

# 開水路における移動床の不安定性について

—微小振動法による理論的解析—

正員 松 梨 順 三 郎\*

ON THE INSTABILITY OF THE MOVABLE BED IN OPEN CHANNEL FLOW

—THE THEORETICAL ANALYSIS BY USING “THE SMALL OSCILLATION METHOD—

By Junzaburō Matsunashi C.E. Member

**Synopsis :** In this paper, the witer theoretically analyzed the instability criterion of the movable bed in Open Channel Flow by using what is called “the Method of Small Oscillation.” As a result of this research, he obtained the following conclusions : firstly, the instability criterion of the movable bed is governed by the resistance law of the flowing water which is based on the condition that both the water flow and the movement of bed sand are uniform secondly, the domain and limits of stability are generally expressible by the nondimensional quantity  $U_{m0}/U_{R*}$  and Froude number  $F_r$ .

**要旨** 本文は、開水路における移動床の不安定限界を微小振動の方法によつて求めたものである。その結果、移動床の不安定領域は、等速定常な状態で砂が移動しているときの水流の抵抗法則によつて特性つけられるが、一般に無次元量  $U_{m0}/U_{R*}$ 、Froude 数  $F_r$  によつて表示されることが示された。

## 1. 緒 言

本文で論じられる水流または移動床の不安定性とは、水流の自由表面または移動床の表面に微小振幅の擾乱が与えられた時、それが時間とともに発達していく状態にあるときは、水流または移動床は不安定であり、時間とともに減衰していく状態にあるときは安定であると定義する。一般に流れに加えられた擾乱の安定条件を求めるには、その擾乱によるエネルギーの時間的増減によつて論ずるエネルギー的方法<sup>1)</sup>、または流れに加えられた微小振幅擾乱波の時間的な発達および減衰の限界を運動量方程式より論ずる微小振動の方法などがある<sup>2)</sup>。乱流理論における層流から乱流への遷移限界は前者の方法で論じられている。また開水路水流の自由表面に発生する転波列の発生限界は、水流の不安定性の問題として後者の方法で解析されている<sup>3)</sup>。その結果、固定床をもつた開水路水流の不安定は、Froude 数が約 1 以上においておこることが知られた。またこの理論的結果は実験によつて確かめられている。一方、開水路における移動床では、いわゆる砂漣が発生する。砂漣が発生しているときの水流の Froude 数は 1 よりも小さく 0.1 とか 0.2 等の値が得られている<sup>4)</sup>。この実験事実は、移動床をもつた開水路では、水流が不安定になる以前に河床が不安定となり、砂漣が発生することの可能性を示している。砂漣の発生も開水路水流における転波列の発生と同様に、移動床の不安定性の問題としてこれを論じると考える。すなわち、移動床において砂が一様に流下している状態を想定する。そして、その砂面に、ある擾乱が加えられたとしよう。その擾乱が減衰していくときは移動床は安定であつて、砂漣は発生しない状態であり、発達していくときは不安定であつて、砂漣が発生しうる状態であると考え、砂漣の発生と移動床の不安定性との関連をこのように考えると、砂漣は、水流の運動量方程式とその連続方程式、および砂の運動方程式とその連続方程式とにより、微小振動の方法でこれを解析しうると考えられる。

## 2. 砂面の不安定性

### 1) 基礎方程式

底面に沿つて下流方向に  $x$  軸をとれば、開水路における水流の運動量方程式および連続方程式は、問題を 2 次元的に取り扱ふとすれば、それぞれ次のように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_m h) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha U_{m0}^2 h) = -\frac{\tau}{\rho} + gh \left( J_0 - \frac{\partial z}{\partial x} \right) - gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U_m h) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

\* 神戸大学助手，工学部土木工学教室

流砂の運動方程式および連続方程式は次式で表わされる。

$$q_B = k(\tau - \tau_c)^m \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_B}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $t$  は時間、 $U_m$  は断面平均流速、 $h$  は水深、 $\rho$  は水の密度、 $g$  は重力の加速度、 $z$  は初めの水路床勾配  $J_0 = \tan \theta$  と同じ勾配をもつ、ある基準面から測つた砂面の高さ、 $\tau, \tau_c$  はそれぞれ水路床面に働く平均摩擦応力および限界の平均摩擦応力、 $q_B$  は単位幅当たりの体積で表わした流砂量、 $k, m$  はそれぞれ砂に関する係数、 $\lambda$  は砂の間ゲキ率、 $\alpha$  は鉛直方向における流速分布による補正係数であつて  $x$  および  $t$  には無関係と仮定する。

次に砂が移動して砂漣が発生していない状態のとき、砂面に働いていると考えられる平均摩擦応力について考察を加える。その状態のときは、水流は等速定流で流下していると考ええる。等流状態のときの  $\tau, U_m, h, z$  の値をそれぞれ  $\tau_0, U_{m0}, h_m, z_m$  として示すと明らかに

$$\tau_0 = \rho g h_m J_0 \dots\dots\dots (5)$$

まず砂面が移動していない状態のとき的水流は、粗面固定床の抵抗法則  $U_{m0}/U_* = A_r - 2.5 + 5.75 \log h_m/d$  にしたがつていると考えられる。ここに、 $U_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ 、 $d$  は砂の平均粒径とする。 $A_r$  は  $U_* d/\nu < 3.3$  ときは滑面固定床の抵抗法則に支配されて、 $U_* d/\nu$  のみの関数となり、 $U_* d/\nu > 3.3$  のときは一般に Froude 数の関数であることが示されている<sup>5)</sup>。ここに  $\nu$  は水の動粘性係数とする。次に砂面が移動を開始し、砂漣が発生していない状態を考え、砂の移動による粗度の増加に対して、相当粗度  $k_s$  を導入し、そのときの抵抗法則を次式で表わす。

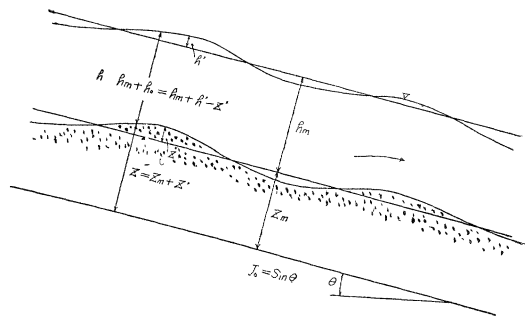
$$\frac{U_{m0}}{U_*} = 6.0 + 5.75 \log \frac{h_m}{k_s} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $k_s$  は  $A_r$  の関数となり、したがつて Froude 数の関数となる。また、 $k_s/d$  は掃流力を表わす無次元量  $U_{R*}^2/(s_s-1)gd$  の関数であることが実験的に証明されている。ここに  $U_{R*} = \sqrt{gRf}$ 、 $s_s$  は砂の比重とする。いずれにしても (5) 式、(6) 式から勾配  $J_0$  を消去すると、一般に平均摩擦応力  $\tau_0$  は水深  $h_m$ 、平均流速  $U_{m0}$  の関数となる。いま、この関数で表示された等流状態のときの平均摩擦応力が現在考えている (1)、(2)、(3)、(4) 式で表示された非定常状態のときにも、同じ形で与えられるものと仮定すると、平均摩擦応力  $\tau$  は一般に水深  $h$ 、および流速  $U_m$  の関数となる。

図-1

次に砂はすでに移動を開始しており、砂漣がまだ発生していないとき、したがつて水流は等流で流下している状態を想定する。その状態になんらかの原因で微小擾乱が加えられると、それにより水流の平均流速、水深、砂面高が変動するが、その変動の流速、水深、砂面高をそれぞれ  $U_m', h', z'$  とすると、次式をうる (図-1 参照)。

$$\left. \begin{aligned} U_m &= U_{m0} + U_m' \\ h &= h_m + h' = h_m + h' - z' \\ z &= z_m + z' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$



次に (1) 式を  $x$  で微分した式、(2) 式、および (3)(4) 両式から  $q_B$  を消去した式のそれぞれに (7) 式の水理量を代入する。微小擾乱による変動量とその導関数との積、およびそれぞれの自乗以上の高次の項を、微小量として省略し、関係式を整理すると、

$$h_m \frac{\partial^2 U_m'}{\partial t \partial x} + U_{m0} \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial x} + 2\alpha U_{m0} h_m \frac{\partial^2 U_m'}{\partial x^2} + \alpha U_{m0}^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_0}{\partial h_m} \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_0}{\partial U_{m0}} \frac{\partial U_m'}{\partial x} + g J_0 \frac{\partial h'}{\partial x} - g h_m \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} - g h_m \cos \theta \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \dots\dots\dots (1')$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + h_m \frac{\partial U_m'}{\partial x} + U_{m0} \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (2)'$$

$$\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{a}{g} \frac{\partial \tau_0}{\partial h_m} \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{a}{g} \frac{\partial \tau_0}{\partial U_{m0}} \frac{\partial U_m'}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (3)'$$

(1)', (2)', (3)' 式から変動の流速  $U_m'$  および水深  $h'$  を消去すると次式をうる。

$$\frac{\partial^3 z'}{\partial t^3} + P \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2 \partial x} + Q \frac{\partial^2 z'}{\partial t \partial x^2} + R \frac{\partial^2 z'}{\partial x^3} + M \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} + N \frac{\partial^2 z'}{\partial t \partial x} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $P=2\alpha U_{m_0}$ ,  $Q=\alpha U_{m_0}^2 - gh_m \cos \theta - a(\partial\tau_0/\partial U_{m_0})$ ,  $R=-\alpha\{(\partial\tau_0/\partial U_{m_0})U_{m_0} - (\partial\tau_0/\partial h_m)h_m\}$ ,  
 $M=(\partial\tau_0/\partial U_{m_0})/(\rho h_m)$ ,  $N=-(\partial\tau_0/\partial h_m)/\rho + gJ_0 + U_{m_0}(\partial\tau_0/\partial U_{m_0})/(\rho h_m)$ ,  $a=mgk(\tau_0 - \tau_c)^{m-1}/(1-\lambda)$  とする。  
 この(8)式が砂面の微小振幅擾乱波に対する第一次近似方程式であり、砂面の不安定条件を求めるための基本方程式と考える。

2) 砂面の安定領域およびその中立の安定領域について

いま、擾乱による波高の変化が、

$$z' = Ae^{\tau t} \left( \frac{\cos}{\sin} \left[ \beta \left( x - \frac{c}{\beta} t \right) \right] \right)$$

によつて表わされるような波形で与えられると仮定し、この擾乱波の時間的な発達あるいは減衰について考察する。上式は、 $z' = Ae^{\tau t + i\beta x}$ ,  $\tau = b - ic$  .....(9), (10) とかきかえられる。 $r$ の実数部  $b$  は、(9)式で表わされる擾乱波の振幅の時間的変動を示すものであるから、この擾乱波が安定であるか不安定であるかは、 $b$ の付号によつて決定される。その条件は、

$$b = \mathbf{R}(r) = \begin{cases} > 0 \dots\dots \text{不安定} \\ = 0 \dots\dots \text{中立の安定} \\ < 0 \dots\dots \text{安定} \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

と表わされる。(9)式を(8)式に代入して、(9)式が基本方程式(8)の解であるための条件を求めると、

$$r^3 + (M + P\beta i)r^2 + (-Q\beta^2 + N\beta i)r - R\beta^3 i = 0 \dots\dots\dots (12)$$

(10)式を(12)式に代入し、 $r$ を实数部と虚数部にかけて整理すると、

$$\left. \begin{aligned} c^2(-3b - M) - c(-2P\beta - N\beta) + b^3 + Mb^2 - Q\beta^2 &= 0 \\ -c^3 + c^2P\beta - c(-3b^2 - 2Mb + Q\beta^2) - Pb^2\beta - Nb\beta + R\beta^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

(13)式から  $c$  を消去すると次式をうる。

$$\beta^6 f_5(b) + \beta^4 f_7(b) + \beta^2 f_9(b) + f_{11}(b) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $f_5, f_7, f_9, f_{11}$  はそれぞれ  $b$  について、5次-0次、7次-1次、9次-2次、11次-4次の有理整式を表わすとする。

与えられた擾乱波の波長  $2\pi/\beta$ 、すなわち  $\beta$  に無関係に、(11)の条件を満足するような  $b$  が(14)式によつて求められるためには、(14)式が  $\beta$  を含まない  $b$  についての因数をもつことが必要である。(14)式の左辺第2、3、4項は因数  $b$  をもっているから、 $f_5(b)$  が因数  $b$  をもつことが必要である。また、因数  $b$  の他に、以上の条件を満足する  $b$  についての因数は存在しないことが確かめられた。そこで、(14)式の左辺が因数  $b$  をもつための条件式として次式をうる。

$$-RM^3 + NM^2Q - N^2MP + N^3 = 0 \dots\dots\dots (15)$$

(15)式の条件のもとに(14)式は  $b=0$  の根をもつのであるが、この時の  $r$  は、(13)式より虚数部  $c$  を求めて、(12)式を満足する一根本として次式をうる。

$$r_1 = b_1 (= 0) - \frac{N}{M}\beta i \dots\dots\dots (16)$$

次に他の二根として、

$$r_{2,3} = \frac{-(M + P\beta i - N\beta i/M) \pm \sqrt{(M + P\beta i - N\beta i/M)^2 - 4\{-Q\beta^2 + (P - N/M)N\beta^2/M\}}}{2} \dots\dots (17)$$

(16), (17)式より三根  $r_1, r_2, r_3$  の実数部  $b_1, b_2, b_3$  を求めて、それぞれ次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= \frac{-M}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}\{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\}} \\ b_3 &= \frac{-M}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}\{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $\alpha_1 = M^2 - \beta^2\{P - N/M\}^2 - 4Q + 4(P - N/M)(N/M)$ ,  
 $\beta_1 = 2M(P - N/M)\beta$

とする。

次に  $b_2, b_3$  が共に負数なるための条件として、次の二つの不等式をうる。

$$M > 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$T = -Q + \left( P - \frac{N}{M} \right) \frac{N}{M} > 0 \dots\dots\dots (20)$$

(15), (19), (20) 式の条件を満足する領域は  $b_1=0, b_2<0, b_3<0$  であるので、いわゆる中立の安定領域の一部を表わす。すなわち、その領域では、与えられた擾乱が発達もしくは減衰することなく、そのままの状態で維持されることを示す。

(a) 砂面の安定領域 (14) 式において、 $b$  は非常に小さいとして、 $b$  の高次の項を省略し、 $f_s(b)$  の  $b$  について一次の項を  $E, 0$  次の項を  $F, f_7(b)$  の一次の項を  $G$  とすると、 $b_1$  を求めるための第一次近似式として次式をうる。

$$b_1 = \frac{-F\beta^2}{G+E\beta^2} \dots\dots\dots (21)$$

$b_1$  は 0 に非常に近い値を考えているから、(15) 式は近似的に満足されていると考え、この場合の  $b_2, b_3$  の近似式は (18) 式の  $b_2, b_3$  で与えられるものとする。 $b_1$  が負の値をとる条件として、次式をうる。

$$F(G+E\beta^2) > 0 \dots\dots\dots (22)$$

砂面が安定であるためには、(18), (21) 式で与えられる  $b_1, b_2, b_3$  が同時に負の値をとる必要がある。 $b_2, b_3$  が共に負数になるための条件は (19), (20) 式で与えられるから、砂面が安定であるためには、(19), (20), (22) 式が同時に成立することが必要である。

ここに、

$$F = RM^2(-RM^3 + NM^2Q - N^2MP + N^3)$$

$$E = M\{M^3(-15R^2 + 4RQP - Q^3) + M^2(9RQN - 4NRP^2 + NPQ^2) + M(-3PRN^2 - N^2Q^2) + 6N^3R\}$$

$$G = -M^2N^2(N^2 - NMP + M^2Q)$$

とする。

(b) 砂面の中立の安定領域 砂面の中立の安定領域は、上述の  $b_1, b_2, b_3$  の中いずれかが少なくとも一つの値は 0 で、他がすべて負数であることが必要である。 $M = \infty$  上では根は不定となるので、これを除外し、その条件は次の二組の不等式および等式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M > 0 \\ F(G+E\beta^2) > 0 \\ T = -Q + (P - N/M)(N/M) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

および、

$$\left. \begin{aligned} M > 0 \\ F(G+E\beta^2) = 0 \\ T = -Q + (P - N/M)(N/M) > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

3. 抵抗法則が与えられたときの安定領域、および中立の安定領域について

流砂があり、砂漣が発生していないときの水流の抵抗法則として (6) 式をとり、 $k_s/d$  と掃流力を表わす無次元量  $U_*^2/(s_s-1)gd$  との関数関係を、次式で表わされる岩垣博士の実験式の型式で表わすことにする<sup>7)</sup>。

$$\log \frac{k_s}{d} = D + B \log \frac{U_*^2}{(s_s-1)gd} \dots\dots\dots (25)$$

(25) 式は両対数方眼紙で示すと直線となるが、この直線の勾配は一般的に  $B$  で表わされている。(6) 式と (25) 式から  $k_s$  を消去すると、

$$\frac{U_{m0}}{U_*} = 6.0 - 5.75D + 5.75 \log \frac{h_m}{d} - 5.75B \log \frac{U_*^2}{(s_s-1)gd} \dots\dots\dots (26)$$

この式を、さらに一般化して、次式で表わす。

$$U_{m0}^p = K^{-1} h_m^{1+q} J_0^e \left[ \log K_1 \left( \frac{h_m}{d} \right)^{p'} \left\{ \frac{h_m J_0}{(s_s-1)d} \right\}^{q'} \right]^{e'} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $p, q, e, p', q', e'$  は指数、 $K_1, K$  は常数を表わすものとする。

(27) 式および(5)式によつて現在考えている抵抗法則を表わしうるものとする。すると、 $\partial \tau_0 / \partial U_{m0} = p U_{m0}^{-1} / e_1$ 、 $\partial \tau / \partial h_m = -h_m^{-1} b_1 / e_1$  となり、 $M, T, F, E, G$  などの式はそれぞれ次のように表わされる。

$$M = \frac{p}{\rho h_m U_{m0} e_1} \dots\dots\dots (28)$$

$$T = \frac{U_{m0}^2}{F_r^2 \beta^2} [F_r^2 \{-p^2 \alpha + (2p\alpha - p - b_1 - \tau_0 e_1)(p + b_1 + \tau_0 e_1) + p^3 a' e_1^{-1}\} + p^2] \dots\dots\dots (29)$$

$$F = \frac{a'(p + b_1) p^2 U_{m0}}{(\rho h_m)^3 e_1^6 F_r^2} [-F_r^2 \{\beta'^3 - \alpha p \beta' (2\beta' - p) - p^2 a' \tau_0\} + p^2 \beta'] \dots\dots\dots (30)$$

$$E = \frac{\dot{p}U_{m0}^2}{(\rho h_m)^4 e_1^4 F_r^6} \{F_r^6 [\alpha^2(-p^3 + 2p^2\beta') + \alpha^2(-p\beta'^2)] + a'e_1^{-1}[\alpha^2\{-8p^3(p+b_1) + 3p^4 - 4p^3\beta' + 16\beta'(p+b_1)p^2\} + \alpha\{-9(p+b_1)\beta'p^2 + 6(p+b_1)\beta'^2p + 2p^2\beta'^2\} - 6(p+b_1)\beta'^3] + a'^2e_1^{-2}[\alpha\{8(p+b_1)p^4 - 3p^5 + 2p^4\beta'\} + 9p^3(p+b_1)\beta' - p^3\beta'^2 - 15(p+b_1)^2p^3] + a'^3e_1^{-3}p^6] + F_r^4[(3p^3\alpha^2 - 4p^2\beta'\alpha^2 + 2\alpha p\beta'^2) + a'e_1^{-1}\{8\alpha(p+b_1)p^3 - 6\alpha p^4 + 4\alpha p^2\beta' + 9p^2(p+b_1)\beta' - 2p^2\beta'^2\} + a'^2e_1^{-2}(3p^6)] + F_r^2[-3p^3\alpha + 2p^2\alpha\beta' - p\beta'^2 + 3p^4a'e_1^{-1}] + p^3\} \dots (31)$$

$$G = \frac{p^2\beta'^2U_{m0}^{-2}}{(\rho h_m)^6 e_1^6 F_r^2} \{F_r^2(-p^2\alpha + 2p\alpha\beta' - \beta'^2 + p^3a'e_1^{-1}) + p^2\} \dots (32)$$

ただし、ここに

$$e_1 = \left\{ e + e'q' \left[ \log_e K_1 \left( \frac{h_m}{d} \right)^{p'} \left\{ \frac{h_m J_0}{(s_s - 1)d} \right\}^{q'-1} \right] \right\} \tau_0^{-1} \dots (33)$$

$$b_1 = 1 + q - e + e'p' \left[ \log_e K_1 \left( \frac{h_m}{d} \right)^{p'} \left\{ \frac{h_m J_0}{(s_s - 1)d} \right\}^{q'-1} \right] \dots (34)$$

$$\beta' = p + 1 + q + e' \left[ \log_e K_1 \left( \frac{h_m}{d} \right)^{p'} \left\{ \frac{h_m J_0}{(s_s - 1)d} \right\}^{q'-1} \right] (p' + q') \dots (35)$$

$$a' = aU_{m0}^{-3} = \frac{mg}{(1-\lambda)U_{m0}^3} k(\tau_0 - \tau_c)^{m-1} \dots (36)$$

(27) 式として (26) 式を適用し、 $d=0.03 \text{ cm}$ ,  $k=1.17 \times 10^{-3} (\text{C.G.S.})^8$ ,  $m=2$ ,  $\lambda=0.5$  として、 $e_1, b_1, \beta', a'$  を求めると、

$$e_1 = \left\{ 0.5 - 2.5B \left( \frac{U_{m0}}{U_*} \right)^{-1} \right\} \tau_0^{-1}, \quad b_1 = 2.5 \left( \frac{U_{m0}}{U_*} \right)^{-1} \dots (33)', (34)'$$

$$\beta' = 1.5 + 2.5(1-B) \left( \frac{U_{m0}}{U_*} \right)^{-1}, \quad a' = 4.58(\tau_0 - 2.0)U_{m0}^{-3} \dots (35)', (36)'$$

1) 安定領域

(19) 式, (28) 式から,  $e_1 > 0$ , (33)' 式から

$$\frac{U_{m0}}{U_*} > 5B \dots (19)'$$

次に, (29) 式において,  $\alpha=1$  とおき, (33)', (34)' を代入し, (20) 式を  $U_{m0}/U_* (>0)$  について解くと、

$$\left. \begin{aligned} F_r < 2.0 \text{ のとき } & \frac{U_{m0}}{U_*} > \frac{-5F_r^2 + 10F_r}{2 - 0.5F_r^2} \\ F_r > 2.0 \text{ のとき } & \frac{-5F_r^2 + 10F_r}{2 - 0.5F_r^2} < \frac{U_{m0}}{U_*} < \frac{-5F_r^2 - 10F_r}{2 - 0.5F_r^2} \end{aligned} \right\} \dots (20)'$$

次に, (22) の条件において,  $\beta$  の値のいかんにかかわらずこれが成立するためには,  $F, G, E$  が同符号であればよい。 $F$  式の中の  $p^2a\tau_0$  は他の項に比して非常に小さいので省略する。 $E$  式,  $G$  式に含まれている  $a'e_1^{-1}$  の値の大きさについて検討すると, (33)' より  $e_1$  は正の値で  $0.5\tau_0^{-1}$  より小さい。 $a'$  は (36)' で示されるように一般に非常に小さくて,  $10^{-4}$  程度の値をもつ。そこで  $a'e_1^{-1}$  の値は正の数で 0 から無限大までの値をとると考えられるが, ここでは, 次の三つの場合について  $F, E, G$  の正または負の領域を検討し, (22) 式の満足される領域を求めてみた。

a)  $a'e_1^{-1}$  の値が非常に小さくて 0 に近似できる場合  $F, E, G$  式の符号に関係する項のみをとって, それぞれ  $F_1, E_1, G_1$  とすると,

$$F_1 = \beta' \{ 1 - F_r^2(\beta' - 1)^2 \}, \quad E_1 = (F_r^2 - 1)^2 \{ 1 - F_r^2(\beta' - 1)^2 \}, \quad G_1 = 1 - F_r^2(\beta' - 1)^2$$

これから,  $F_1=0$  すなわち  $F=0$  の点をのぞいて,  $F_1, E_1, G_1$  は同符号したがって  $F, E, G$  は同符号となつて, 常に (22) 式は満足される。 $F=0$  において, (35)' の  $\beta'$  を代入し, これを  $U_{m0}/U_*$  について解くと, 次の三つの根をうる。

$$\frac{U_{m0}}{U_*} = -1.67(1-B), \quad \frac{U_{m0}}{U_*} = \frac{-5(1-B)F_r}{F_r - 2}, \quad \frac{U_{m0}}{U_*} = \frac{-5(1-B)F_r}{F_r + 2} \dots (15)'$$

$B$  の値としては, 椿氏によると約 4.0, 岩垣博士によると 0.769, 著者の実験によると約 3.0 である<sup>9)</sup>。ここでは  $B=3.0$  をとり, (19)', (20)', (15)' の関係を示すと 図-2 のようになる。この場合には図示のように  $F=0$  と  $T=0$  の領域は重なるから, この場合の安定領域は次式で表わされる。

$$F_r < 2.0 \text{ のとき } \left. \begin{aligned} 5B < \frac{U_{m0}}{U_*} \end{aligned} \right\} \dots (37)$$

$$F_r > 2.0 \text{ のとき } 5B < \frac{U_{m0}}{U_*} < \frac{-5(1-B)F_r}{F_r - 2}$$

b)  $a'e_1^{-1}$  の値が 1.0 より小さいが、省略しえない場合  $F, E, G$  式において  $a'e_1^{-1}$  の自乗以上の項を省略し、 $a'e_1^{-1}=0.1, B=3.0$  として各式の正または負の領域を  $U_{m0}/U_*, F_r$  について図示すると、**図-3** のようになる。この図面に示されているように、この場合の安定領域は a) の場合と同様に (37) 式で表わされる。

図-2

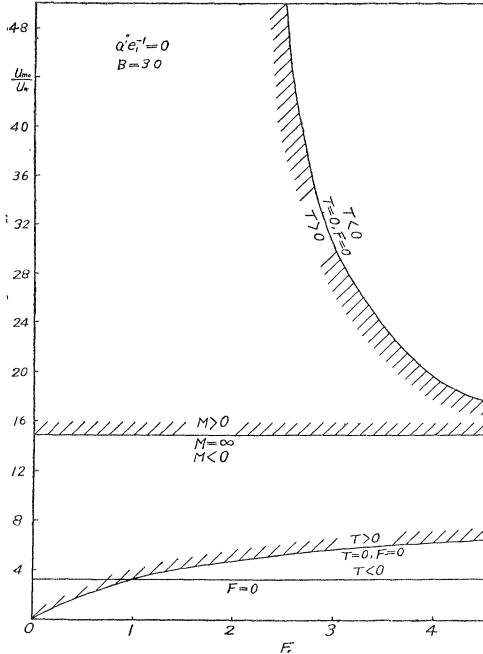
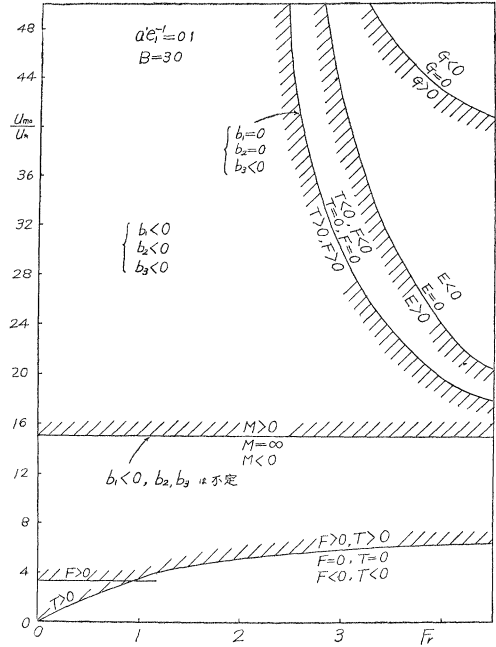


図-3



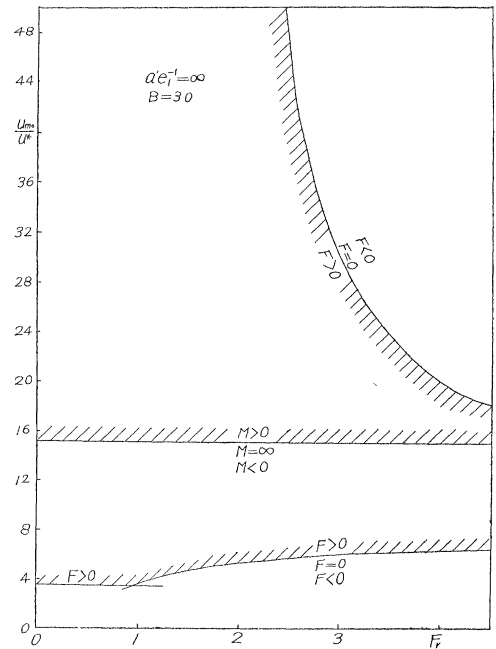
c)  $a'e_1^{-1}$  が非常に大きい場合 この場合は、(20)式は常に満足される。 $F, E, G$  の符号に関する項のみをとり、 $F_2, E_2, G_2$  とすると、

$$F_2 = \beta' [1 - F_r^2 (\beta' - 1)^2], \quad G_2 = F_r^2 (a'e_1^{-1}) + 1$$

$$E_2 = F_r^2 \{ 8(p + b_1) - 3 + 2\beta' + 9(p + b_1)\beta' - \beta' - 15(p + b_1)^2 + a'e_1^{-1} \} + 3$$

となる。 $E_2, G_2$  は常に正、したがって  $E, G$  は常に正であるから (22) 式を満足するためには  $F > 0$  であればよい。**図-4** に示したように、この場合の安定領域も前と同様 (37) 式で表わされる。

図-4



砂澱がなくて、いわゆる安定な状態で砂が移動しているときの水流の抵抗法則として、(26)式を適用したのであるが、その結果上述の各場合について、ともに(37)式で表わされる安定条件を得た。この三つの場合は  $a'e_1^{-1}$  の値をどのようにとるかによるのであるが、同じ結果を得ているので、一般的にこの場合の安定領域は  $a'e_1^{-1}$  の値にかかわらず (37) 式で表わされるとしてもよいように思われる。

2) 中立の安定領域

以上の計算の結果、安定領域は一般に、 $M = \infty, F = 0, T = 0$  によつて囲まれた領域である。 $B = 3.0$  とすると、 $F = 0, T = 0$  は同じ曲線を表わすので、(23), (24) 式は一つの条件として表わされ、中立の安定条件として次式をうる (**図-3** 参照)。

中立の安定条件として次式をうる (**図-3** 参照)。

$$5B < \frac{U_{m0}}{U_*}, \quad \frac{U_{m0}}{U_*} = \frac{-5(1-B)F_r}{F_r - 2} \dots\dots (38)$$

4. 結 論

1) 砂面の移動が等流状態のとき、水流の抵抗法則が(26)式で表わされると仮定すると、砂面が安定に維持される条件は(37)式で表わされる(図-5 参照)。

2) (37)式で表わされるように安定領域は一般に  $U_{m0}/U_*$  と Froude 数によつて表示され、 $F_r < 2.0$  では、その領域は Froude 数にかかわらず  $U_{m0}/U_*$  のみの値で示される。

3) 砂面の中立の安定領域は(38)式で表わされる。

5. 後 記

H.K. Liu<sup>10)</sup>, 安芸氏<sup>11)</sup>, G.K. Gilbert<sup>4)</sup>等の研究によつて、砂面がいわゆる安定で様な移動をしている状態は、砂面が初めて移動を開始する付近と、いわゆる dune から antidune に遷移するときに現われることが示された。この二つの等流状態のときに、それぞれ水流を支配している抵抗法則として、(26)式が常に妥当であるかということについては、なお多くの問題がのこされているように思われる。

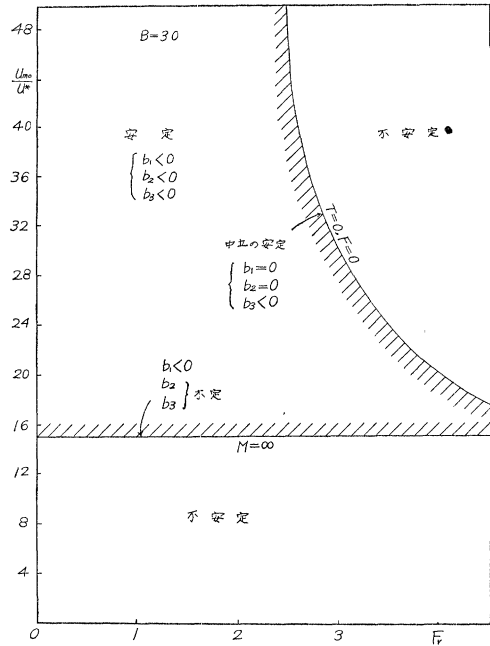
測定値についての検討は紙数のつごうでこの報文には記載できなかつたが、かなりよい結果をえているので次の機会に報告したいと思う。

本研究については神戸大学 田中教授、石原助教授の御指導をうけ、京都大学 石原教授、岩垣助教授にいろいろ有益な御教示を賜わつた。ここに深謝する次第である。

参 考 文 献

1),2) 谷 一郎著：“乱流理論” 1950  
 3) 岩佐義朗：“開水路水流の不安定性について” 土木学会誌 40 巻 6 号  
 R F. Dressler: “Mathematical Solution of the Problem of Roll-Waves Inclined Open Channels”  
 4) G K. Gilbert. “The Transportation of Debris by Running Water” 1914  
 5),6),7) 岩垣雄一：“雨水流による地面浸食機構に関する基礎的研究” 1955  
 8),9) 松梨順三郎：“限界掃流力付近の流砂に関する研究” 土木学会論文集, 第 51 号, 昭 32 12  
 10) H.K. Liu: “Mechanics of Sediment-Ripple Formation” P.A S.C.E. Vol. 83, No. HY 2  
 11) 安芸岐一 “河相論” 1944

図-5



(昭.33.8.22)