

# 塑性流動における速度場の理論

正員 山口 柏 樹\*

## A THEORY ON THE VELOCITY FIELD IN THE PLASTIC FLOW OF GRANULAR MATERIALS

By Hakuju Yamaguchi, C.E. Member

**Synopsis:** In the present paper, the general theory on the velocity field in the plastic flow of granular materials with frictional resistance has been discussed. The developed formula of Geiringer's equation and the compressibility law in the flow state can be introduced by making the two characteristic lines with respect to both velocity and stress coincide. By the conception of plastic potential the relations between stress and strain increment in two and three dimensional state and the yield condition are also presented. The former relations are known to be same to Lévy-Mises ones. In case where the angle of internal friction is not so large, the above yield condition and newly introduced Poisson's ratio are shown fairly agree with the corresponding expressions already given by Prof. Hoshino. The deduced dilatancy formula in the shearing flow is checked up experimentally.

**要 旨** 本論文では摩擦を有する粒状物質の塑性流動における速度場の一般論につき述べる。速度と応力の特性曲線を一致せしめることにより Geiringer の拡張式が得られ、流動時の可圧表式があわせ導かれた。塑性ポテンシャルの概念により二、三次元の応力とひずみ増分関係式および降伏条件式を誘導したが前者は Lévy-Mises 式と恒同であることが判つた。あまり過大でない内部摩擦角の場合、三次元降伏条件式と流動時のポアソン比は星塾教授の塑性論における式とよく一致する。なお本理論を適用して流動時のダイレイタンシー式を導き、実験的にも妥当であることが認められた。

### 1. 問題の展望

金属塑性理論では等方性と非可圧性の仮定が妥当であると認められているから、完全塑性体の平面ひずみ問題では Geiringer の速度式が導かれ、不静定問題の理論的取扱いが可能とされている。この場合も速度方程式は応力釣合式と同じく双曲型であり、その実なる特性曲線は $s_1$ 線と一致し、応力の境界条件から決まる $s_1$ 線について、速度式を積分し境界で与えられる速度条件を吟味することができる。さらに、ひずみ速度内と降伏曲線が相似形で、かつ相似の位置にあることから、ひずみ速度（またはひずみ増分）と偏差応力の比例関係（Mises の式）も容易に導き出される。他方、摩擦を有する塑性体においては、後述のごとく等方性と非可圧性を固執する限り、応力と速度の特性曲線は一致しない。Hill<sup>1)</sup>によれば解の一意性の見地から両特性曲線の一致は必要条件の一つと思われる。物理的にみても、静止せる塑性域と、流動する塑性域の境界は応力勾配や速度勾配に関して不連続的な線であるから、応力の特性曲線が速度の特性曲線ともなることは必然的要求と考えられる。

本論文では、前段においてまず上述の一致条件を満たす速度方程式を求め、それよりひずみ増分と応力の関係を導いたが、これらの議論は完全塑性体としてのみ成り立つこと、換言すれば降伏応力を過ぎて塑性流動が始まる以後の現象にのみ適用されるものであることを銘記せねばならない。もちろん一致せしめる方法は唯一である必要はないから、異なる方法で異なる形の数値方程式や、応力-ひずみ増分の関係式も得られるであろう。これらの正否は実験や他理論との照合にまつべきであるから、応力-ひずみ増分の関係から演訳した理論的な三次元降伏条件式と星塾教授の降伏条件との対比を調べ、さらにダイレイタンシーの公式を誘導し実験結果を説明し得るか否かを検討した。本論に入る前に順序として、摩擦性塑性体の流動時における速度方程式が、等方、非可圧の仮定に対してはどうか調べてみよう。

$x, y$  座標は右手系で、 $x$  軸を水平左向きにとり、 $s_1$  線が  $x$  軸となす角（反時計回りに測る）を  $\theta$  とする。変位速度成分を  $u_x, u_y$  とするとひずみ速度成分は

\* 中央大学助教授，工学部土木工学科

$$\dot{\epsilon}_x = \partial u_x / \partial x \quad \dot{\epsilon}_y = \partial u_y / \partial y \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} (\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x) \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

で定義される。非可圧条件は  $\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y = 0 \quad \dots\dots\dots(1.2)$

等方性条件は内部摩擦角を  $\phi$  として

$$\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x = \cot(2\theta - \phi) (\partial u_y / \partial y - \partial u_x / \partial x) \quad \dots\dots\dots(1.3)$$

(1.3) 式は次のごとくして導かれる。大きい主応力  $\sigma_1$  が  $x$  軸となす角  $\alpha$  は  $(\pi/4 - \phi/2 + \theta)$  であるから、 $\sigma_1, \sigma_2$  が  $x, y$  軸となす角の方向余弦は

$$l_{1x} = \cos \alpha, \quad l_{1y} = \sin \alpha; \quad l_{2x} = -\sin \alpha \quad l_{2y} = \cos \alpha$$

であり、これを等方性条件  $\dot{\gamma}_{12} (\equiv 0) = \dot{\epsilon}_x l_{1x} l_{2x} + \dot{\epsilon}_y l_{1y} l_{2y} + \dot{\gamma}_{xy} (l_{1x} l_{2y} + l_{1y} l_{2x})$

に代入すると (1.3) 式が求まる。

(1.2), (1.3) 式は  $u_x, u_y$  に関して双曲型であるが、その特性曲線は最大せん断応力線にほかならない。事実直交する最大せん断応力線方向を  $\lambda_1, \lambda_2$  とし、その方向の速度成分を  $v_1, v_2$  とすると

$$u_x = v_1 \cos(\theta - \phi/2) - v_2 \sin(\theta - \phi/2), \quad u_y = v_1 \sin(\theta - \phi/2) + v_2 \cos(\theta - \phi/2)$$

であるから、変換式

$$\partial / \partial x = \cos(\theta - \phi/2) \partial / \partial \lambda_1 - \sin(\theta - \phi/2) \partial / \partial \lambda_2, \quad \partial / \partial y = \sin(\theta - \phi/2) \partial / \partial \lambda_1 + \cos(\theta - \phi/2) \partial / \partial \lambda_2,$$

によつて、(1.2), (1.3) 式は  $\partial v_1 / \partial \lambda_1 - v_2 \partial \theta / \partial \lambda_1 + \partial v_2 / \partial \lambda_2 + v_1 \partial \theta / \partial \lambda_2 = 0$

$$\partial v_1 / \partial \lambda_1 - v_2 \partial \theta / \partial \lambda_1 - \partial v_2 / \partial \lambda_2 - v_1 \partial \theta / \partial \lambda_2 = 0$$

$$\therefore \frac{dv_1}{d\lambda_1} - v_2 \frac{d\theta}{d\lambda_1} = 0 \quad \frac{dv_2}{d\lambda_2} + v_1 \frac{d\theta}{d\lambda_2} = 0 \quad \dots\dots\dots(1.4)$$

が最大せん断応力線方向、 $\lambda_1, \lambda_2$  に対して行われる。これはいわゆる Geiringer の式であるが、同時にこの方向が速度の特性曲線なることを示している。

他方、応力特性曲線 (びり線) 成分に関して (1.2), (1.3) 式を変換すると

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi \frac{\partial u_1}{\partial s_1} - u_1 \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial s_1} - u_2 \frac{\partial \theta}{\partial s_1} + \cos \phi \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + u_2 \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial s_2} + u_1 \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial s_1} + \sin \phi \frac{\partial u_2}{\partial s_1} - u_2 \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial s_1} - \frac{\partial u_2}{\partial s_2} - \sin \phi \frac{\partial u_1}{\partial s_2} - u_1 \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.5)$$

が得られる。ここに  $u_1, u_2$  はびり線方向の速度成分で

$$u_x = u_1 \cos \theta - u_2 \sin(\theta - \phi), \quad u_y = u_1 \sin \theta + u_2 \cos(\theta - \phi)$$

により  $u_x, u_y$  と結ばれる。なおこの際の微分変換式は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\cos \phi} \left\{ \cos(\theta - \phi) \frac{\partial}{\partial s_1} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial s_2} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\cos \phi} \left\{ \sin(\theta - \phi) \frac{\partial}{\partial s_1} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial s_2} \right\}$$

を用いてある。(1.5) 式でみられる通り、等方、非可圧の仮定の下ではびり線に関する速度成分が簡単な形で表わされないうち、もちろん差分的数値解法の適用もできない。

等方、非可圧とした時の速度方程式の特性曲線が、主応力方向を二等分する最大せん断応力線方向となり、びり線とは一致せぬことを前節に示したが、これによりびり線を速度の特性曲線とするための三つの方途が考えられる。すなわち i) 非可圧性のみを放棄して等方、可圧性とする、ii) 等方性のみを放棄して非可圧、異方性とする、iii) 最も一般的に可圧、異方性とする、等である。

一般に金属では塑性変形の増大にともない単結晶であつても異方性効果を示すようになることが認められているが同時に非可圧的でもなくなるという。砂のせん断時にみられるせん断層<sup>2)</sup>内でも異方性を呈していると考えられる面がある。また自然の成層土が異方性であることも疑う余地はない。このように異方性を取り入れることは、理論として最も望ましいことではあるが、同時に Mohr の限界線は唯一には確定し得ず (方向によるパラメーターが入るであろう) 応力関係式そのものに吟味を加える要がある<sup>3)</sup>。異方性としての土の降伏条件は実験的にもまだ十分研究されていない実情であるので ii), iii) に対する考察は今後の問題として残されねばならない。

本論文では等方性は許されるとして (従つて拡張された Kötter 式などは使用できる) 塑性材料が可圧性である場合を考えることとする。可圧性の式は未知であるが逆解法により以下のごとく求められる。(1.5) 式の下段の式は等方性なる (1.3) 式の変換であるから今の場合も成り立つものである。その式でさらに

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_1} + \sin \phi \frac{\partial u_2}{\partial s_1} - u_2 \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + \sin \phi \frac{\partial u_1}{\partial s_2} + u_1 \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

が成り立つと仮定しよう。上式で  $\partial / \partial s_i$  は  $d/ds_i$  と記してよいが、これはいうまでもなくびり線が速度の特性曲

と一致することを意味している。(2.1) 式を再び直交成分に関し変換すれば(1.2) 式に対応して可圧性表示式が得られよう。すなわち、

$$u_1 = \frac{1}{\cos \phi} \{u_x \cos(\theta - \phi) + u_y \sin(\theta - \phi)\}, \quad u_2 = \frac{1}{\cos \phi} (-u_x \sin \theta + u_y \cos \theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = -\sin(\theta - \phi) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\theta - \phi) \frac{\partial}{\partial y}$$

によつて(2.1) 式を改めると

$$\cos \phi \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \cos^2 \theta + \frac{\partial u_y}{\partial y} \sin^2 \theta + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \cos \theta \sin \theta \right\} = 0$$

$$\cos \phi \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \sin^2(\theta - \phi) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cos^2(\theta - \phi) - \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \sin(\theta - \phi) \cos(\theta - \phi) \right\} = 0$$

これを解いて(1.1) 式の記号を用いると

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{-2 \sin \theta \cos(\theta - \phi)}{\cos(2\theta - \phi)} \dot{\gamma}_{xy}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{2 \cos \theta \sin(\theta - \phi)}{\cos(2\theta - \phi)} \dot{\gamma}_{xy} \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\bullet \cdot \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 2 \dot{\epsilon} = \frac{-2 \sin \phi}{\cos(2\theta - \phi)} \dot{\gamma}_{xy} \dots\dots\dots (2.3)$$

が得られる。(2.3) 式は(1.2) 式に対応した可圧性を表わす式で所求のものである。当然であるが(2.2) 式より

$$\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x = 2 \dot{\gamma}_{xy} \tan(2\theta - \phi) \dots\dots\dots (2.4)$$

なる等方性の式 [(1.3)] が得られる。すなわち、逆に等方的である摩擦性塑性材料では(2.3) 式で示される可圧性を有する時、速度と応力の特性曲線はいずれも迂り線と一致し迂り線に関する速度方程式は(2.1) 式または

$$\left. \begin{aligned} s_1 \text{ に沿つて} : du_1 + \sin \phi du_2 - u_2 \cos \phi d\theta = 0 \\ s_2 \text{ に沿つて} : du_2 + \sin \phi du_1 + u_1 \cos \phi d\theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1')$$

で与えられることになる(証明は簡単だから省略する)。 $\phi = 0$  であれば(2.1) 式が Geiringer の式に帰着することはいうまでもない。

(2.1) 式または(2.1') 式の幾何学的意味は迂り線に沿う伸び速度が0 であることである。何者 図-1 (a) について迂り線に沿う微小長  $ds_1$  の伸び速度が

$$(u_1 + du_1) \cos d\theta + (u_2 + du_2) \sin(\phi - d\theta) - (u_1 + u_2 \sin \phi) = du_1 + \sin \phi du_2 - u_2 \cos \phi d\theta + 0(\epsilon^2)$$

であるから上のことは明らかである( $s_2$  についても同様)。すなわち  $s_1, s_2$  方向の伸びひずみ速度を  $\dot{\epsilon}_{s_1}, \dot{\epsilon}_{s_2}$  とすると、これらは0 となる(これは(2.2) 式からも容易に得られることである)。また(2.1') 式から知れるように、 $s_i$  が流線( $s_i$  上で  $u_i = 0$ ) であれば  $s_i$  に沿う速度は一定( $du_i = 0$ ) である。圧縮応力を正と約束する立場では、圧縮ひずみ増分を正と決めるのが便利であるが、このためには速度に負号をつけねばよい。こうしても上の諸式はすべて速度成分の一次結合であるから式の形はなんら変更されることはない。

今まで暗に  $\cos(2\theta - \phi) \neq 0$  を仮定して来たが、Rankine 迂り線場では  $\theta = \pi/4 + \phi/2$  (主働),  $-\pi/4 + \phi/2$  (受働) であるから別に吟味をする必要がある。(2.1) 式に戻り  $\partial \theta / \partial s_i = 0$  を考えると

$$\partial u_1 / \partial s_1 + \sin \phi \partial u_2 / \partial s_1 = 0, \quad \partial u_2 / \partial s_2 + \sin \phi \partial u_1 / \partial s_2 = 0$$

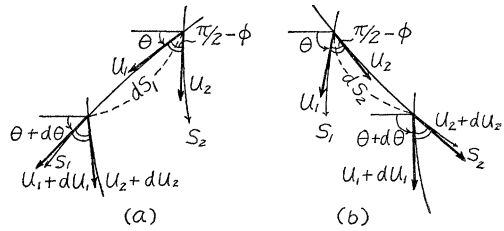
が成立つから  $xy$  成分に変換した結果

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \sin \phi (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \quad (\text{主働時}) \\ \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \sin \phi (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1) \quad (\text{受働時}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.5)$$

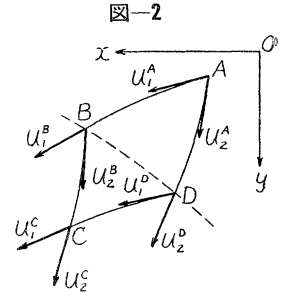
が容易に求まる。ただし、この時(1.3) 式から  $\dot{\gamma}_{xy} = 0$  であるので、 $\partial u_x / \partial x = \dot{\epsilon}_1, \partial u_y / \partial y = \dot{\epsilon}_2$  としてある。主働の場合は  $\dot{\epsilon}_2 > 0$  (圧縮) と考えるべきであるが、これは  $2 \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 < 0$  (膨脹) を意味する。何者  $0 < \sin \phi < 1$  であるから、 $\dot{\epsilon} < 0$  である時は  $\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 > \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2$  すなわち  $\dot{\epsilon}_2 > 0$  となるからである。この時は  $\dot{\epsilon}_1 < 0$  ( $|\dot{\epsilon}_1| > \dot{\epsilon}_2$ ) すなわち水平方向への膨脹がともなう。受働の場合も  $\dot{\epsilon} < 0$  であるが  $\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, |\dot{\epsilon}_2| > \dot{\epsilon}_1$  となり水平方向に圧縮される。(2.5) 式は粘着力のない場合の降伏条件  $\sigma_1 - \sigma_2 = \sin \phi (\sigma_1 + \sigma_2)$  に対応する。

塑性流動の生じている領域と静止している領域の境界を通じて速度が極限的に連続であるとすれば、その境界は迂り線と一致する。図-2 は迂り線で囲まれた要素で、これにつき(2.1) 式を記せば

図-1



$$\left. \begin{aligned} u_1^A - u_1^B + \sin \phi (u_2^B - u_2^A) - \frac{1}{2} (u_2^B + u_2^A) (\theta_B - \theta_A) &= 0 \quad \text{i)} \\ u_2^D - u_2^A + \sin \phi (u_1^D - u_1^A) + \frac{1}{2} (u_1^D + u_1^A) (\theta_D - \theta_A) &= 0 \quad \text{ii)} \\ u_1^C - u_1^D + \sin \phi (u_2^C - u_2^D) - \frac{1}{2} (u_2^C + u_2^D) (\theta_C - \theta_D) &= 0 \quad \text{iii)} \\ u_2^C - u_2^B + \sin \phi (u_1^C - u_1^B) + \frac{1}{2} (u_1^C + u_1^B) (\theta_C - \theta_B) &= 0 \quad \text{iv)} \end{aligned} \right\} \dots (2.6)$$



今二り線と一致せぬ線 (例えば 図-2 で BD を結ぶ線のごときもの) が前述の境界であると、BD の右上が静止域、左下が流動域と考える。速度が極限的に連続であるとすると BD 上で速度は 0 であるから  $u_1^B, u_2^B, u_1^D, u_2^D \equiv 0$  として

$$\text{iii), iv) は } u_1^C + u_2^C \left\{ \sin \phi - \frac{1}{2} (\theta_C - \theta_D) \right\} = 0, \quad u_2^C + u_1^C \left\{ \sin \phi + \frac{1}{2} (\theta_C - \theta_B) \right\} = 0$$

上の二式で  $u_1^C, u_2^C$  の係数の行列式は 0 でないから、 $u_1^C, u_2^C$  は恒等的に 0 となり、BD の左下も静止域となる。すなわち BD のような二り線と一致しない線は境界とはなり得ない。一方二り線 (例えば AB) が境界であるとすると、i) は満足され ii), iii), iv) は 4 個の未知量  $u_1^C, u_2^C, u_1^D, u_2^D$  に対する 3 個の連立方程式だから  $u$  は特別の制限を受けることなく 0 でない値をとり得て、AB の下方が流動域となり得る。これは、二り線が速度勾配の不連続線となり得ることを意味している。なお  $s_j$  二り線を越えての  $u_j$  の飛躍はゆるぎされない。これは  $\partial u_j / \partial s_i (i \neq j) = \infty$  であるが  $\phi = 0$  ならざる限り (2.1) 式から矛盾である。したがって二り線を越えてその方向の速度分布が不連続的に変化し得ぬが、これは金属の場合と大きな相違である。

(例) 対数螺旋域での速度解<sup>4)</sup>

放射動径を  $s_1$ 、対数螺旋を  $s_2$  二り線とした時  $ds_1 = dr, ds_2 = r d\theta / \cos \phi$  であるので (2.1) 式は

$$\partial u_1 / \partial r + \sin \phi \partial u_2 / \partial r = 0 \quad \text{i)}$$

$$\partial u_2 / \partial \theta + \sin \phi \partial u_1 / \partial \theta + u_1 \cos \phi = 0 \quad \text{ii)}$$

$$\therefore \text{i) より } u_1 + u_2 \sin \phi = f(\theta) \quad \text{iii)}$$

iii) の左辺は  $r$  に関せず、これより  $\dot{\epsilon}_r = 0$  である。iii) を ii) へ入れて積分すれば

$$u_1 = f(\theta) + \sin \phi e^{\mu \theta} \int_{\theta_0}^{\theta} e^{-\mu \theta} \frac{f \cos \phi + f' \sin \phi}{\cos^2 \phi} d\theta - \sin \phi g(r) e^{\mu \theta} \quad \text{iv)}$$

を得る。ここに  $\mu = \tan \phi, f' = df/d\theta$  で  $\theta_0$  は螺旋の始動径の偏角である。iv) を iii) に入れて

$$u_2 = e^{\mu \theta} \int_{\theta_0}^{\theta} e^{-\mu \theta} \frac{f \cos \phi + f' \sin \phi}{\cos^2 \phi} d\theta + g(r) e^{\mu \theta} \quad \text{v)}$$

$f(\theta), g(r)$  は次のごとくして決める。今中心 ( $r=0$ ) が塑性域内にあるとして、そこでの変位速度を  $v_0$ 、方向角を  $\beta$  とすると  $v_0$  の  $s_1, s_2$  成分  $u_1^0, u_2^0$  は

$$u_1^0 = v_0 \cos(\theta - \beta - \phi) / \cos \phi, \quad u_2^0 = v_0 \sin(\beta - \theta) / \cos \phi \quad \text{vi)}$$

である。iii) より  $r=0$  で  $u_1^0 + \sin \phi u_2^0 = f(\theta)$  だから結局

$$f(\theta) = v_0 \cos(\theta - \beta) \quad \text{vi)}$$

vi) を iv), v) に戻して

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{v_0}{\cos \phi} \cos(\beta + \phi - \theta) - v_0 \mu e^{\mu(\theta - \theta_0)} \sin(\theta_0 - \beta) - \sin \phi \cdot g(r) e^{\mu \theta} \\ u_2 &= \frac{v_0}{\cos \phi} \sin(\beta - \theta) + \frac{v_0}{\cos \phi} e^{\mu(\theta - \theta_0)} \sin(\theta_0 - \beta) + g(r) e^{\mu \theta} \end{aligned} \right\} \quad \text{vii)}$$

$\theta = \theta_0$  での  $u_1$  か  $u_2$  が指定されれば  $g(r)$  が決まり、vii) が速度解となる。なお  $r=0$  では vi), vii) を比べて  $g(0) = v_0 \sin(\beta - \theta_0) e^{-\mu(\theta_0 - \theta_0)} / \cos \phi$  でなければならない。さらに全領域塑性であるためには、 $g(r)$  そのものにある制限が課せられるが、これについては次節で調べる。

3. 塑性流動における応力とひずみ増分の関係

物体内で応力値が降伏条件を満たす値に達すれば以後無制限な変位の増大を生ずる。ここで降伏条件は Coulomb-Mohr 式

$$\psi \equiv \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 - \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + c \cot \phi \right)^2 \sin^2 \phi = 0 \dots \dots \dots (3.1)$$

である。この流動状態における応力とひずみ増分の関係を規定する式を求めよう。まず (2.2) 式より、 $\theta$  を消去

して

$$\left. \begin{aligned} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y)^2 &= [(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + 4\dot{\gamma}_{xy}^2] \sin^2 \phi \\ \text{または } \frac{\dot{\epsilon}^2}{\sin^2 \phi} &= (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon})^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2 \left( \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

これは流動時のひずみ速度が満足する式であり、 $\dot{\epsilon} \sim r$  面で  $\dot{\epsilon}$  を中心とする半径  $|\dot{\epsilon}|/\sin \phi$  の円である。

応力とひずみ増分の関係は i) 同時に (3.1) 式と (3.2) 式を満たすべきこと, ii) 迂り線に沿つては  $\dot{\epsilon}_s = 0$  であること(前節参照), iii) 等方性の条件を満足すること, iv) テンソル変換則に従うことの4個の条件に合致せねばならない。このような関係は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= k \left[ \left\{ \frac{\cos^2 \phi}{2} \sigma_x - \left( 1 - \frac{\cos^2 \phi}{2} \right) \sigma_y \right\} - c \sin \phi \cos \phi \right] \\ \dot{\epsilon}_y &= k \left[ \left\{ \frac{\cos^2 \phi}{2} \sigma_y - \left( 1 - \frac{\cos^2 \phi}{2} \right) \sigma_x \right\} - c \sin \phi \cos \phi \right] \\ \dot{\gamma}_{xy} &= k \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.3)$$

である。ここに  $k$  は比例係数(スカラー点関数)でその意味は後述する。(3.3) 式より

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = -k[\sin^2 \phi (\sigma_x + \sigma_y) + 2c \sin \phi \cos \phi], \quad \dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y = k(\sigma_x - \sigma_y)$$

であるから、これらを(3.2)式に代入すると(3.1)式が得られる(条件 i)。次に  $y$  方向を迂り線と考えると Mohr 円の考えから

$$\sigma_y = \sigma_x (1 + 2 \tan^2 \phi) + 2c \tan \phi$$

であるが、これを(3.3)式に用いると容易に  $\dot{\epsilon}_y = 0$  が驗められる(性質 ii)。また(3.3)式の第三式は等方性を示すことにほかならない。さらに(3.3)式の関係式は(3.1)式の  $\psi$  と

$$\dot{\epsilon}_x = k \partial \psi / \partial \sigma_x, \quad \dot{\epsilon}_y = k \partial \psi / \partial \sigma_y, \quad 2\dot{\gamma}_{xy} = k \partial \psi / \partial \tau_{xy} \dots\dots\dots (3.4)$$

で結ばれることが注目されるべきである。 $\psi$  は不変量として応力テンソルのスカラー関数であるから、その成分による微係数である  $\dot{\epsilon}, \dot{\gamma}$  などはテンソル量である。かくて性質 iv) も満たされることが判つた。なお  $\psi$  はいわゆる塑性ポテンシアルに相当するものである。(3.3)式を主軸表示に改めると

$$\dot{\epsilon}_i = k \left[ \left\{ \frac{\cos^2 \phi}{2} \sigma_i - \left( 1 - \frac{\cos^2 \phi}{2} \right) \sigma_j \right\} - c \sin \phi \cos \phi \right] \quad (i, j = 1, 2) \dots\dots\dots (3.5)$$

以上を拡張して三次元における応力とひずみ速度の関係式を得るため

$$\dot{\epsilon}_i = K[\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k) + p] \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \dots\dots\dots (3.6)$$

と仮定する。ここに  $k, \nu, p$  は未定であるが、平面ひずみ問題の場合(3.6)式が、(3.5)式と一致することより定める。すなわち  $\dot{\epsilon}_s = 0$  より  $\sigma_s = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) - p$  となるが、これを(3.6)式の第一式に入れ

$$\dot{\epsilon}_1 = K[(1-\nu^2)\sigma_1 - \nu(1-\nu)\sigma_2 + (1+\nu)p]$$

これと(3.5)式の第一式を比べると

$$\begin{aligned} \nu &= 1 - \frac{\cos^2 \phi}{2}, \quad K = \frac{2k}{4 - \cos^2 \phi}, \quad p = -c \sin \phi \cos \phi \\ \therefore \dot{\epsilon}_i &= \frac{2k}{4 - \cos^2 \phi} \left[ \sigma_i - \left( 1 - \frac{\cos^2 \phi}{2} \right) (\sigma_j + \sigma_k) - c \sin \phi \cos \phi \right] \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \dots\dots\dots (3.7) \end{aligned}$$

が得られる。これが求める三次元への拡張式であるが、ポアソン比に当る  $\nu$  が  $1/2$  より小さくないことが注目されることである(次節参照)。ひずみ速度の三個の主成分  $\dot{\epsilon}_i$  が二次元と同じく、あるスカラー関数  $\Psi$  の応力成分による微係数で与えられるとすればそのような  $\Psi = 0$  は三次元における摩擦性塑性材料の降伏条件と考えるとよいと思われる。

$$\Psi = \left( \frac{1}{6} + \frac{\sin^2 \phi}{18} \right) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} + \cot \phi \right) \sin^2 \phi = 0 \dots\dots (3.8)$$

を探れば  $\partial \Psi / \partial \sigma_i \propto \dot{\epsilon}_i$  なることは容易に驗められよう。さらに平面ひずみの時(3.8)式が(3.1)式に帰着することの検証も簡単である。上式で  $\phi = 0$  とすれば

$$\Psi_0 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6c^2 = 0 \dots\dots\dots (3.9)$$

でこれは Mises の降伏条件にはかならない。(3.8)式を星塾教授<sup>3)</sup>の塑性理論による降伏条件と対比してみよう。同論文で用いている平均圧応力  $\sigma_m$  と、八面体せん断応力  $\tau_m$  ならびに降伏条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + c \cot \phi &= \sigma_m, \quad \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = 3 \tau_m \\ \tau_m &= \tan \psi \cdot \sigma_m, \quad \sin \phi = \frac{3 \tan \psi}{2\sqrt{2} \sqrt{1 - \kappa + \kappa^2 + (1 - 2\kappa) \tan \psi}} \end{aligned} \right\}$$

である。ここに  $\kappa$  は三軸試験では 0, 平面ひずみの時は 0.5 をとる。これにより (3.8) 式を改めると

$$\tau_m = \sigma_m \cdot \sqrt{2} \sin \phi / \sqrt{3 + \sin^2 \phi} \quad \therefore \sqrt{2} \sin \phi / \sqrt{3 + \sin^2 \phi} \sim \tan \psi \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

本理論の当否は (3.9) 式の両辺の値の比較によりある程度は果されると思われるがその結果を表-1 に掲げる。

表-1

$\phi$ (度)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$\sqrt{2} \sin \phi / \sqrt{3 + \sin^2 \phi}$	0	0.712	0.142	0.209	0.274	0.334	0.393	0.444	0.492
$\tan \psi = \sqrt{2} \sin \phi / 3$ (平面ひずみ)	0	0.712	0.142	0.212	0.279	0.345	0.408	0.469	0.525
$\tan \psi = \frac{2\sqrt{2} \sin \phi}{3 - \sin \phi}$ (三軸圧縮)	0	0.082	0.167	0.250	0.333	0.423	0.514	0.606	0.703

平面問題における (3.9) 式の両値の一致は相当よいが、これは (3.8) 式が二次元での考察から出発して得られたものであるため当然ともいえる。これに反して三次元軸対称では  $\phi$  の大きいところでは差が大になり、 $\phi=40^\circ$  では約 30% のくい違いが見られる。

(3.3) 式以下の式に現われた  $k$  は常数でない。三次元の場合はむしろ見易いから二次元式によつてその物理的意味を調べる。平面ひずみでは全塑性仕事率 ( $\dot{W}$ ), 容積仕事率 ( $\dot{W}_v$ ), 形状変形仕事率 ( $\dot{W}_s$ ) が次式を満足する。

$$\dot{W}_s = \dot{W} - \dot{W}_v = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 - \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

(3.7) 式の第三式より  $\dot{\epsilon}_3 = 0$  の時

$$\left. \begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{1 + \sin^2 \phi}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + c \sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{3}{2} \delta \\ \text{ただし } \delta &= \frac{2}{3} [(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{\sin^2 \phi}{2} + c \sin \phi \cos \phi] = \frac{1}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \phi \quad (\sigma_1 > \sigma_2) \end{aligned} \right\}$$

上の第二式は (3.1) 式を用いて改めた。これを (3.10) 式へ代入し (3.5) 式を用いると

$$\dot{W}_s = \frac{k (\sigma_1 - \sigma_2)^2}{6} (3 + \sin^2 \phi)$$

$$\therefore k = \frac{6 \dot{W}_s}{(3 + \sin^2 \phi) (\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \frac{6 \dot{W}_s}{(3 + \sin^2 \phi) \{(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi + 2 c \cos \phi\}^2} \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

が得られる。このように  $k$  はスカラー関数で、形状変形仕事率に比例し、平均圧応力の増大にもなつて小さくなる。換言すれば内圧が大きくなれば塑性ひずみ速度、またはその増分が内圧の逆比的に制約されることになる。三次元に対しては (3.11) 式の分母が  $(3 + \sin^2 \phi) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2$  の代りに  $2\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}$  になる。

(3.5), (3.7) 式はともに偏差テンソルにより

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_i &= k \sigma_i' \quad (i=1, 2 \text{ または } 1, 2, 3) \\ \text{ただし } \dot{\epsilon}_i' &= \dot{\epsilon}_i - \frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3}{3}, \quad \sigma_i' = \sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

と表わすことができる。すなわち摩擦がある時でも、応力とひずみ速度の偏差成分は金属の剛塑性における Lévy-Mises の関係式と同型になることが判る。

今までは剛塑性域での応力とひずみ速度の関係を考へてきたが、弾性ひずみの存在が無視できない時は (3.7) 式を拡張して全ひずみ速度が Prandtl-Reuss 式より類推して

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{2k}{4 - \cos^2 \phi} \left[ \sigma_i - \left(1 - \frac{\cos^2 \phi}{2}\right) (\sigma_j + \sigma_k) - c \sin \phi \cos \phi \right] + \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_i - \nu_e (\dot{\sigma}_j + \dot{\sigma}_k)] \quad (i, j, k=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

と表わせる。ここに  $E, \nu_e$  は弾性域での縦弾性率およびポアソン比である。上式の右辺第二項は弾性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_i^e$  であるので  $\dot{\epsilon}_i^p = \dot{\epsilon}_i - \dot{\epsilon}_i^e$  は純塑性ひずみ速度である。したがつて (3.11) 式を導いたと全く同様に  $k = 3 \dot{W}_s^p / \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \dots\}$  である。一般なる軸について (3.13) 式にテンソル変換を施せば  $G$  を弾性せん断剛性率とする時

$$\dot{\gamma}_{xy} = k \tau_{xy} + (1/2 G) \dot{\tau}_{xy} \quad \text{など} \quad \dots\dots\dots (3.13')$$

降伏条件を満たさぬ応力変化 (例えば一様圧縮) を除荷と呼ぶことにすると、除荷の際は (3.13) 式の代りに  $\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i^e = [\dot{\sigma}_i - \nu_e (\dot{\sigma}_j + \dot{\sigma}_k)] / E$  と考へるべきである (弾性公式)。

なお弾塑性状態での (3.13) 式に於ける平面ひずみの関係は複雑である (後述の例-2 参照)。

(例-1) 対数螺旋迂り線場でのひずみ速度

前例で極座標を用いると  $u_r = u_1 + u_2 \sin \phi = v_0 \cos(\theta - \beta)$

$$u_\theta = u_2 \cos^* \phi = v_0 \sin(\beta - \theta) + h(r) \cos \phi e^{\mu \theta}, \quad h(r) \equiv g(r) - g(0) = g(r) - \frac{v_0 e^{-\mu \theta_0} \sin(\beta - \theta_0)}{\cos \phi}$$

であるので  $\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad 2\dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$

に入れて  $\dot{\epsilon}_r = 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \mu \frac{h(r)}{r} \cos \phi e^{\mu \theta}, \quad 2\dot{\gamma}_{r\theta} = \left( \frac{dh}{dr} - \frac{h}{r} \right) \cos \phi e^{\mu \theta}$  i)

このひずみ速度成分は (3.2)式, または変換して得られる

$$(\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta)^2 = \{(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + 4\dot{\gamma}_{r\theta}^2\} \sin^2 \phi$$
 ii)

を満足せねばならない (全域塑性の仮定)。ii) に i) を代入して

$$\frac{dh}{dr} = \frac{2h}{r} \quad \therefore h = cr^2 \quad (c \text{ は常数})$$
 iii)

$$\therefore g(r) = \frac{v_0 e^{-\mu \theta_0} \sin(\beta - \theta_0)}{\cos \phi} \left\{ 1 - \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right\}$$
 iv)

のような解が得られる。ただし  $\theta = \theta_0$  上で  $g(\rho) = 0$  とする。

(例-2) 平面ひずみ条件での圧縮<sup>1)</sup>

弾塑性の問題の一例として,  $x$  方向が自由,  $z$  方向が剛性拘束,  $y$  方向に圧縮する問題を取り扱う。(3.13) 式は

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_y \sim d\epsilon_2 &= \{ \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) - c \sin \phi \cos \phi \} d\lambda + \frac{1}{E} \{ d\sigma_2 - \nu_e(d\sigma_3 + d\sigma_1) \} \\ d\epsilon_z \sim d\epsilon_3 &= \{ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) - c \sin \phi \cos \phi \} d\lambda + \frac{1}{E} \{ d\sigma_3 - \nu_e(d\sigma_1 + d\sigma_2) \} \end{aligned} \right\}$$
 1)

ただし  $\nu = (1 + \sin^2 \phi)/2, \quad \sigma_1 = 0, \quad d\epsilon_3 = 0$  として上の二式から  $d\lambda$  を消去すると

$$Ed\epsilon_2 = - \frac{\sigma_2 - \nu\sigma_3 - c \sin \phi \cos \phi}{\sigma_3 - \nu\sigma_2 - c \sin \phi \cos \phi} \cdot (d\sigma_3 - \nu_e d\sigma_2) + d\sigma_2 - \nu_e d\sigma_3$$
 ii)

a) 降伏条件として (3.8) 式を用いると  $\sigma_1 = 0$  だから

$$\left( \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 \phi}{9} \right) (\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \sigma_3) = \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{3} + c \cot \phi \right)^2 \sin^2 \phi$$
 iii)

これを微分して  $d\sigma_2(\sigma_2 - \nu\sigma_3 - c \sin \phi \cos \phi) + d\sigma_3(\sigma_3 - \nu\sigma_2 - c \sin \phi \cos \phi) = 0$  iv)

iii), iv) より  $\sigma_3, d\sigma_3$  を求めて ii) に入れて積分すると

$$\begin{aligned} E\epsilon_2 = \sigma_2 \left\{ 1 - \frac{(1 - \sin^2 \phi)^2}{2} - \nu_e(1 + \sin^2 \phi) \right\} - \frac{\cos \phi \sqrt{3 + \sin^2 \phi}}{2} \{ -2\nu_e + (1 + \sin^2 \phi) \} \\ \times \sqrt{4c^2 + 4\sigma_2 \tan \phi - \sigma_2^2} - c \cos \phi \frac{3 + \sin^2 \phi}{2} \tanh^{-1} \left( \frac{2c \tan \phi - \sigma_2 \cos \phi}{2c} \right) + C' \end{aligned}$$
 v)

$C'$  は降伏開始時の  $\sigma_2$  を  $\sigma_2^0$  とすると, その時  $\epsilon_2 = \epsilon_2^0$  (降伏開始または弾性上限でのひずみ) であることから決る。ここに  $\sigma_2^0, \epsilon_2^0$  は Hooke の法則と降伏条件 iii) より

$$\sigma_2^0/c = \frac{3 \cos \phi}{\sqrt{(3 + \sin^2 \phi)(\nu_e^2 - \nu_e + 1)} - (1 + \nu_e) \sin \phi} E\epsilon_2^0/c = \sigma_2^0/c(1 - \nu_e^2)$$
 vi)

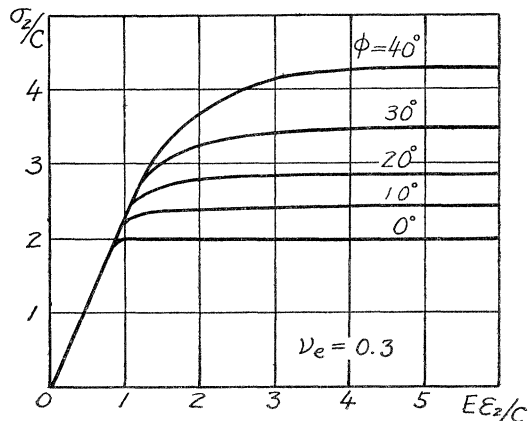
図-3

で与えられることはただちに解る。

$\sigma_2^0$  は  $\phi = 0, \nu_e = 0.5$  の時は  $2c$  であり  $\phi$  とともに増大する。 $\tanh^{-1}$  内の引数が  $(-1)$  に近づく時  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$  となる。

すなわち  $\sigma_2 \rightarrow 2c \cos \phi / (1 - \sin \phi) \equiv \sigma_{2,Y}$  で無制限流動が起こる。なお  $\sigma_{2,Y}$  は  $2c \tan(\pi/4 + \phi/2)$  だから一軸圧縮強度の意味をもつ。 $\nu_e = 0.3$  について  $\sigma_2/c$  と  $E\epsilon_2/c$  の関係を 図-3 に示す。

b) (3.1) 式を用いる時も類似の結論が得られる。ただし (3.1) 式には  $\sigma_2$  (または  $\sigma_3$ ) を含まないから 1) は  $\epsilon_2$  と  $\sigma_3$  の関係を与えるのに役立つ。流動開始直前の弾性ひずみを  $\epsilon_2^e$  とすると w) の代りに



$$E(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^e) = \left(1 - \frac{\cos^2 \phi}{2} - \nu_e\right) \left(\sigma_3 - \frac{2\nu_e c \cos \phi}{1 - \sin \phi}\right) + c \cos \phi \frac{3 + \sin^2 \phi}{2} \log \left( \frac{c - \frac{2\nu_e c}{1 + \sin \phi}}{c - \frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi (1 + \sin \phi)} \sigma_3} \right) \quad \text{vii)}$$

(3.1) 式より  $\sigma_2 = \sigma_{2,Y}$  の時流動が起こるが、その時 vii) より

$$\sigma_3 \rightarrow \frac{c(1 + \sin \phi) \cos \phi}{1 - \sin \phi} = \frac{\sigma_{2,Y}}{2} (1 + \sin \phi) < \sigma_{2,Y} \quad \text{viii)}$$

で流動時の拘束圧が求まる。これは中間主応力 ( $\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$ ) である。

4. ダイレイタンスーへの応用

前節で求めたポアソン比  $\nu \left( = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \phi) \right)$  が  $1/2$  より大きいことは、一般に粒状物質が塑性流動を起こすときその容積が膨脹することを意味する。これはダイレイタンスーともし知られている。星塾教授<sup>3)</sup>の理論において一軸圧縮の場合の降伏時のポアソン比は  $\nu_f = 1/(2 - \sin^2 \phi)$  で与えられている。表-2 は  $\nu$  と  $\nu_f$  の対比を平面ひずみと軸対称の両者について行つたものである。

表-2

$\phi$ (度)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$\nu$	0.500	0.504	0.515	0.532	0.558	0.590	0.625	0.665	0.707
$\nu_f$ (平面ひずみ: $\tan \psi = \sqrt{2} \sin \phi / \sqrt{3}$ )	0.500	0.504	0.516	0.534	0.561	0.595	0.637	0.685	0.760
$\nu_f$ (軸対称: $\tan \psi = 2\sqrt{2} \sin \phi / (3 - \sin \phi)$ )	0.500	0.502	0.521	0.550	0.588	0.605	0.730	0.839	0.992

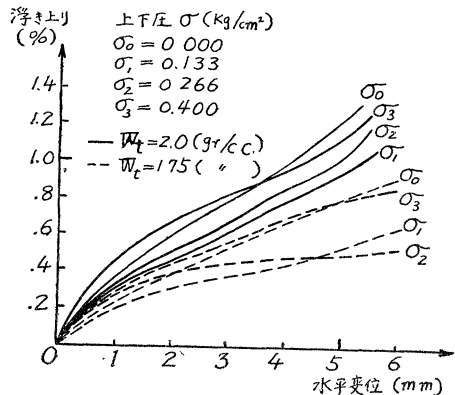
この場合も  $\phi$  が大きくなると軸対称でことに両者の差は大きくなり、 $\phi = 40^\circ$  での誤差は約 30% であるが、全域にわたる一致の程度は前掲表-1より良好である。三軸試験におけるせん断時の容積変化は初めはわずかに収縮するがやがて膨脹に転じ降伏して軸応力が増大せぬようになつてもなお膨脹を続けるが、その程度は漸次小となり砂壤に到る。初期収縮は軸応力の加わり初めは全体的にまだ弾性を保持し弾性ポアソン比 ( $\nu_e$ ) が  $1/2$  より小さいことに原因すると思われる。塑性域の拡大にもなつて膨脹が起こるが、降伏点を過ぎると全体としてゆるみ始め  $\phi$  が減少する。したがつてポアソン比は再び  $1/2$  に近づき非圧縮的となつて膨脹率が減少するものと考えられる。また砂の場合密詰めである程  $\phi$  も大きく同時に膨脹率も大きいこれは  $\nu = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \phi)$  が  $\phi$  と共に大きくなることによるのであろう。このように本文で導いたポアソン比は土のせん断時の容積変化を定性的に説明し得るのであるが、定量的吟味を行うために直接せん断と三軸圧縮における砂質土 ( $c=0$ ) の流動時の容積変化を表わす式を求めよう。二次元では (3.3) 式において  $\tau_{xy} = \tau_s = (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi \cos \phi / 2$  を考えると単位膨脹率  $\dot{v}$  が

$$-(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) \equiv \dot{v} = k \sin^2 \phi (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{\dot{\tau}_s}{\tau_s} \sin^2 \phi (\sigma_1 + \sigma_2) = 2 \dot{\tau}_s \tan \phi \dots \dots \dots (4.1)$$

で与えられる。

流動変形時の  $\phi$  の変化を無視すれば上式を積分し  $v = 2 r_s \tan \phi$  となるが、これより容積変化はせん断ひずみに、比例し (したがつて直接せん断ならば水平変位に比例) 平均圧力 (直接せん断ではほぼ上下圧) には無関係でかつ  $\phi$  の大きい程大きい。このことは図-4 に示す実験結果と照しても妥当のようである。本実験は砂質ロームを粒径が  $0.11 \sim 0.4 \text{ mm}$  であるごとくふるい分けしたものを 10% の含水比で単位重量 ( $W_t$ ) が 2.0 および 1.75  $\text{gr/cm}^3$  であるように圧縮機で静的に締固めた試料について一面せん断を行つたものである。横軸は降伏後の水平変位で縦軸は鉛直上昇高を試料厚 (一定で  $h_0 = 3.56 \text{ cm}$ ) で割つたものである。試験は上下圧を 4 種に変えておのおの 3 回行つたものの平均を図示したが、膨脹 ( $\propto$  浮き上り) は上下圧に余り関係はなくほぼ水平変位 ( $\propto r_s$ ) に比例しており、かつ  $W_t$  が大きいとき (したがつて  $\phi$  も大) の膨脹は  $W_t$  の小さいときに比べて大となり前式の特性に違背しない。直接せん断では流動域がせん断面をはさむ薄層 (いわゆるせん断層) に局限されるゆゑ膨脹は過小に出

図-4





るであろう。 $r_s$  の概略の推定値として(水平変位/試料径)を以てすれば浮き上りの実験値は(4.1)式より求める  $v$  の約 15 分の 1 である。これより逆算してせん断層の厚さは  $h_0/15 \doteq 2.5 \text{ mm}$  程度と推定される。

三軸試験におけるダイレイタンスー式は  $\sigma_1$  を軸応力,  $\sigma_2 = \sigma_3$  を側圧とすると(3.7)式より

$$\dot{\epsilon}_1 = K [\sigma_1 - (1 + \sin^2 \phi) \sigma_2], \quad \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = K \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \phi) (\sigma_1 + \sigma_2) \right]$$

だから

$$-(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3) = \dot{v} = \dot{\epsilon}_1 \frac{\sin^2 \phi (\sigma_1 / \sigma_2 + 2)}{\sigma_1 / \sigma_2 - (1 + \sin^2 \phi)} \dots (4.2)$$

のようになる。ただし円筒供試体の全域塑性を仮定している。 $\sin \phi$  は  $(\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2) = \sin \phi$  で与えられるとしてよいから流動時の膨脹は試験時の  $\sigma_1 / \sigma_2$  と  $\epsilon_1$  図表が知れる時(4.2)式を図式または数値積分することにより評価できる。

図-5にはこのように求めた  $v$  の計算値と実験値を示す。この実験値は□印は Taylor<sup>6)</sup> の書にあるもの、それ以外は鉛散弾につき Newland-Allery<sup>7)</sup> の行った実験の値を引用した。試料は相当密な状態のもの

であるがこの時の理論との差は約 1.5 倍程度計算値が過大になっている。この理由として考えられることは三軸試験でもなお試料全体に対する塑性域の拡大はあり得ないからであろう。事実両端面での拘束により試料内に円錐形の剛性域が発達するから長径比 2 の寸度では全容積の 2/3 程度が高々塑性域となり得るに過ぎない。図-5 の計算値の 2/3 がほぼ実測値の平均を通ることはこれを裏書きしているといえよう。

しかしながら一般にゆる詰めの場合(4.2)式は  $\phi$  が小になれば減少するが、その程度があまり大きくないので計算値は実験値に比べずつと過大になる(約 4~5 倍)。これは理論の仮定がゆる詰めにはあまり適用しがたいこと(ゆる詰めでは明確な降伏点がなく完全塑性の仮定が良い近似でなくなる)にもよるのであろう。またゆる詰めの際はせん断層が十分発達せぬ中に破壊が進むとも考えられるがこれらの理由で計算値が大きくなるのであろうと思う。

## 5. 結 論

本理論の組み立ては応力と速度の特性曲線が一致することのみを基礎仮定としているが、導かれた応力とひずみ増分の関係、三次元降伏条件式、流動時のポアソン比、さらにせん断時の粒状物質の膨脹現象などは従来の理論、実験と対比し少なく共定性的に、そしてある程度定量的にも矛盾がないことが示された。これにより今まで不明瞭であつた摩擦性塑性体の流体力学に一つの足掛りが得られたと思う。降伏条件を塑性ポテンシアルとする応力、ひずみ増分の関係式は今後解の一意性等のより基本的な問題の解明に役立つであろう。

本論文は摩擦性塑性材料に関する理論的研究の一部であるが、これに関しては特に 東京大学最上教授より幾多の御示唆と御教示を仰いだ。ここに記して感謝の意を表したい。

## 参 考 文 献

- 1) R. Hill: The Mathematical Theory of Plasticity, p.299, p.77
- 2) T. Mogami: On the Law of Friction of Sand, 2nd. I.C.S.M.F.E.
- 3) B. Hansen: General Plasticity Theory of Clay, Géotechnique (1952)
- 4) W. Prager & P.G. Hodge: Theory of Perfectly Plastic Solids, p.146.
- 5) 星 栳 和: 土の力学における塑性の基本理論と三軸試験への適用, 土木学会論文集 第 21 号 (1954)
- 6) D.W. Taylor: Fundamentals of Soil Mechanics, p. 335
- 7) P.L. Newland & B.H. Allely: Volume Changes in Drained Triaxial Tests on Granular Materials. Géotechnique, (1955).

(昭.33 9.12)

