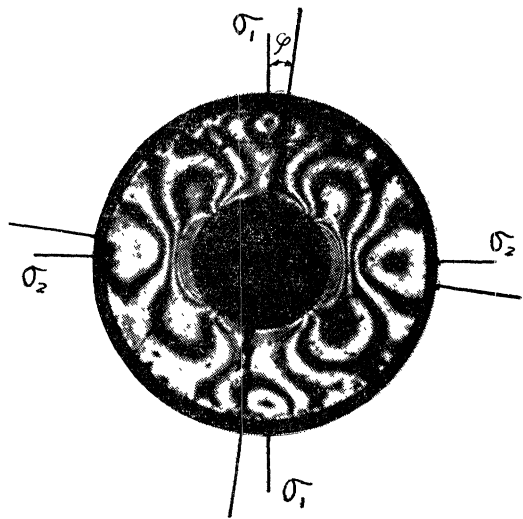


ので、 $p=1$ とこれと直角方向に q が 0~1.0 の大きさで作用した場合の計算結果を重ねの原理を用いて求めた。この結果として主応力比 $m=q/p$ にたいする内孔周辺応力比 $(\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ}/(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ}$ を表示すれば 表-3 のようであり、これを図示すれば 図-7 のようになる。

表-3

主応力比 q/p	縞次数比 $(\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ}/(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ}$	$(\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ}$	$(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ}$
1.00	1.000	-2.938×10	-2.938×10
0.90	1.288	-3.142	-2.439
0.80	1.724	-3.347	-1.941
0.70	2.462	-3.551	-1.443
0.60	3.977	-3.756	-0.944
0.50	8.877	-3.960	-0.446
0.40	-79.790	-4.165	0.052
0.30	-7.937	-4.370	0.551
0.20	-4.361	-4.574	1.049
0.10	-3.089	-4.779	1.547
0.00	-2.436	-4.983	2.046

写真-3 試験片 No.14 (2次元)



以上に円環内応力の理論的解析の概略を記述したが、これらの計算結果を光弾性等色線縞写真の解析に適用する順序はつぎの例に示す通りである。いま一例として試験片 14 の等色線写真 (写真-3) について説明する。まず主応力線の方向は等色線縞写真の対称軸をもつて定め、この対称軸と鉛直線との傾きは試験片につけた目印の直径との傾きを測定することにより求める。つぎに主応力の大きさの決定にはつぎの法のいずれかが用いられる。

(i) 試験片の内孔周辺応力分布を等色線次数と光弾性常数から求め、この応力分布曲線と相似する 図-7 中の応力分布曲線を求め、その曲線の主応力比をもつて試験片の受けた主応力比とし、 $p=1$ として求めた 図-7 の $(\sigma_\theta)_{\theta=0}$ にたいする値をもつて試験片の同一点の応力を除せば実際の主応力 p が求められる。

(ii) 各試験片の等色線縮写真より内孔円周対称軸 ($\theta=0^\circ$ および 90°) 上の縞次数を読み, それら二つの値の比を計算し, 表-3 中のこの比に相当する行より主応力比 q/p を求め, 同行中の $(\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ}$, $(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ}$ の値と縞次数より求めた応力とより p , q の値を得る. 写真-3 に示した試験片 (pt. 14, 光弾性常数 0.25 kg/cm , 厚み 0.6 cm) の等色線縮写真では, 対称軸上の縞次数は $N_{\theta=0^\circ} = -9.8$, $N_{\theta=90^\circ} = 2.4$, したがって $(\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ} = -9.8 \times \frac{0.25}{0.60} = -4.09 \text{ kg/cm}^2$, $(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ} = 2.4 \times 0.25/0.60 = 1.00 \text{ kg/cm}^2$, ゆえに $(\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ}/(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ} = -4.09$ であるから (ii) の方法を用いれば 表-3 によつて主応力比 $q/p = 0.184$ をうる. これに対応する $(\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ}$ は同表より $(\sigma_\theta)_{\theta=0^\circ} = 4.608 \times p$ となる. よつて試験時における主応力は $p = 4.09/4.608 = 0.887 \text{ kg/cm}^2$, $q = p \times 0.184 = 0.163 \text{ kg/cm}^2$ となる. この p および q を載荷々重 w を単位にとつて示せば, $p = 0.321 \times w$, $q = 0.059 \times w$ をうる. なおほかの各点における主応力の方向および大きさについても同様の計算がなされ, それらをまとめて図示すると 図-3 のようになる. また鉛直応力 σ_y は次式で与えられる.

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

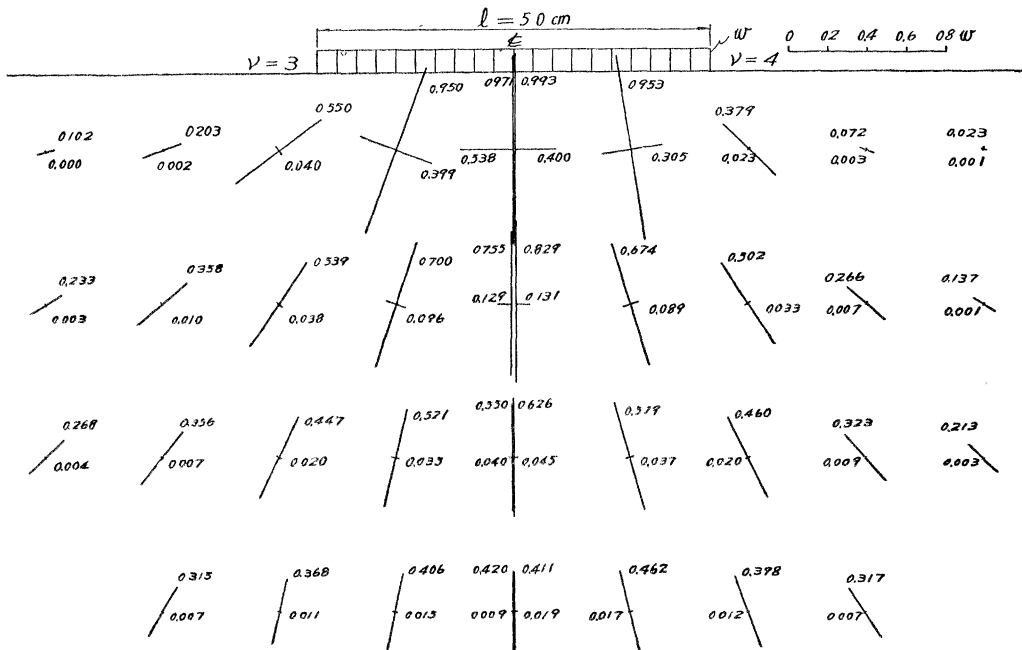
これを各点について 図-3 より求めて図示すれば 図-4 の実線となる.

4. 従来の土中応力理論との比較

従来の土中応力分布の理論としては, 弾性理論に基づいた Boussinesq 式や, それに修正を加えた Fröhlich 式等があつたが, ここでは実験結果と比較するために 2次元荷重状態にたいして Fröhlich 式を, 3次元荷重状態にたいして Boussinesq 式を用いて土中応力を計算した. それらの結果の一部を示せば 図-4 および 図-5 のようである. これらの図より考察すると,

a) 2次元荷重状態の場合 載荷面直下付近の鉛直応力状態は各実験ごとにかかなり相違するが, 深部ではほとんど一定している. このことは載荷面の直下では締め固め状態と全荷重, 偏心あるいは接触の不均等などとの関係による流動, 応力集中等によるものと思われるが, ある程度以上深いところではこれらの影響が薄らぐためであると考えられる. また実験結果より求めた主応力線図はおおむね Boussinesq あるいは Fröhlich の解 (図-9 に Fröhlich 式より得た主応力線図を示す) とよい一致を示しているが, 載荷面直下の主応力方向には従来みられなかつた現象が認められた. また水平断面に沿う鉛直応力の分布状態についてもかなりよい類似が認められるが, これらの値は Fröhlich 式による計算値よりかなり小さい.

図-9 Fröhlich 式による計算値



b) 3次元荷重状態の場合 実験を数回繰返したが、各場合の砂の締め固め程度は載荷による載荷面の沈下量が等しくなるようにして行つた。各実験における載荷面直下近傍の応力状態の相違は2次元荷重状態の場合より大きい。実験による鉛直応力は Boussinesq の計算値とほとんど同一の分布状態をすることが判る。

以上これらの実験によつて得られる砂中の応力分布状態は集中係数 $\nu=3\sim 4$ の場合の分布傾向と類似するが、その値はいずれも理論計算値より小さい。この差異は主として鉄製容器の内面における摩擦の作用が大きい影響をおよぼすためであるが、また本質的な試験片周辺材料の攪乱に原因するものもあると考えられる。しかしこのような実験によつて得た応力値にある一定実験係数 K を乗ずることにより、かなり適確に砂中の応力状態を求めることができる。この係数 K の値はここで行つた実験においては2次元の場合は約 2.0 であり、3次元の場合は 1.5 であつた。 K がいかなる値をとるかは実験装置ともあわせ考えて今後研究すべき問題である。

5. 結 語

以上は静的荷重をうける土中の応力を求めるために行つた光弾性学的な基礎実験の方法と結果について記述したものである。実験の結果得た土中の応力の分布状態は集中係数を $\nu=3\sim 4$ とした Fröhlich の式による理論値とはほぼ一致する。この際応力の大きさは実験値が理論値より全体的に小さいが、実験値にある一定の係数 K を乗ずることによりかなり適確に理論値と一致させることのできる事が明らかになつた。この差異の原因は主として砂と容器内壁との摩擦等によつて生じたものと思われ、その値の決定はさらに今後の研究にまたねばならないであろう。

以上の結果を総合して、本法は砂中の応力測定法として今後研究する価値があると認められる。とくに従来の土圧計では受圧面方向の応力分値しか測定できなかつたのにたいして、本法では主応力の大きさおよび方向を同時に測りえて、この種の研究に有力な資料を与えるものと思う。また液浸粉体光弾性実験では実際の砂を対象とすることができない不便があるのにたいして、本法では乾燥状態の砂を実際に近い状態で実験することができる。

本研究は国鉄の部外委託研究の一部として昭和 29 年 10 月より始め、昭和 31 年 3 月に国鉄へ報告したものであるが、その後一部研究を補足してここに発表した。終りに研究に当り御協力いただいた 絹川 治氏に謝意を表する次第である。

(昭. 33. 9. 29)

土木学会論文集編集委員

委員長	最上 武雄	委員	君島 博次	委員	竹内 俊雄	委員	松原 健太郎
委員	井上 和男	委員	佐藤 裕	委員	竹下 春見	委員	丸安 隆和
委員	伊東 茂富	委員	斎藤 暉太郎	委員	原口 好郎	委員	三野 栄三郎
委員	伊藤 文人	委員	斎藤 義治	委員	比留間 豊	委員	光 易 恒
委員	伊藤 和幸	委員	嶋 祐之	委員	平嶋 政治	委員	森 麟
委員	大久保 忠良	委員	鈴木 信太郎	委員	藤井 敏夫	委員	山口 柏樹
委員	大島 太市	委員	千秋 信一	委員	藤波 哲二	委員	渡 辺 隆
委員	奥村 敏恵	委員	高橋 彦治	委員	細井 昌晴	幹事	徳 平 淳
委員	木村 俊晃	委員	田島 二郎	委員	松崎 彬		

昭和 34 年 7 月 10 日 印刷
昭和 34 年 7 月 15 日 発行

土木学会論文集第 63 号

定価 120 円 (〒20 円)

編集者 東京都新宿区四谷 1 丁目 八十島 義之助
印刷所 東京都港区赤坂溜池 5 番地 株式会社 技報堂

発行所 社団法人 土 木 学 会

東京都新宿区四谷一丁目 電話 (35) 5 1 3 8 (代表) 振替東京 16828 番