平均値法に基づく管水路内の流量算定式の誘導

正員　春日屋伸昌*

THE DERIVATION OF THE FORMULAS FOR CALCULATING THE DISCHARGE RATE IN A PIPE, BY MEANS OF THE MECHANICAL QUADRATURE

By Dr. Eng., Nobumasa Kasugaya, C.E. Member

Synopsis : By means of the mechanical quadrature, the author mathematically derives the reasonable positions of the velocity-measuring points, where the Pitot-tubes may be inserted, along a diameter in a cross section of a circular pipe, together with his new formulas for calculating the discharge rate. These formulas may be satisfactorily applied to a flow whose velocity distribution along any diameter of the cross section is as approximately equal as is required in the ordinary method. There are three different types of these new formulas according to the different ways of their derivation. However, it is theoretically shown that any one of these formulas gives more accurate results than the ordinary formula.

要旨　管水路内のある断面における流速分布曲面が，1半径に沿つての流速分布曲線を管軸のまわりに回転してえられる回転面で十分近似的に表わされるとき，ピトー管または流速計を用いて流速を測定すべき観測点の位置と流量算定式とを平均値法の原理に基づいて誘導する。この新しい算定式は誘導過程の相違から3種類えられるが，いずれも従来の方法にくらべて，少ない観測点数で十分に精度の高い結果を与える。

1. 従来の測定法の概観とその課題

水力発電所の導水トンネルあるいは水圧鉄管内の流量を流速計またはピトー管で測定する従来の方法は，円形管水路の1直径または直交2直径に沿う数点に計器を挿入してそこでの流速を測定し，図解または一定の算式に従つて流量を算出するものである。この方法は一般に流速面積積算法といわれ，断面の中心から1半径に沿つて観測点までの距離を x とすれば，x^2 を横軸に観測流速 v を縦軸にとつて $v-x^2$ の曲線を描き，この曲線が両座標軸とともに囲む面積に π を掛けて流量を求める。あるいは，横軸に x，縦軸に xv をとつて $xv-x$ の曲線を描き，この曲線と両座標軸との間の面積に 2π を掛ける。すなわち，流量を Q，半径を r とすれば，

$$Q=\int_0^r 2\pi\, xv dx=\pi\int_0^{r^2} v dx^2 \qquad (1)$$

であるから，上の2つの方法は図解法として同じわけであるが，$v-x^2$ の曲線から求める方法は，観測値 v の重みが半径方向に一様であるが，$xv-x$ の曲線では，中心付近の観測値 v には小さい値の x が掛かるため重みは半径方向に一様でなく，中心付近で小さく管壁付近で大きくなる。ゆえに，前者では中心での流速を測定することに意味があるが，後者ではまつたく不必要となるわけである。Swiss の水圧鉄管内での流量測定に関する規格では，以上2つの方法について計算を行つたときの差が1%を越えないときにこれらの結果を採用し，その算術平均を以つて求める流量とするように定められている[1]。

また，流速面積積算法の1種である断面等分割法では断面積を同心円で n 個の等しい環状面積に分割し，各環の面積中心に観測点を設け，ここでの観測流速を $v_1, v_2, \cdots, v_n$ として，

$$V=(1/n)v_1+(1/n)v_2+\cdots+(1/n)v_n=\sum_{i=1}^{n} v_i/n \qquad (2)$$

より全断面平均流速 V を算定する。このとき n 個の観測点の中心からの距離 $x_1, x_2, \cdot\cdot, x_n$ は，半径を r として，

$$x_1=\sqrt{1/(2n)}\,r,\ x_2=\sqrt{3/(2n)}\,r, \cdots, x_n=\sqrt{(2n-1)/(2n)}\,r \qquad (3)$$

となる。普通は $n=5$ とし，これを5点法とよぶ。そして，1直径に沿つて中心に関して対称に合計10個の観測点をとる。

以上述べた従来の方法は，いずれも，任意の半径に沿つての流速分布曲線を管軸のまわりに回転させた回転面で流速分布曲面が十分近似的に表わせるという仮定に立つていることは明らかである。

---

*　工学博士，中央大学教授，工学部土木工学科

管水路内の流速分布に関しては，対数曲線式や指数曲線式などがあり，流れが1度このような理論分布に落ちつくとその状態は永続するといわれている。しかし，理論分布を呈するに至るためには，相当な助走距離が必要であつて，多くの人の実験によると，助走距離は管の内径の少なくとも40〜50倍で，かつ，下流にもある程度の直線部が必要であるといわれている。しかし，実在の水力発電所の水圧鉄管では，配管の状態が地勢に左右されて十分の助走距離がないばかりでなく，管径も2〜4mという大径であるため，上のような理論分布に落ちつくことはまず絶対にないといつても過言ではない[2]。

多くの実測の結果から知られていることは，測定箇処の条件は決して悪くないにもかかわらず，流速分布は相当に乱れていて，最大流速が管の中心から外れたり，中心部での流速がその近傍の流速よりも小さくなつて中心部の両側に最大流速の点が2つ現われたりする。このような場合，1つの半径に沿つての流速分布は半径が異なれば違つた形状となることは当然で，回転面という仮定が厳密には成り立たない。また，各点での流速は同一負荷のもとでも時間的に変動し，したがつて，分布曲線の形状も時間的に変化する。それのみならず，同一負荷のもとでの流量も時々刻々変動し，数十秒の周期と数分にわたる大きな周期のあることが知られている。このような流量変化の原因は，系統負荷と発電機負荷の動揺によるばかりでなく，水車吸出管の真空度の変化，導水トンネルのサージング，取水口の流動状態の変化など種々なものが考えられる。

流速分布曲面が回転面でないための誤差を緩和させるためには，いくつかの半径に沿つての流速分布をとつてその平均を考えればよい。1直径に沿つての測定もその目的に沿うものである。この場合にもある適度の助走距離をとらないと誤差は許容誤差以内に止まらないが，理論分布に落ちつく程の助走距離は必要でなく，管内径の20〜30倍あれば十分であるといわれている。

日本の水車標準規格では，直交2直径に沿つての流速分布を測定し，4つの半径についての平均を以つて求める流量とするように規定している。しかし，直交2直径をとることは技術的にも経済的にも多くの困難をともなうのみならず，精度の点でも問題がある。まず，水圧鉄管内でピトー管を用いる場合には，1直径に沿つての測定を完了してから直交方向での測定を行うこととなるため，支持棒を抜きかえなければならない。そのために水車の運転を中止するのであるから，同時測定はまつたく不可能となり，2直径をとつたための利点はかえつて失われることとなるであろう。もし，あらかじめ直交2直径に沿つて支持棒を挿入しておけば，ある程度同時測定は可能であるが，支持棒の投影面積の影響が大きく現われて測定流量が過大となる。東京電力KKが昭和29年9月15〜16日に宮の下発電所の水圧鉄管（内径 0.759 m）において上述の5点法で実測した結果によると[3]，1直径に沿つて支持棒を挿入する際にも，その支持棒の直径が44 mmで支持棒投影面積の鉄管断面積に対する比が7.23% のとき，H.K. 式双管型ピトー管による測定流量の誤差（全幅堰を用いての測定値に対するもの）は+1.5%，支持棒の直径が51 mmで支持棒投影面積の鉄管断面積に対する比が 8.30% のとき，その誤差は +1.9% であつた。この測定箇処は助走距離が鉄管内径の 27.5 倍，下流の直線部が 5.0 倍であるから，測定条件は正常と認められる。なお，前者は9回，後者は6回の測定値の算術平均で，これら15回の各測定値の誤差はいずれも正であつた。また，直交2直径に沿つていずれも直径が38 mmの2本の支持棒を同時に挿入して実測した結果では（この測定箇処での水圧鉄管内径は 0.756 mm，助走距離は管内径の 3.5 倍，下流の直線部は 4.8 倍），支持棒投影面積の鉄管断面積に対する比が 12.48% で，その誤差は +3.8% におよんだ。これは9回の測定値の算術平均であるが，各測定値の誤差はいずれも正で，最小 2.2%，最大 5.1% である。この測定箇処は助走距離が過小であるから測定条件は決して正常ではないが，直交2直径をとることによつてそのための誤差は相当に緩和されているはずであり，かつ，9個の測定値がすべて正であることから考えて，上のような大きい誤差は支持棒投影面積の過大によるものと思われる。

したがつて，直交2直径による測定は従来の方法そのままでは採用しえないのではないかと考えられる。そこで，適当な長さの助走距離をとつて1直径による測定法を採用する場合には，問題は3つの点に絞られる。その第1は，従来の方法の精度が観測点の数に左右され，高い精度をうるためには10〜20点を必要とし，更に図解法を用いると計算に必要な労力と時間とが増大するということである。残りの2つの問題点は従来の板谷管とH.K.式双孔型との長短に現われている。前者は多孔固定型であるから同時測定が可能であるが，10本（5点法が標準である）の水圧計間に干渉があり，また，水圧鉄管内の流塵が動圧孔にひつかかつて測定が困難となり易い。後者は2個の動圧孔を左右から同時に摺動させるものであるから水圧計間の干渉は少なく，流塵はたとえひつかかつても容易に除去することができるが，各観測点での同時測定が不可能である。もし，流速計のように積算値が指示されるものならば，同時測定でなくとも誤差は僅小であるが，脈動する流れに対しての瞬間流速は平均値の上下にある程度の誤差をともなつて現われる。たとえば，東京電力KK駒橋発電所の水圧鉄管において，昭和31

年3月13〜17日にわたつて行われたH.K.式ピトー管を用いた実測によると(この実測には筆者も参加した),各水圧計内の水位の変動は相当に激しく,時間的平均値(1.9〜2.2 m/sec)の上下に最大約 ±10% の誤差をともなつて現われ,周期は一般にきわめて不規則であつた[4]。もとより,同時測定でなくとも,同一点での観測流速を一定の時間間隔をおいて測定した数回の値の算術平均とすれば,誤差は僅小となるであろうが,観測点数が多くなると時間と労力とが増大する。

そこで,2.以下では,多孔固定型と双孔摺動型との折衷型として,なるべく少ない観測点を断面の中心に関して左右対称に1直径に固定し,同時測定をも可能にすると同時に,流塵のひつかかる割合を少なくし,水圧計間の干渉も極力最小に押さえようとの目的のもとに,合理的かつ簡単な算定式を誘導することとする。

2. 平均値法による流量算定式の誘導

水圧鉄管または導水トンネルでの流量をピトー管または流速計を用いて測定するに際し,適当な長さの助走距離(管内径の20〜30倍)をとることができ,かつ,下流の直線部の長さも適当で,任意の1直径に沿つての流速分布曲線を管軸のまわりに回転してえられる回転面の平均によつて流速分布曲面が十分近似的に表わされるものと仮定する。

いま,断面の中心を原点,任意の半径に沿つて x 軸,流速 v を縦軸にとつて,流速分布曲線の方程式を,

$$v=f(x) \qquad (4)$$

とおけば,全断面平均流速 V は,半径を r として,

$$V=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi xv dx=\frac{2}{r^2}\int_0^r xv dx \qquad (5)$$

で表わされる。ここで,新しい変数 t を用いて,

$$x=r(1+t)/2 \qquad (6)$$

とおけば,(5)式は次のようになる。

$$V=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)v dt \qquad (7)$$

ここに,(7)式の右辺の被積分関数中の v は,

$$v\equiv f\{r(1+t)/2\} \qquad (8)$$

であるから,(7)式の右辺の被積分関数を,

$$g(t)\equiv(1+t)v=(1+t)f\{r(1+t)/2\} \qquad (9)$$

とおけば,(7)式は次のように書くことができる。

$$V=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}g(t)dt \qquad (10)$$

そこで,(10)式が区間 $[-1,1]$ 内に適当にとつた n 個の観測点(その横座標が t_i)における流速 v_i と n 個の定係数 A_i との積 A_iv_i の総和に近似的に等しくなるように,すなわち,次の式,

$$V=A_1v_1+A_2v_2+\cdots+A_nv_n=\sum_{i=1}^{n}A_iv_i \qquad (11)$$

が近似的に成り立つように,t_i および A_i の値を定めよう。それには Gauss の平均値法を用いれば一応その目的が達せられる[5]。

Gauss の平均値法の原理は次のとおりである。区間 $[-1,1]$ における連続関数 $y=g(t)$ のこの区間での平均値 M は,

$$M=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}g(t)dt \qquad (12)$$

である。そこで,この M の値が上の区間内に適当にとつた n 個の座標点 t_i における関数値 y_i と n 個の適当な定係数 R_i との積 R_iy_i の総和に近似的に等しくなるように,すなわち,

$$M=R_1y_1+R_2y_2+\cdots+R_ny_n=\sum_{i=1}^{n}R_iy_i \qquad (13)$$

が近似的に成り立つように,t_i および R_i の値を定めることを考える。

いま,$g(t)$ を Maclaurin の級数に展開したものを,

$$g(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_mt^m+\cdots \qquad (14)$$

とおき,これを(12)式の右辺に入れて項別に積分すれば,

$$M=a_0+(a_2/3)+(a_4/5)+\cdots+\{a_{2s}/(2s+1)\}+\cdots \qquad (15)$$

がえられる。また，t_i における関数値 y_i は (14) 式より，

$$y_i \equiv g(t_i)=a_0+a_1t_i+a_2t_i^2+\cdots+a_mt_i^m+\cdots \qquad (16)$$

であるから，これを (13) 式に入れれば，次の式が導かれる。

$$\begin{aligned} M&=\sum_{i=1}^{n}R_i(a_0+a_1t_i+a_2t_i^2+\cdots+a_mt_i^m+\cdots)\\ &=a_0\sum_{i=1}^{n}R_i+a_1\sum_{i=1}^{n}R_it_i+a_2\sum_{i=1}^{n}R_it_i^2+\cdots+a_m\sum_{i=1}^{n}R_it_i^m+\cdots \end{aligned} \qquad (17)$$

(15) 式の右辺と (17) 式の右辺とを等しいとおいて，a の係数をくらべれば，次の連立方程式がえられる。

$$\left.\begin{array}{ll} R_1+R_2+\cdots+R_n=1, & R_1t_1+R_2t_2+\cdots+R_nt_n=0\\ R_1t_1^2+R_2t_2^2+\cdots+R_nt_n^2=1/3, & R_1t_1^3+R_2t_2^3+\cdots+R_nt_n^3=0\\ R_1t_1^4+R_2t_2^4+\cdots+R_nt_n^4=1/5, & R_1t_1^5+R_2t_2^5+\cdots+R_nt_n^5=0\\ \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (18)$$

一般に，(18) 式は次のように書くことができる。

$$\sum_{i=1}^{n}R_it_i^m=\begin{cases}0 & (m:\text{奇数})\\ 1/(m+1) & (m:\ 0\text{または偶数})\end{cases} \qquad (19)$$

さて，(18)式の方程式の数は一般に無限であるから，これらを全体として解くことはできない。そこで，Gauss は t_i と R_i との合計 $2n$ 個の未知数を解くために，(18) 式の初めから $2n$ 個の方程式を連立で解いてこれらの値を定めた。したがつて，根としての t_i, R_i は (18) 式の初めから $2n$ 個の方程式を満足するが $2n+1$ 番目の方程式，$\sum_{i=1}^{n}R_it_i^{2n}=1/(2n+1)$ を満足しない。すなわち，Gauss の平均値法公式は $y=g(t)$ が t に関して $2n-1$ 次の多項式ならばまつたく誤差をともなわない。そこで，被積分関数が多項式であるとき，ある平均値法公式が誤差なく適用できるような，多項式の最高次数をその公式の近似度という。すなわち，Gauss の公式の近似度は $2n-1$ である。

さて，Gauss の公式は (18) 式の連立方程式を解くにあたり，t_i, R_i になんの条件も設けないで未知数と同じ数の方程式をとつてこれらの値を定めたのであるが，もし，t_i, R_i の少なくともどちらかにある条件を設けるとそれだけ方程式の数が減つて近似度が悪くなるのは当然である。たとえば[6]，Newton-Cotes は t_i を等間隔に R_i は $R_1=R_n$, $R_2=R_{n-1}, \cdot\cdot$ というように対称的にとつたため，近似度は n が偶数ならば $n-1$，奇数ならば n となつた。Maclaurin は区間を n 等分して各小区間の中点に t_i をとつたため，近似度は Newton-Cotes と同じになり Tschebyscheff は $R_1=R_2=R\cdots=R_n=1/n$ としたため，近似度は n が偶数ならば $n+1$，奇数ならば n となつた。このように，t_i, R_i に条件を設けて導かれた上記の各公式の近似度がはるかに Gauss のそれより劣るのは当然で一般の関数に対しては Gauss の公式は最も精度の高いものである。

そこでもし，Gauss の平均値法公式から，管水路内の流量を測定するため，与えられた断面の1半径に沿つての観測点の位置と流量算定式とを導くこととすると，この場合の被積分関数 $g(t)$ は (9) 式に示すように，$g(t)\equiv(1+t)v$ であるから，座標点 t_i における関数値 $y_i=g(t_i)$ に相当するものは，この場合，

$$g(t_i)=(1+t_i)v_i \qquad (20)$$

となる。ここに，v_i は座標点 t_i に対する次の観測点，

$$x_i=r(1+t_i)/2 \qquad (21)$$

において測定される流速を意味する。

ゆえに，Gauss の公式における t_i および R_i を用いて，全断面平均流速 V は，

$$V=\sum_{i=1}^{n}R_iy_i=\sum_{i=1}^{n}R_i(1+t_i)v_i \qquad (22)$$

と書かれ，(11) 式の定係数 A_i は，

$$A_i=R_i(1+t_i) \qquad (23)$$

となる。たとえば，$n=2$ とすれば，

$$t_1=-\sqrt{1/3},\ t_2=\sqrt{1/3};\ R_1=R_2=1/2 \qquad (24)$$

であるから[7]，

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=r(1-\sqrt{1/3})/2 \fallingdotseq 0.211\,r, & A_1=(1-\sqrt{1/3})/2 \fallingdotseq 0.211\\ x_2=r(1+\sqrt{1/3})/2 \fallingdotseq 0.789\,r, & A_2=(1+\sqrt{1/3})/2 \fallingdotseq 0.789 \end{array}\right\} \qquad (25)$$

となつて，$x_1=0.211\,r$ の観測点で測定される流速を $v_{0.211}$ と書き，他も同様とすれば，Gauss の2点法による

全断面平均流速算定式は，次のようになる。

$$n=2;\ V=0.211\,v_{0\ 211}+0.789\,v_{0\ 789} \quad \cdots\cdots(26)$$

この式は前に述べたように，被積分関数 $g(t)$ が t に関して高々 $2\times2-1=3$ 次の多項式であるとき誤差をともなわない。したがつて，1半径に沿つての流速分布曲線 $v=f(x)$ における $f(x)$ が x に関して高々2次の多項式で，これを管軸のまわりに回転させてえられる回転面で流速分布曲面が十分近似的に表わされるとしたときの算定式である。もちろん，前に述べたように，断面の中心に関して上の観測点と対称な観測点を設け，1直径に沿つて合計4点をとり，対称点同士の測定値の平均を（26）式の v に代入するのである。

同じようにして，$n=3\sim5$ に対する算定式を誘導すると，次のようになる。

$$n=3;\ V=0.063\,v_{0\ 113}+0.444\,v_{0\ 500}+0.493\,v_{0\ 887} \quad \cdots\cdots(27)$$

$$n=4;\ V=0.024\,v_{0\ 069}+0.215\,v_{0\ 330}+0.437\,v_{0\ 670}+0.324\,v_{0\ 931} \quad \cdots\cdots(28)$$

$$n=5;\ V=0.011\,v_{0\ 047}+0.111\,v_{0\ 231}+0.284\,v_{0\ 500}+0.368\,v_{0.769}+0.226\,v_{0\ 953} \quad \cdots\cdots(29)$$

（27）式，（28）式および（29）式は1半径に沿つての流速分布曲線を x に関してそれぞれ高々4次，6次および8次で近似させたときの算定式である。

以上のようにして，Gauss の平均値法公式をそのまま適用して一応全断面平均流速算定式を導くことができるが，これよりも精度の高いと思われる他の流量算定式を導くこととしよう。

いま，（5）式において，

$$x^2=r^2(1+t)/2 \quad \cdots\cdots(30)$$

とおけば，全断面平均流速 V は，次の式で表わされる。

$$V=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}v\,dt \quad \cdots\cdots(31)$$

ここで，流速 v は（30）式における t の関数となるから，上に述べた Gauss の公式を用いることができる。このとき，観測点の位置 x_i は，Gauss の公式に与えられている t_i を用いて，（30）式より，次のように計算される。

$$x_i=\sqrt{(1+t_i)/2}\,r\quad(i=1,2,\cdots,n) \quad \cdots\cdots(32)$$

たとえば，$n=2$ とすれば，$t_1=-\sqrt{1/3}$，$t_2=\sqrt{1/3}$；$R_1=R_2=1/2$ であるから，

$$x_1=\sqrt{(1-\sqrt{1/3})/2}\,r\doteqdot0.460r,\quad x_2=\sqrt{(1+\sqrt{1/3})/2}\,r\doteqdot0.888\,r \quad \cdots\cdots(33)$$

となつて，次の算定式がえられる。

$$n=2;\ V=(v_{0.460}+v_{0\ 888})/2 \quad \cdots\cdots(34)$$

（34）式の近似度はその誘導過程から明らかなように，流速 v を t（すなわち，x^2）の無限ベキ級数で表わすとき t の3次の項までを成り立たせるものである。

同じようにして，$n=3,4,5$ とすれば，t に関して近似度がそれぞれ5次，7次，9次であるような，次の算定式を導くことができる。

$$n=3;\ V=\{5(v_{0\ 336}+v_{0\ 942})+8\,v_{0\ 707}\}/18 \quad \cdots\cdots(35)$$

$$n=4;\ V=0.174(v_{0\ 263}+v_{0\ 965})+0.326(v_{0.574}+v_{0\ 819}) \quad \cdots\cdots(36)$$

$$n=5;\ V=0.118(v_{0\ 217}+v_{0\ 976})+0.239(v_{0\ 480}+v_{0\ 877})+0.284\,v_{0\ 707} \quad \cdots\cdots(37)$$

なお，別の観点から流量算定式を導くことができる。すなわち，（9）式から明らかなように，被積分関数 $g(t)\equiv(1+t)v$ は積分区間 $[-1,1]$ の下限 $t=-1$ においてその関数値を0とする。上の諸公式では，この条件を無視し Gauss の平均値法公式を適用して算定式を導いたのであるが，この条件を考慮に入れた算定式を求めることもできるであろう。

それには，Gauss の平均値法において，なんの条件も設けないで（18）式の初めから $2n$ 個の連立方程式を成り立たせるような $2n$ 個の未知数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$；$R_1,R_2,\cdots,R_n$ のうち，あらかじめ $t_1=-1$ と定めて，残る $n-1$ 個の t_i と n 個の R_i とにはなんの条件も与えずに，（18）式の初めから $2n-1$ 個の方程式をとつて，これらを同時に満足させる $t_2,\cdots,t_n$；$R_1,R_2,\cdots,R_n$ の値を定めればよい。このようにして導かれた平均値法公式を一般の関数に適用すると，その近似度は $2n-2$ となるが（Gauss の公式の近似度は $2n-1$ であるから，1つの条件を加えたために近似度が1つ減る），$t=-1$ において関数値が0となるような関数にこの公式を適用すると，座標点として $t_1=-1$ をとる必要がなくなり，その代わりとして区間内に1つの座標点をとることが許されて，n 個の座標点に対する近似度は $2(n+1)-2=2n$ となり，Gauss の公式を用いる場合よりも近似度が1つだけ高くなるわけである。

そこで，(18) 式において $t_1=-1$ とおくと，次の連立方程式がえられる。

$$\left.\begin{array}{ll} R_1+R_2+\cdots+R_n=1, & -R_1+R_2t_2+\cdots+R_nt_n=0 \\ R_1+R_2t_2^2+\cdots+R_nt_n^2=1/3, & -R_1+R_2t_2^3+\cdots+R_nt_n^3=0 \\ R_1+R_2t_2^4+\cdots+R_nt_n^4=1/5, & -R_1+R_2t_2^5+\cdots+R_nt_n^5=0 \\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(38)$$

筆者は $n=2\sim7$ に対する根 t_i, R_i を求めて**表—1** をえた。n が小さいときには，(38) 式を連立で解いても容易であるが，n がある程度大きくなるとこのような解法では不可能となる。そこで，t_i, R_i の根を分離して，まず t_i の根を求め，これを (38) 式に入れて R_i に関する 1 次連立方程式を作りこれより R_i の値を求めるのであるが，-1 以外の t_i の根は $n-1$ 次の超球多項式の零点として定められるから（証明は **3.** で述べる），t_i に対しては計算機を用いてその根の近似値を求めることができる。しかし，これを (38) 式に入れて R_i に関する1次連立方程式を作りこれを解くことは，n が6またはそれ以上となると困難であるので，有隣電機精機ＫＫに依頼し電子計算機 (Facom-128) によつて解いたものである。

表—1 を用いて，全断面平均流速算定式を (11) 式の形で求めるには，区間 $[-1,1]$ の1端 $t=-1$ で関数値が0となる被積分関数 $g(t)$ がこの場合 (20) 式のように書かれるから，(11) 式の定係数 A_i は (23) 式，$A_i=R_i(1+t_i)$ から計算される。

表—1

n	t_i	R_i	n	t_i	R_i
2	−1	1/4	6	−1	1/36
	1/3	3/4		−0.802930	0.159820
3	−1	1/9		−0.390929	0.242694
	−0.289898	0.512486		0 124050	0.260463
	0.689898	0.376403		0.603973	0.208451
4	−1	1/16		0.920380	0.100794
	−0.575319	0.328844	7	−1	1/49
	0.181066	0.388193		−0.853891	0.119614
	0.822823	0.220463		−0.538468	0.190475
5	−1	1/25		−0.117343	0.223555
	−0.720480	0.223104		0.326031	0.212352
	−0.167181	0.311826		0.703843	0 159102
	0.446314	0.281356		0.941367	0 074494
	0.885792	0.143714			

いま，2点法の算定式を導くには，**表—1** で $n=3$ の欄をみて，$t_1=-0.289898$，$t_2=0.689898$；$R_1=0.512486$，$R_2=0.376403$ であるから，定係数 A_1, A_2 は，次のようになる。

$$A_1=0.512486(1-0.289898)\fallingdotseq0.364,\quad A_2=0.376403(1+0.689898)\fallingdotseq0.636 \quad\cdots\cdots(39)$$

また，1半径に沿つての観測点の位置 x_1, x_2 は，(21) 式より，

$$x_1=r(1-0.289898)/2\fallingdotseq0.355r,\quad x_2=r(1+0.689898)/2\fallingdotseq0.845r \quad\cdots\cdots(40)$$

となるから，全断面平均流速算定式は，次のようになる。

$$n=2;\ V=0.364\,v_{0.355}+0.636\,v_{0.845} \quad\cdots\cdots(41)$$

(41) 式は，半径に沿つての流速分布曲線 $v=f(x)$ を x の3次の多項式で近似させるとき誤差をともなわない。なぜならば，**表—1** の $n=3$ に対する公式は，被積分関数 $g(t)\equiv(1+t)v$ が $2\times3-2=4$ 次の多項式まで誤差をともなわないのであるから，v の最高次数は3次となるのである。

同じようにして，v が高々5次，7次および9次の多項式まで誤差をともなわない算定式は，**表—1** の $n=4$ 5,6 の欄から次のように誘導される。

$$n=3;\ V=0.140\,v_{0.212}+0.458\,v_{0.591}+0.402\,v_{0.911} \quad\cdots\cdots(42)$$

$$n=4;\ V=0.062\,v_{0.140}+0.260\,v_{0.416}+0.407\,v_{0.723}+0.271\,v_{0.943} \quad\cdots\cdots(43)$$

$$n=5;\ V=0.031\,v_{0.099}+0.148\,v_{0.305}+0.293\,v_{0.562}+0.334\,v_{0.802}+0.194\,v_{0.960} \quad\cdots\cdots(44)$$

(41) 式は同じ観測点数の (26) 式より，また，(42)〜(44) 式はそれぞれ (27)〜(29) 式よりいずれも近似度が1つ高いが，(41) 式と (34) 式，(42) 式と (35) 式，(43) 式と (36) 式および (44) 式と (37) 式との優劣はにわかに断定できない。

しかし，いずれにしても，従来のように1直径に沿つて多くの観測点をとることは，労力や精度の上から好ま

しいとは考えられず，また，それら観測点の位置は必ずしも合理的であつたとはいえない。上の各方法によれば，同じ精度に対しては観測点数を減らし，観測点数が同じならばより合理的で精度の高い算定式を導くことができたように思われる。これら各算定式が事実どのような精度をもつかについては，理論的な流速分布並びに実測された流速分布に適用した結果から考察すべきであるが，この点に関しては次の論文に譲ることとする。

上の公式のいずれかを用いて全断面平均流速 V が算定できれば，これに管の断面積を掛けて流量が求められるが，断面積としては，流速測定に先立つて測られた管の平均半径から算出した値を使用するのが望ましい。あるいは，この平均半径を基として観測点の位置を算出し，この値を測定直径上にとつてもよいであろう。

筆者はかつて開水路の流量測定に対する必要上から，区間 $[-1,1]$ の両端で関数値がいずれも 0 となる関数に適用して最も高い近似度を示す1つの新しい平均値法公式を誘導した（これは本論文における公式と共に 1954 年筆者がその必要上からまつたく独立に証明したものであるが，最近，数値計算法に関する外国書，Kopal : Numerical Analysis (1955), Hildebrand : Introduction to Numerical Analysis (1956), Kunz : Numerical Analysis (1957) などに，筆者のものと証明法は異なるが結果の同じ両公式が紹介されている。一言申し添えておく次第である）。管水路の流量測定にこの公式を用いればよいと一応考えられるかもしれない。それは，被積分関数 $g(t)\equiv(1+t)v$ が $t=-1$ において 0 で，$t=1$ においても $v=0$ と考えれば条件を満たしているからである。しかし，管壁での流速を 0 と考えて平均値法を適用することは，境界層を含めて管内の流速分布を管壁 $(t=1)$ で関数値が 0 となるような1つの多項式で表わそうとすることであるが，速度勾配が境界層外端で不連続であるから，この近似はよろしくない。境界層の厚さはきわめて薄いから，境界層の外側の速度分布だけを考えてこれを多項式で近似させ，これを管壁にまで拡張するのがよい。そのために多項式の表わす曲線は境界層をおおうことになるが，この量は無視しうる程微小である。

3. 区間の 1 端で関数値が 0 となる関数に対する平均値法公式の証明

本節では，区間 $[-1,1]$ の1端 $t=-1$ で関数値が 0 となるような関数 $g(t)$ に対する平均値法の n 個の座標点 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ を求める方程式を誘導し，定係数 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ を計算する式を導くと同時に，R_1 は簡単な分数 $1/n^2$ となることを示す。

いま，与えられた n の値に対して，求める座標点を $t_1(=-1),t_2,\cdots,t_n$ とし，

$$\varphi_n(t)\equiv(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_n) \qquad (45)$$

とすれば，$\varphi_n(t)=0$ よりえられる n 個の根が求めるものである。さて，$\psi_{n-2}(t)$ を t に関して高々 $n-2$ 次の任意の多項式とすれば $\psi_{n-2}(t)\varphi_n(t)$ は高々 $2n-2$ 次の多項式となる。2. で述べたように，この平均値法公式の近似度は $2n-2$ であるから，

$$M=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\psi_{n-2}(t)\varphi_n(t)dt \qquad (46)$$

は，求める $2n$ 個の根を t_i,R_i として，座標点 t_i における関数値 $\psi_{n-2}(t_i)\varphi_n(t_i)$ と R_i との積の総和にまつたく等しい。ところで，(45) 式より $\varphi_n(t_i)=0$ であるから，(46) 式の右辺は 0 に等しい。

$$\therefore\quad \int_{-1}^{1}\psi_{n-2}(t)\varphi_n(t)dt=0 \qquad (47)$$

すなわち，$\varphi_n(t)$ は t に関して高々 $n-2$ 次の任意の多項式と区間 $[-1,1]$ において互いに直交関数系を構成する[9]。ゆえに，根 t_i を求める問題は，このような直交関数 $\varphi_n(t)$ の形を定めるにある。

さて，(47) 式が成り立つことは，次の $n-1$ 個の式が同時に成り立つのと同じである。

$$\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)dt=0,\ \int_{-1}^{1}t\,\varphi_n(t)dt=0,\cdots,\ \int_{-1}^{1}t^{n-2}\varphi_n(t)dt=0 \qquad (48)$$

いま，$\varphi_n(t)$ は t に関して n 次であるから，

$$\int\varphi_n(t)dt=\varphi_{n+1}(t),\ \int\varphi_{n+1}(t)dt=\varphi_{n+2}(t),\cdots,\ \int\varphi_{2n-2}(t)dt=\varphi_{2n-1}(t) \qquad (49)$$

とすれば，$\varphi_{n+1}(t),\varphi_{n+2}(t),\cdots,\varphi_{2n-1}(t)$ は t に関してそれぞれ $n+1$ 次，$n+2$ 次，…，$2n-1$ 次となり，ν を 0 または正の整数として，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}t^{\nu}\varphi_n(t)dt&=[t^{\nu}\varphi_{n+1}(t)]^{1}_{-1}-\nu\int_{-1}^{1}t^{\nu-1}\varphi_{n+1}(t)dt\\&=[t^{\nu}\varphi_{n+1}(t)]^{1}_{-1}-\nu[t^{\nu-1}\varphi_{n+2}(t)]^{1}_{-1}+\cdots+(-1)^{\nu}\nu![\varphi_{n+\nu+1}(t)]^{1}_{-1}\end{aligned} \qquad (50)$$

である。ゆえに，(48) 式が同時に成り立つためには，$t=-1$ で 0 となる条件をもつ $\varphi_n(t)$ を含めて，

$$\varphi_n(t),\varphi_{n+1}(t),\varphi_{n+2}(t),\cdots,\varphi_{2n-1}(t)$$

が $t=-1$ ですべて0とならなければならない。すなわち，

$$\varphi_{2n-1}(t),\varphi_{2n-1}'(t),\varphi_{2n-1}''(t),\cdots,\varphi_{2n-1}^{(n-1)}(t)$$

が $t=-1$ ですべて0となるべきである。

そこで，$\varphi_{2n-1}(t)$ が $t=-1$ においてその $n-1$ 次の微係数まで0となるためには，$\varphi_{2n-1}(t)$ は $(t+1)^n$ の因数をもたなければならない。また，(48) 式が同時に成り立つためには，$t=1$ で (50) 式の右辺が0とならなければならないから，

$$\varphi_{n+1}(t),\varphi_{n+2}(t),\cdots,\varphi_{2n-1}(t)$$

$$\therefore\ \varphi_{2n-1}(t),\varphi_{2n-1}'(t),\cdots,\varphi_{2n-1}^{(n-2)}(t)$$

が $t=1$ ですべて0とならなければならない。ゆえに $\varphi_{2n-1}(t)$ は $(t-1)^{n-1}$ の因数をもつ。したがつて，$2n-1$ 次の関数 $\varphi_{2n-1}(t)$ は，K をある定数として，次のように書くことができる。

$$\varphi_{2n-1}(t)=K(t+1)^n(t-1)^{n-1} \quad \cdots\cdots(51)$$

さて，(45) 式より明らかなように，$\varphi_n(t)=\varphi_{2n-1}^{(n-1)}(t)$ の t^n の係数は1であるから，(51) 式を t に関して $n-1$ 回微分してえられる t^n の係数を1とおけば，K の値が求められる。

$$(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)K=1 \quad \therefore\ K=n!/(2n-1)! \quad \cdots\cdots(52)$$

これを (51) 式に入れれば，$\varphi_{2n-1}(t)$ は次のようになる。

$$\varphi_{2n-1}(t)=\{n!/1(2n-1)!\}(t+1)^n(t-1)^{n-1} \quad \cdots\cdots(53)$$

$$\therefore\ \varphi_n(t)=\frac{n!}{(2n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\{(t+1)^n(t-1)^{n-1}\} \quad \cdots\cdots(54)$$

したがつて，求める根 t_i $(i=1,2,\cdots,n)$ は，次の n 次方程式を解いて求められる。

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\{(t+1)^n(t-1)^{n-1}\}=0 \quad \cdots\cdots(55)$$

超球多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ は，

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t)=\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d^n}{dt^n}\{(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\} \quad \cdots\cdots(56)$$

であるから[10]，$\varphi_n(t)$ は次のように書くことができる。

$$\varphi_n(t)=\frac{2^{n-1}\cdot n!\cdot(n-1)!}{(2n-1)!}(1+t)P_{n-1}^{(0,1)}(t) \quad \cdots\cdots(57)$$

すなわち，この平均値法の $t_1=-1$ を除いた $n-1$ 個の未知の座標点は $n-1$ 次の超球多項式 $P_{n-1}^{(0,1)}(t)$ の零点である。

たとえば，$n=3$ とすれば，(55) 式より，

$$\frac{d^2}{dt^2}\{(t+1)^3(t-1)^2\}=20t^3+12t^2-12t-4=4(t+1)(5t^2-2t-1)=0$$

$$\therefore\ t_1=-1,\ t_2=-(\sqrt{6}-1)/5\doteqdot-0.289898,\ t_3=(\sqrt{6}+1)/5\doteqdot0.689898 \quad \cdots\cdots(58)$$

となる。これらを (38) 式に入れれば，R_1,R_2,R_3 に関する1次連立方程式がえられるから，これを解いて，

$$R_1=1/9,\ R_2=(16+\sqrt{6})/36\doteqdot0.512486,\ R_3=(16-\sqrt{6})/36\doteqdot0.376403 \quad \cdots\cdots(59)$$

さて，次に，与えられた n の値に対して $R_1=1/n^2$ となることは，次のようにして証明される。

n 個の点 $(t_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ を通る $n-1$ 次の多項式 $y_{n-1}(t)$ を Lagrange の補間式を用いて次のように書く。

$$y_{n-1}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i\varphi_n(t)}{(t-t_i)\varphi_n'(t_i)} \quad \cdots\cdots(60)$$

ここに，$\varphi_n(t)$ は (45) 式で表わされるものである。

(60) 式の両辺を区間 $[-1,1]$ について積分すれば，

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}y_{n-1}(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i\varphi_n(t)}{(t-t_i)\varphi_n'(t_i)}\right\}dt=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(t)}{2(t-t_i)\varphi_n'(t_i)}dt\right\} \quad \cdots\cdots(61)$$

となるが，$n\geqq2$ とすれば，$n-1<2n-2$ であるから，この平均値法公式の座標点 t_i に対応する関数値を y_i，定係数を R_i とすれば，次の等式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}y_{n-1}(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}R_iy_i \quad \cdots\cdots(62)$$

(61) 式と (62) 式とより，

$$R_i=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(t)}{(t-t_i)\varphi_n'(t_i)}dt \quad\cdots\cdots(63)$$

となるから，R_i は (38) 式の連立方程式を解く代わりに，(63) 式から求めてもよい。

いま，$t_i=t_1=-1$ とおくと，R_1 は次のようになる。

$$R_1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(t)}{(t+1)\varphi_n'(-1)}dt \quad\cdots\cdots(64)$$

ところで，(54) 式を用いれば，

$$\varphi_n'(t)=\frac{n!}{(2n-1)!}\frac{d^n}{dt^n}\{(t+1)^n(t-1)^{n-1}\} \quad\cdots\cdots(65)$$

であるから，Leibnitz の定理を用いて，容易に，

$$\varphi_n'(-1)=(-1)^{n-1}2^{n-1}\cdot(n!)^2/(2n-1)! \quad\cdots\cdots(66)$$

また，(49) 式を用いれば，次の式がえられる。

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(t)}{t+1}dt=\left[\frac{\varphi_{n+1}(t)}{t+1}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_{n+1}(t)}{(t+1)^2}dt=\left[\frac{\varphi_{n+1}(t)}{t+1}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{\varphi_{n+2}(t)}{(t+1)^2}\right]_{-1}^{1}$$

$$+\cdots+2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-2)\left[\frac{\varphi_{2n-1}(t)}{(t+1)^{n-1}}\right]_{-1}^{1}+2\cdot3\cdot\cdots(n-1)\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_{2n-1}(t)}{(t+1)^n}dt \quad\cdots\cdots(67)$$

前に述べたように，$\varphi_{2n-1}(t)$ は $(t+1)^n$ の因数をもつから，$\varphi_{n+1}(t)/(t+1)$，$\varphi_{n+2}(t)/(t+1)^2,\cdots,\varphi_{2n-1}(t)/(t+1)^{n-1}$ はいずれも $t+1$ の因数をもち，したがつて，$t=-1$ においてこれらの値は0となる。また，$t=1$ において $\varphi_{n+1}(t),\varphi_{n+2}(t),\cdots,\varphi_{2n-1}(t)$ はいずれも0である。ゆえに，(53) 式を用いて，

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(t)}{t+1}dt=(n-1)!\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_{2n-1}(t)}{(t+1)^n}dt=\frac{n!\,(n-1)!}{(2n-1)!}\int_{-1}^{1}(t-1)^{n-1}dt=\frac{(-1)^{n+1}2^n\{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!} \quad\cdots\cdots(68)$$

となるから，(66) 式および (68) 式を (64) 式に入れれば，$R_1=1/n^2$ がえられる。

4. 結　語

1) ピトー管や流速計を用いて管水路内の流量を測定する従来の方法は，ある断面での流速分布曲面が，任意の1半径に沿つての流速分布曲線を管軸のまわりに回転してえられる回転面で十分近似的に表わされるとの仮定に立つているが，この場合には，平均値法の原理に基づいて，より合理的な流量算定式を導くことができる。

2) この算定式は誘導過程の相違から3種にわけられる。第1は全断面平均流速を表わす（5）式に（6）式のような変数変換を施して，その結果に Gauss の平均値法公式をそのまま適用したもので，観測点数を n とすればその近似度は $2n-2$ となる（測定半径に沿つての流速分布曲線を $2n-2$ 次の多項式で表わすときに誤差をともなわない）。第2は（5）式に (30) 式のような変数変換を行つてえられるもので，観測点数 n に対する近似度は新しい変数 t に関して $2n-1$ である。第3は（5）式に（6）式のような変数変換を行つてえられる被積分関数が $t=-1$ で0となるから，区間 $[-1,1]$ の1端 $t=-1$ で関数値が0となるような関数に対する平均値法公式を誘導しておいて，これを適用することによつてえられる。この平均値法公式の証明は **3.** に述べられており，**表—1** はその数値表である。第3の算定式の近似度は，観測点数を n とするとき $2n-1$ である。

3) 以上のような算定式と従来の算定式とでは，近似度を同じとすれば前者のいずれもが後者より少ない観測点で十分であり，観測点数を同じとすれば前者のいずれもが後者より近似度が高い。

4) 測点数が少なくて十分に精度の高い算定式を用いれば，労力・費用を節約しうるだけでなく，ピトー管を用いる場合には，水圧計間の干渉を小さくし，動圧孔に流塵のひつかかる機会を少なくし，同時観測をも可能として，測定精度を高めることができる。

この研究に対しては昭和32年度文部省科学研究費（各個研究費）の交付を受けた。また，数値計算に対しては有隣電機精機ＫＫのご援助を受けた。ここに記して謝意を表する次第である。

参考文献

1) 池谷武雄：流量測定法，1954，p. 177～p. 178，2) 同　左，p. 54，
3) 東京電力株式会社工務部水力発電課：宮の下発電所に於ける水車流量測定比較試験報告（其の一），1955，p 15，
4) 石原智男，井田富夫：動揺するマノメータ指示値の読み取り精度，東京大学生産技術研究所所報，第8巻，第 12 号，1956，p. 6，
5) 春日屋伸昌：平均値法による流量算定式について，土木学会誌，第 38 巻，第7号，1953，p. 17～p. 21，
6) 春日屋伸昌：最小2乗法と実験式，応用数学講座，第5巻，第2部，1957，p. 299～p. 300，
7) 春日屋伸昌：平均値法の原理と流量測定への応用，中央大学 70 周年記念工学部論文集，1955，p. 59，
8) 春日屋伸昌：新らしい平均値法公式およびそれに基づく流量算定式の誘導，土木学会論文集，第 55 号，1958，p. 1～p. 9，
9) 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論，1954，p. 140，
10) 小谷正雄，橋本英典：特殊函数，岩波講座現代応用数学，第 12 巻，1，1958，p. 56，

（昭.33.7.10）