

# 橋の衝撃係数に関する確率論的一考察

正員 小 西 一 郎\*  
 正員 山 田 善 一\*\*  
 正員 篠 塚 正 宣\*\*\*  
 正員 小 堀 為 雄\*\*\*\*

## STOCHASTIC STUDY ON COEFFICIENT OF IMPACT IN DESIGN OF HIGHWAY BRIDGE

*By Dr. Eng., Ichiro Konishi, C.E. Member, Yoshikazu Yamada, C.E. Member,  
Masanobu Shinozuka, C.E. Member and Tameo Kobori, C.E. Member*

**Synopsis:** Dynamic behaviors of a bridge under the several pulsating forces show the resultant vibration as the results of combination of each individual vibration. In such case, the phase differences of fundamental vibrations from each other have a certain influence upon the resultant oscillation of the bridge. Therefore, in this paper, the authors consider that these phase differences occur *at random* under the various traffic conditions, and they stochastically clarify that the values of the impact coefficients are reduced successively according to the loading length.

**要旨** 橋に周期力をもついくつかの荷重が載荷される場合、橋の振動はそれぞれ個々の荷重による振動の合成振動として表わされる。ここで問題となるのは、それぞれ個々の振動の位相差によつて橋の合成振動の振動性状が異なることである。本研究では橋に作用する周期的荷重の位相差が *at random* であることに注目してこの位相差を確率変数と考え、確率論の立場より衝撃係数が橋の載荷長によつて逓減されることを示そうとするものである。

### 1. 緒 言

橋の衝撃係数は通常スパン長による逓減関数として与えられる。この根拠については従来多くの理論的、実験的研究が行われているが、本研究では振動学を加味した確率論の立場から橋のスパン長と衝撃との関係について基礎的研究を行った。まず、われわれは橋の載荷荷重を桁に静力学的影響をおよぼす静的力  $P$  と動力学的影響をおよぼす周期力  $P_0 \sin(\omega t + \delta_i)$  の2つの力からなるものと考え、桁は静タワミの外にこの周期力によつて強制振動を生ずるものとする。さて、このような荷重が数個同時に桁に作用するとき桁はそれぞれ個々の周期力による振動の合成振動をなし、その振幅、すなわち桁の動タワミは、周期力  $P_0 \sin(\omega t + \delta_i)$  の位相差  $\delta_i$  によつて異なるものと考えられる。本研究ではこの位相差は、個々の周期力によつてなんら拘束されることなく *at random* に取り得ると考えて考察を行っている。すなわち、位相差  $\delta_i$  を確率変数と考え各スパン長に対するある動タワミの生ずる確率を求め、逆にある確率となるような各スパン長に対する動タワミを算出し、これと静的力による静タワミとの比を衝撃係数と考え、この衝撃係数が載荷長によつて逓減する事の妥当性について論じたものである。

### 2. 本研究に用いた仮定

われわれは橋および載荷荷重について次のような仮定を用いた。この仮定については多少の問題点があり今後改良の余地が多いと考えられるが研究の第1段階としては許されるであろう。

- (1) 橋を等断面をもつ単純支持バリとする。
- (2) 載荷荷重の重量は走行荷重の質量による慣性力を無視し単に力  $P$  とおき、個々の荷重について一定とする。
- (3) 載荷荷重長  $s$  は一定とし、10 m とする。また、 $s$  の中央 ( $s/2$ ) に全重量が載荷されるものとする。
- (4) 荷重は橋の全載荷長に満載されるものとする。すなわちスパン 20 m の橋には2台、スパン 30 m の橋には3台、……載荷されることになる。

\* 工学博士，京都大学教授，工学部土木工学教室，\*\* 京都大学助教授，工学部土木工学教室  
 \*\*\* 京都大学大学院学生，工学研究科土木工学専攻（米国コロンビア大学留学中），\*\*\*\* 神戸市調査室

(5) 荷重は載荷された位置で橋桁に対し、自重  $P$  の外に周期力  $P_i = P_0 \sin(\omega t + \delta_i)$  をおよぼすものとする。つまり走行荷重による動的作用は一応この周期力でおきかえられると考える。ここに  $P_0 = \alpha P = \text{constant}$  とし、 $\alpha$  は周期力の最大値  $P_0$  と荷重の自重  $P$  との比であり、いいかえれば、自重の  $\alpha\%$  が橋桁に動的作用をおよぼすと考える。ここでは個々の荷重について  $\alpha$  は一定であるとする。

(6) この周期力  $P_0 \sin(\omega t + \delta_i)$  の振動数  $\omega$  は個々の周期力について一定とし、位相差  $\delta_i$  は走行荷重が橋を通過する際の種種の条件、すなわち、初期条件、橋面の凹凸、荷重そのものの振動性状などにより at random であるとする。

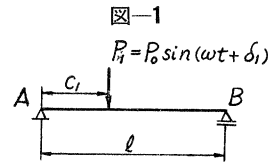
3. 橋桁のタワミ振動

2. の仮定に従えば、荷重の橋桁におよぼす力  $P_i'$  は

$$P_i' = P + P_i = P + P_0 \sin(\omega t + \delta_i) = P + \alpha P \sin(\omega t + \delta_i) \dots\dots\dots (1)$$

( $i=1, 2, 3, \dots$ )

式(1)の第1項の  $P$  は静荷重を表わし、第2項は橋に振動を生ぜしめる強制力である。まず、第2項の周期力  $P_0 \sin(\omega t + \delta_i)$  によつて生ずる橋桁の強制振動について考察を進める。一般に単純支持された橋桁の振動は線型微分方程式で表わされる。このとき、橋桁スパン中央断面  $c$  (以下スパン中央点  $c$  と書く) の振動振幅は個々の周期力  $P_0 \sin(\omega t + \delta_i)$  による振動の合成で求められる。いま 図-1 のようにある1個の周期力  $P_1 = P_0 \sin(\omega t + \delta_1)$  が支点  $A$  より距離  $c_1$  なる位置に作用する場合、一般座標  $q_n$  を用いて、タワミ曲線を、



$$y = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n \pi x}{l} \dots\dots\dots (2)$$

と表わす。このとき、一般力  $Q_n$  は、

$$Q_n = P_1 \sin \frac{n \pi c_1}{l} = P_0 \sin \frac{n \pi c_1}{l} \sin(\omega t + \delta_1) \dots\dots\dots (3)$$

となり、式(3)を用いると一般座標  $q_n$  に関する橋桁の運動微分方程式はつぎのように表わされる。

$$\ddot{q}_n + 2\beta_n \dot{q}_n + p_n^2 q_n = \frac{2P_0 g}{w} \sin \frac{n \pi c_1}{l} \sin(\omega t + \delta_1) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\beta_n$ : 減衰定数、 $p_n$ : 橋桁の  $n$  次円振動数、 $g$ : 重力加速度、 $w$ : 橋桁の重量、 $l$ : 載荷長

式(4)の特解として強制振動の項のみを取り、一方  $q_1$  にくらべて  $q_2, q_3, \dots, q_n$  は小さく、本問題ではとくに桁のタワミについて考察を進めるものとして、 $q_2$  以下を省略し式(2)は、

$$y = q_1 \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (5)$$

となり、 $q_1$  はスパン中央点  $c$  のタワミとなるから、ここでは、 $q_1 = y_c$  と書く。さて、式(4)の特解は、

$$y_c = q_1 = \frac{2P_0 g \sin \frac{\pi c_1}{l}}{w \sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 p^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_1) = \delta_{st} \frac{\alpha}{\alpha'} \sin \frac{\pi c'}{l} \sin(\omega t + \varphi_1) \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\}^2 + 4\beta^2 \left(\frac{\omega}{p}\right)^2}} \quad \varphi_1 = \delta_1 - r \quad r = \tan^{-1} \frac{2\beta \left(\frac{\omega}{p}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} = \text{constant}$$

ここで、 $\delta_{st}$  は荷重  $P$  がスパン中央点  $c$  に載荷したときの載荷点の静タワミを表わす。以上は、周期力が1個載荷される場合であるが、さらに、2個以上の周期力  $P_1 (= P_0 \sin(\omega t + \delta_1)) P_2, \dots, P_n$  によるスパン中央点  $c$  の動タワミ  $y_{cn}$  は“重ね合わせの原理”を用いて、次のように表わされる。

$$y_{cn} = \delta_{st} \frac{\alpha}{\alpha'} \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega t + \varphi_i) \dots\dots\dots (7)$$

( $i=1, 2, 3, \dots, n$ )

ここに、 $\varphi_i = \delta_i - r = \text{random quantities}$ ,  $a_i = \sin \frac{\pi c_i}{l}$

式(7)は、橋桁の合成振動の式である。

4. 確率論的考察

式(7)に示されているようにスパン中央点  $c$  の動タワミは  $y_{cn} = f(t, \varphi_i)$  である。いま、ある時刻  $t_1$  について

のみ考慮すれば  $y_{cn}=f(t, \varphi_i)$  となり、スパン中央点  $c$  の動タワミ  $y_{cn}$  は  $\varphi_i$  のみの関数となる。ところで、個々の周期力の位相差  $\delta_i$  の分布は仮定 (6) により、at random であると考えられ、一方式 (6) から  $r$  は constant であるので  $\varphi_i$  の分布もまた at random である。ゆえに、われわれは  $\varphi_i$  を確率変数としてスパン中央点  $c$  の動タワミ  $y_{cn}$  の確率分布を求めることができる。その分布の範囲はもし位相差  $\varphi_1=\varphi_2=\dots=\varphi_n=0$  であれば、それぞれの合成振動である  $y_{cn}$  は最大値として  $\left| \delta_{st} \frac{\alpha}{\alpha'} \Sigma a_i \right|$  を示すが、 $\varphi_i$  は random quantities であることからして、実際の合成振動振幅はこの値より小さい。

ここで新たに媒介変数  $r$  を用い、この  $r$  を式 (8) のように定義する。

$$\Sigma a_i \sin (\omega t+\varphi_i)=r_i \sin (\omega t+\theta) \dots \dots \dots (8)$$

式 (8) の  $a_i \sin (\omega t+\varphi_i)$  を正弦成分とするベクトルを  $a_i$  とする。すなわち、

$$|a_i|=a_i, \quad \text{Arg. } a_i=(\omega t+\varphi_i)$$

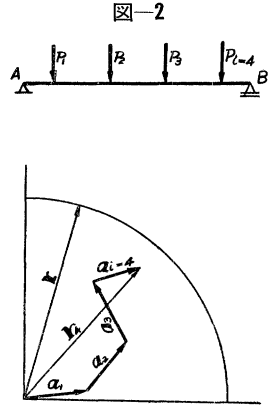
である。図-2 のように  $a_i$  の和を  $r_i$  とすると、

$$r_i=a_1+a_2+\dots+a_i \dots \dots \dots (9)$$

となり、 $r_i=|r_i|$  である。

このような  $r$  を用いてベクトル表示すればスパン中央点  $c$  の動タワミ  $y_{cn}$  は  $r_i$  に変換されることになる。ここで  $r_i$  が任意の  $r$  より小さい確率  $P_r(r_i < r)$  を求めれば、これはまた、周期力  $P_1 \dots P_n$  によるスパン中央点  $c$  の最大タワミ  $\max y_{cn}$  が任意の  $\max y_c$  より小さい確率となる。ここで、 $\max y_{cn}$ 、 $\max y_c$  の suffix max. としたのは、 $y_c$  は時間とともに変化する値でそのうちの最大値、すなわち、式 (7) の右辺  $\sin (\omega t+\varphi_i)=1$  となるようなスパン中央点  $c$  の動タワミという意味である。

さて、確率  $P_r(r_i < r)$  を求めるのであるが、われわれは計算の便宜上橋桁のスパン長さに従って次の三種の計算方法を用いることにする。(1) 幾何学的関係式 ( $l=20 \sim 30 \text{ m}$ ) (2) Kluver の分布式 ( $l=40 \sim 60 \text{ m}$ ) (3) Rayleigh の式 ( $l=70 \sim 120 \text{ m}$ )、これらの方法の詳細については 5. で説明する。

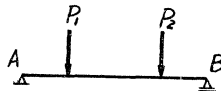


5. 確率  $P_r(r_i < r)$  の計算式

(1) 幾何学的関係式

スパン  $l=20 \sim 30 \text{ m}$  の橋については簡単な幾何学的関係より求めることができる。

(a)  $l=20 \text{ m}$  仮定 (1), (2), (3), (4) に従えば、スパン  $20 \text{ m}$  の橋には 2 個の荷重が載荷され、図-3 に示すように、周期力として  $P_1=[P_0 \sin (\omega t+\delta_1)]$ ,  $P_2=[P_0 \sin (\omega t+\delta_2)]$  が作用し、スパン中央点  $c$  の振動振幅を表わす式 (7) の  $\Sigma$  に関する項をベクトル表示すれば図-3 のようである。すなわち、



$$\left. \begin{aligned} a_1 \sin (\omega t+\varphi_1) &= a_1 \\ a_2 \sin (\omega t+\varphi_2) &= a_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

のように表わされ、これを重ね合わせると、

$$a_1 \sin (\omega t+\varphi_1)+a_2 \sin (\omega t+\varphi_2)=r \sin (\omega t+\theta)$$

ここに、

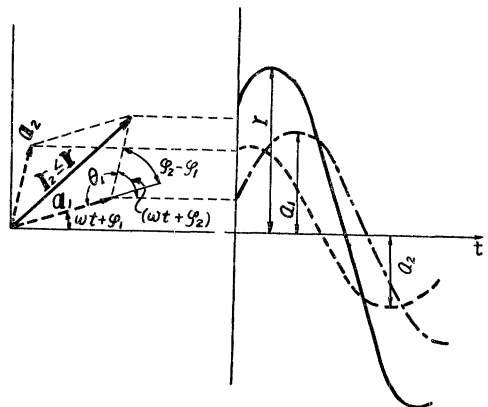
$$\tan \theta=\frac{a_1 \sin \varphi_1+a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1+a_2 \cos \varphi_2}$$

これより  $r$  を求めれば、

$$r^2=a_1^2+a_2^2+2 a_1 a_2 \cos \left(\varphi_2-\varphi_1\right)=a_1^2+a_2^2-2 a_1 a_2 \cos \theta_1 \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 $\theta_1=2 \pi-\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$ 。

式 (11) より、 $r_2$  が任意の  $r$  より小さい確率、いいかえれば、図-3 において任意の半径  $r$  内に合ベクトル  $r_2$  の存在する確率は、



$$P_r\left(r_2 < r\right)=\frac{1}{2 \pi} \int d \theta_1=\frac{1}{\pi} \cos ^{-1} \frac{a_1^2+a_2^2-r^2}{2 a_1 a_2} \dots \dots \dots (12)$$

ただし、

$$P_{r(r_2 < r)} = 1 \begin{cases} \frac{a_1^2 + a_2^2 - r^2}{2 a_1 a_2} < -1 \\ r > (a_1 + a_2) \end{cases} \quad P_{r(r_2 < r)} = 0 \begin{cases} \frac{a_1^2 + a_2^2 - r^2}{2 a_1 a_2} > 1 \\ r < (a_1 - a_2) \end{cases}$$

であり、これはまた、4. でも述べたように周期力による動タワミ  $y_{c2}$  の確率でもある。

(b)  $l=30\text{ m}$  同様にスパン 30 m の橋には、3個の荷重が載荷されるものとする。このとき、確率分布  $P_{r(r_3 < r)}$  は式 (12) を拡張して、

$$P_{r(r_3 < r)} = \frac{1}{4 \pi^2} \iint d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{\pi^2 a_1 a_2} \int_{(a_1 - a_2)}^{(a_1 + a_2)} \frac{r_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - r_2^2}{2 a_1 a_2}\right)}} \cos^{-1} \frac{a_2^2 + r_2^2 - r^2}{2 r_2 a_3} dr_2 \dots \dots \dots (13)$$

をうる。

以上、式 (12)、(13) について、 $r$  に適当な数値を代入して、それぞれの  $r$  に対する確率  $P_{r(r_2 < r)}$ 、 $P_{r(r_3 < r)}$  を数値計算により求めた。

(2) Kluver の分布式<sup>1)</sup>

$l=40\sim 60\text{ m}$  の橋についても (1) の幾何学的関係を拡張すれば求められるが、計算が非常に複雑となる。

そこでこの種の問題については 1905 年 Pearson は確率モデルの一つとして、「A が 1 点 0 から出発して直線的に距離  $a$  を進む、そこで方向を勝手にかえて、第 2 の直線上を  $a$  だけ進む。A はこの行動を  $n$  回繰返す。 $n$  回後出発点 0 から距離  $r$  内に A のいる確率を求む」という、いわゆる酔歩の問題を提案した。これに対し Kluver は Bessel 関数の積分公式を用いて確率分布式 (14) を求めた。このモデルはわれわれの求めようとしている問題と一致している。すなわち、直線上を進む距離  $a$  は式 (7) の  $a_i$  にあたり、進む方向は  $\sin(\omega t + \varphi_i)$  であり、at random である。われわれはスパン 40 m 以上についてつぎの Kluver の確率分布式を用いることにする。

$$P_{r(r_i < r)} = \frac{1}{(2\pi)^{i-1}} \int \dots \int d\theta_{i-1} d\theta_{i-2} \dots d\theta_1 = r \int_0^\infty J_1(rv) J_0(a_1 v) J_0(a_2 v) \dots J_0(a_i v) dt \dots \dots \dots (14)$$

ここに、 $J_1(rv)$ 、 $J_0(av)$  は Bessel 関数

われわれは任意の  $r(=1.0\sim 5.0)$  に対する  $P_{r(r_i < r)}$  を図式解法にて求めた。なお、 $J_0(av)$  は  $J_0(0)=1$  から減幅する振動関数であり  $at\sim 0$  の近くが大きく  $i$  が大きくなるとその傾向が顕著となり、計算に好都合であった。しかしわれわれがこれを  $l=30\text{ m}$  以下の橋に適用するときは、 $J_0$  の減衰が遅く図式解法で求めることは、計算に手数を要し、誤差も大きく、不可能であった。

(3) Rayleigh の式<sup>2)</sup>

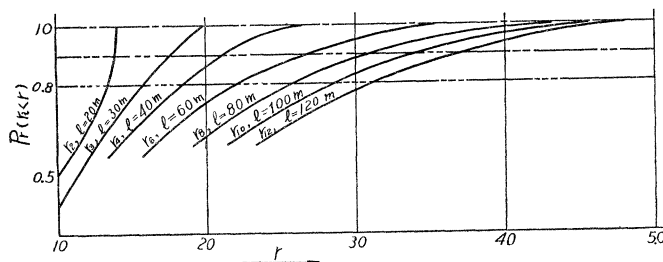
スパン 70 m 以上についても (2) の Kluver の式を用いて同様に求められるが、多くの調和振動が合成された場合の合成振動振幅に関する確率分布式は

$$P_{r(r_i < r)} = 1 - \exp. \left( \frac{-r^2}{n_1 a_1^2 + n_2 a_2^2 + \dots + n_i a_i^2} \right) \dots \dots \dots (15)$$

で表わされることがすでに示されているので<sup>2)</sup>、ここでは式 (15) を用いる。ただし、 $n_1 = n_2 = \dots = n_i = 1$  である。なお、スパン 70 m で式 (14) と式 (15) の間には誤差はほとんど認められない。

以上の三種の方法で求めた  $r$  と  $P_{r(r_i < r)}$  の関係を 図-4 に示した。

図-4 各スパン長さに対する確率  $P_{r(r_i < r)}$  と  $r$  との関係



6. 衝撃係数の減率について

2. 仮定 (2), (3), (5), (6) で仮定された  $n$  個の荷重

$$P_i' = P + P_i = P + \alpha P \sin(\omega t + \delta_i) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

が橋に満載される場合、橋のタワミ曲線を  $y = y_c \sin(\pi x/l)$  と仮定するとスパン中央点  $c$  の静タワミ  $y_{scn}$  は次式のように表わされる。

$$y_{scn} = \delta_{st} \sum \sin \frac{\pi c_i}{l} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (16)$$

ここに、 $\delta_{st}$  は静荷重  $P$  が中央点  $c$  に載荷された場合の載荷点の静タワミである。 $c_i$  は支点  $A$  よりそれぞれの荷重載荷点までの距離である。一方周期力による動タワミは式 (7), (8) より、

$$y_{cn} = \delta_{st} \frac{\alpha}{\alpha'} \sum a_i \sin(\omega t + \varphi_i) = \delta_{st} \frac{\alpha}{\alpha'} r_i \sin(\omega t + \theta) \quad (17)$$

いま、われわれは衝撃係数について論じているのでスパン中央点  $c$  の動タワミが最大となるような時刻  $t_1$  における動タワミを問題にする。このとき式 (17) は、 $\sin(\omega t_1 + \theta) = 1$  で、

$$\max y_{cn} = \delta_{st} \frac{\alpha}{\alpha'} r_i \quad (18)$$

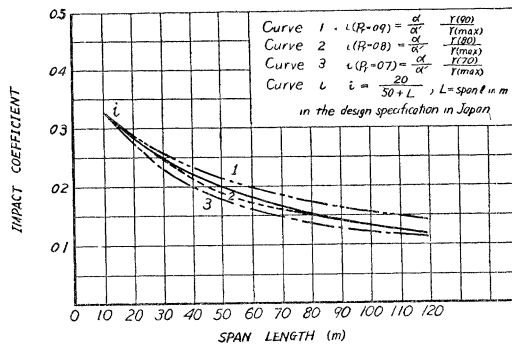
ところで、衝撃係数は動的倍率動タワミと静タワミの比で表わされるから

$$i = \frac{\max y_{cn}}{y_{scn}} = \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{r_i}{\sum \sin \frac{\pi c_i}{l}} \quad (19)$$

となる。さて、われわれは 5. において各スパン長さに対する任意の  $r$  より  $r_i$  の小さい確率  $P_r(r_i < r)$  を求めた。この結果は 図-4 に示されている。図-4 において、例えば、スパン 30 m の橋で  $P_r(r_i < r) = 1, r = 2.0$  というのは、この橋の動タワミに比例する変数  $r_i$  はすべて  $r = 2.0$  内に含まれることを意味し、また、 $P_r(r_i < r) = 0.8, r = 1.6$  というのは、この橋の動タワミに関する変数  $r_i$  の取り得る値の 80% は 1.6 内にふくまれ、これより大きい値の取り得る確率は 20% であることを意味する。いまわれわれは確率を 90%, 80%, 70% にえらびそれぞれの値に対する各スパンの  $r$  を求めこれを式 (19) の  $r_i$  に代入し、さらに鋼道路橋設計示方書にとられている減率と比較するために式 (19) の  $\alpha/\alpha'$  の値を  $l = 30$  m で示方書の衝撃係数と式 (19) より求めた衝撃係数  $i$  と一致するようにえらんで、各確率における衝撃係数  $i$  の値を求め 図-5 に示した。

この 図-5 より、橋に作用する周期力  $P_0 \sin(\omega t + \delta_i)$  の位相差  $\delta_i$  を確率変数と考え、衝撃係数  $i$  の確率を 90%, 80%, 70% とえらぶことによつて衝撃係数が橋の載荷長によつて減減することがわかる。

図-5 鋼道路橋設計示方書の衝撃係数の減率との比較



7. 結 語

以上、橋に作用する動的荷重の位相が at random であるという仮定のもとに、確率論的考察を行い、桁の動的倍率がスパン長さとともに変化することを明らかにした。もちろんこの考察だけから橋の衝撃係数を決定することは不可能であるが、基礎的な考え方の一つとして考察を行つたものである。

参 考 文 献

1) 伏見康治: “確立論及統計論”, pp. 212 (昭 25)  
 2) Lord Rayleigh: “Theory of Sound”, vol. 1 pp, 35~42.