

# 振動実験における模型相似律

—原子炉グラファイト パイルの耐震研究のための予備実験—

正 員 畑 野 正\*

## MODEL SIMILITUDE IN VIBRATION TESTING

—A Preliminary Test for Research of the Seismic Stability of  
a Graphite Pile in Nuclear Reactor—

By Dr. Eng., Tadashi Hatano, C.E. Member

**Synopsis:** Similitude of the model for vibration testing of a complicated structure like a graphite pile in nuclear reactor was found out by a dimensional analysis. In order to see their adaptabilities, similitudes were found through to equations of vibro-friction, rocking and elastic vibration with viscons damping. Then, condition to uphold all of them at the same time was found. These two were found well accord and similitudes to copy stress, displacement, destruction, etc., were made clear. Conducting vibration tests of graphite blocks, friction force and rocking were made clear in their characteristics in comparing test results with the solution of the equation of motion.

### 1. 緒 言

複雑な構造物の地震に対する安定性を調べるため、適当な材料を使用して実物を幾何学的に相似に縮小した模型を作り振動台にのせて振動実験を行うことを考える。今ここに模型に生じた結果、例えば応力、変形、破壊、崩壊等が原物に直に対応するようにする事を、実験の目的とし模型の相似律を求めるものとする。

このようないわば総合的な把握を目的とする相似律を求めるには次元解析法によるのがよいであろう。しかし変数として取り上げる物理量に見落としがあれば誤った結果を来すことになるので、これとは別に他の方法で相似律を求め、両者を比較しておのおの解の妥当性を検証するものとする。次元解析法を用いない場合として、ここに運動の微分方程式を比較する方法を採用し、この対象として原子炉のグラファイトパイルの耐震を考える。

グラファイトパイルを耐震的にするには、個々のグラファイトが振動によつて滑りを起こさないよう、また、ロッキングを起こさないよう、バンドその他で結び、これを圧力容器に連結するのが一つの方法であろう。

このようにしたパイルの振動現象は一つの運動方程式により規定することは困難である。そこで運動方程式によつて表現され得る個々の振動現象について考察し、そのおのおのについての相似律を定め、これらが同時に成立するための相似律を考えるものとする。ここに取り上げた個々の振動現象は、振動摩擦現象、ロッキング現象および粘性減衰をもつた弾性振動現象である。

もち論パイルの振動現象が上の三現象に集約されるというのではない。このほかの種々の複雑な現象の集合体であるけれども、これらの三現象を代表として次元解析法による相似律の妥当性を確かめようとするのである。またこれによつて得られた相似律の適用の限界も考察することができるであろう。以上のような趣旨によつて得られた相似律は一般の構造物における振動模型相似律をも導くものであることはいうまでもない。

### 2. 次元解析法による模型相似律

摩擦、ロッキング、弾性振動その他各種の複雑な現象の複合的なものと見られる振動現象において、力学的な現象を支配する物理量として、次のようなものが考えられる。

グラファイトの個々のものは一つの剛体として取扱つてよいであろうから、ここにいう弾性常数はバンドの弾性常数を考えているのである。材料または構造物としての粘性係数とは振動現象にお

表—1

種 類	記 号	工学的次元
1) 構造物の大きさ	$D$	cm
2) 構造物の単位体積重量	$\rho$	kg cm <sup>-3</sup>
3) 重力の加速度	$g$	cm sec <sup>-2</sup>
4) 慣性力	$I$	kg
5) 材料の弾性常数	$E$	kg cm <sup>-2</sup>
6) 材料の破壊強度	$S$	kg cm <sup>-2</sup>
7) 材料または構造物としての粘性係数	$K$	kg cm <sup>-2</sup> sec
8) 摩擦係数	$\mu$	0

\* 工学博士、電力中央研究所 技術研究所、構造研究室

ける重要な要素である減衰を考えるため、その一つの代表として粘性減衰をとつたもので、減衰常数の相似性を知るためにあげたものである。バンドの弾性振動等を考えるときこの考慮が必要であろう。

摩擦係数はグラファイト相互間の滑りが特に重要な要素であることから取りあげたもので、振動摩擦における摩擦係数がいかなる性質のものであるかは後に述べる実験によつて明らかにされるが、ここには一応無次元の常数として取扱うものとする。さて表-1の物理量の間に

$$f\left(D, \rho, g, I, E, K, \frac{E}{S}, \mu\right) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

が成立するものとする。3個の基本単位に対して6個の変数を得たから  $\pi^1$  定理により

$$F\left(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \frac{E}{S}, \mu\right) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

を得る。 $\pi$  の組はいろいろ考えられるが  $I, E, K$  をもとにして解けば

$$\pi_1 = \frac{I}{D^3 \rho} \quad \pi_2 = \frac{E}{D \rho} \quad \pi_3 = \frac{K}{D^{3/2} \rho g^{-1/2}} \dots\dots\dots(3)$$

となる。すなわち原物と模型において  $\frac{I}{D^3 \rho}, \frac{E}{D \rho}, \frac{K}{D^{3/2} \rho g^{-1/2}}, \frac{E}{S}, \mu$  の値が等しくなければならないことになる。いま、原物を  $p$ 、模型を  $m$  で現わし、

$$\frac{D_m}{D_p} = \alpha, \quad \frac{T_m}{T_p} = \beta \dots\dots\dots(4)$$

とすると、(3) 式から表-2を得る。この場合生ずるヒズミ  $s$ 、変位  $d$ 、応力  $\sigma$ 、および自己週期  $T_0$  に対しては表-2の後段に示すような関係が得られる。

表-2

種 類	記 号	模型と原物との間の比
大 き さ	$D$	$D_m/D_p = \alpha$
単位体積重量	$\rho$	$\rho_m/\rho_p$
慣 性 力	$I$	$I_m/I_p = \alpha^3 \rho_m/\rho_p$
時 間	$T$	$T_m/T_p = \beta = \sqrt{\alpha}$
加 速 度	$A$	$A_m/A_p = 1$
弾 性 常 数	$E$	$E_m/E_p = \alpha \rho_m/\rho_p$
破 壊 強 度	$S$	$S_m/S_p = \alpha \rho_m/\rho_p$
粘 性 係 数	$K$	$K_m/K_p = \alpha^{3/2} \rho_m/\rho_p$
摩 擦 係 数	$\mu$	$\mu_m/\mu_p = 1$
ヒ ズ ミ	$s$	$s_m/s_p = 1$
変 位	$d$	$d_m/d_p = \alpha$
応 力	$\sigma$	$\sigma_m/\sigma_p = \alpha \rho_m/\rho_p$
自 己 週 期	$T_0$	$T_{0m}/T_{0p} = \sqrt{\alpha}$

さて以上の考察においては一応温度の影響を考慮していない。しかるに原子炉内グラファイトパイルの温度は数百度に上昇するから、表-2の模型と原物との間の比を定めるとき原物の値として高温時の値を採用しなければならない。温度によつて影響される物理量は表-2において弾性常数、破壊強度、粘性係数、摩擦係数等と考えられるが、特にグラファイトの摩擦係数は温度によつていちじるしく変化するものである点に注意しなければならない。

3. 運動方程式による模型相似律

運動方程式によつて相似律を求めようとする場合、まずいかなる運動方程式が実際に成立するかを決定しなければならない。著者は振動摩擦およびロッキング現象につき実験を行い、実験的に成立する運動方程式を求めると共に、この二つの現象の基礎的な性質を明らかにしようと試みた。また粘性減衰を伴つた弾性振動現象については数理的な取扱いのみにとどめた。

(a) 振動摩擦現象における模型相似律：水平振動台上に  $4 \times 4 \times 16$  cm の柱状に精密に仕上げたグラファイト片を水平にねかせて固定し、この上と同じく  $3 \times 3 \times 12$  cm に仕上げたグラファイト片をねかせておき、振動台に各種の振幅週期によつて単弦振動を与えた。このときグラファイト面に相互に摩擦が作用しながら相対的に滑りを起こし、振動台の運動があまりはげしくなれば摩擦が勝つて相対運動はなくなる。

これらの運動は振動台については抵抗線型加速度計によりその加速度を、グラファイトについてはグラファイト上にはりつけた極く軽量のバークライト片上に直径約 0.1 mm 程度のエナメル線をはり、振動台の外に静置したマグネットの両極間を運動させることによつて、滑動グラファイト片の静止座標に対する絶対速度を記録させた。これら加速度計および速度計の検定を、同じ振動台の変位を機械的に記録し、単弦振動として速度、加速度を計算して行つた結果、加速度において  $\pm 1.5\%$ 、速度において  $\pm 4.0\%$  程度のばらつきにおさまつた。

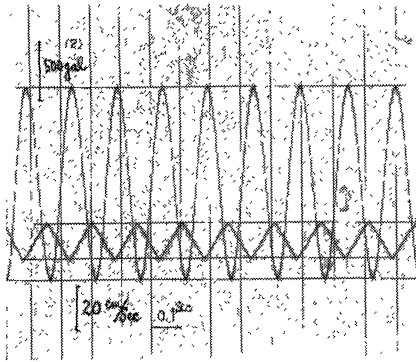
図-1はこの測定結果の一例であつて、グラファイトの絶対速度は三角形の波となり、かつ振動台の単弦振動の加速度とある位相のずれを伴っている。また振動台の加速度の小さい場合はグラファイトの絶対速度は振動台の単弦振動と  $\pi/2$  の位相のずれをもつ単弦振動に近づき、相対的にはほとんど静止していることを示す。

いま、グラファイト片の振動台に対する相対変位を  $x$ 、振動台の変位を  $\epsilon$  を以て現わし、グラファイト片の底面に作用する摩擦力を  $F$  とすれば、グラファイト片の運動方程式は次のごとくなる。

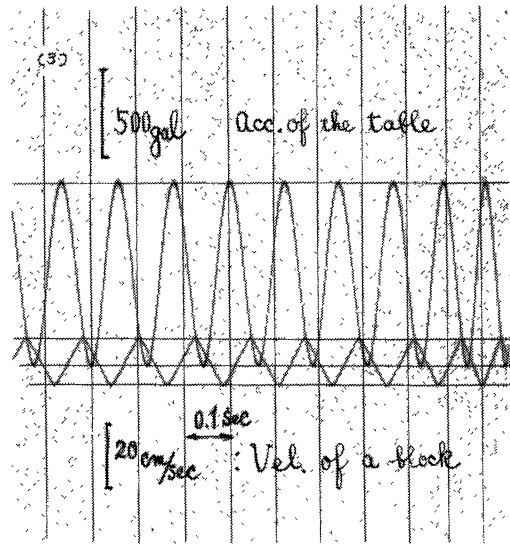
$$m_0 \frac{d^2(x + \epsilon)}{dt^2} = F \dots\dots\dots(5)$$

図-1 Record of the sliding test of a graphite block.

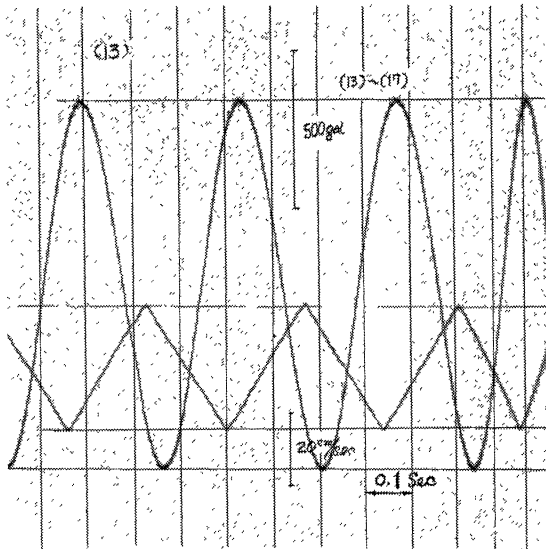
(a) Test (2)



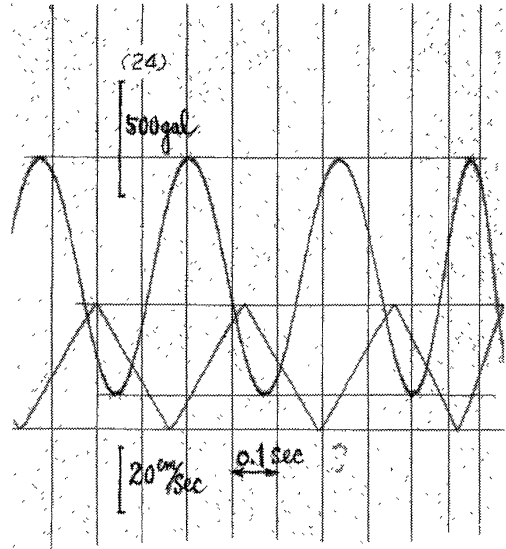
(b) Test (3)



(c) Test (13)



(d) Test (24)



すなわち  $F$  は +, - の一定値となり摩擦力が振動中一定値に作用することを示す。

これらの記録を精細に読みとつた数値は、表-3のごとくである。加速度、速度共に振動値の最大値を示す。位相のずれは速度記録の方が加速度記録より常に遅れており、摩擦力が振動台の変位に遅れて作用していることを示している。表-3には後の議論に必要な位相の差  $r$ ,  $\cos r$  および  $T^2/\epsilon_0$  ( $T$ : 振動台の振動週期,  $\epsilon_0$ : 振動台の振動半振幅) を記しておく。

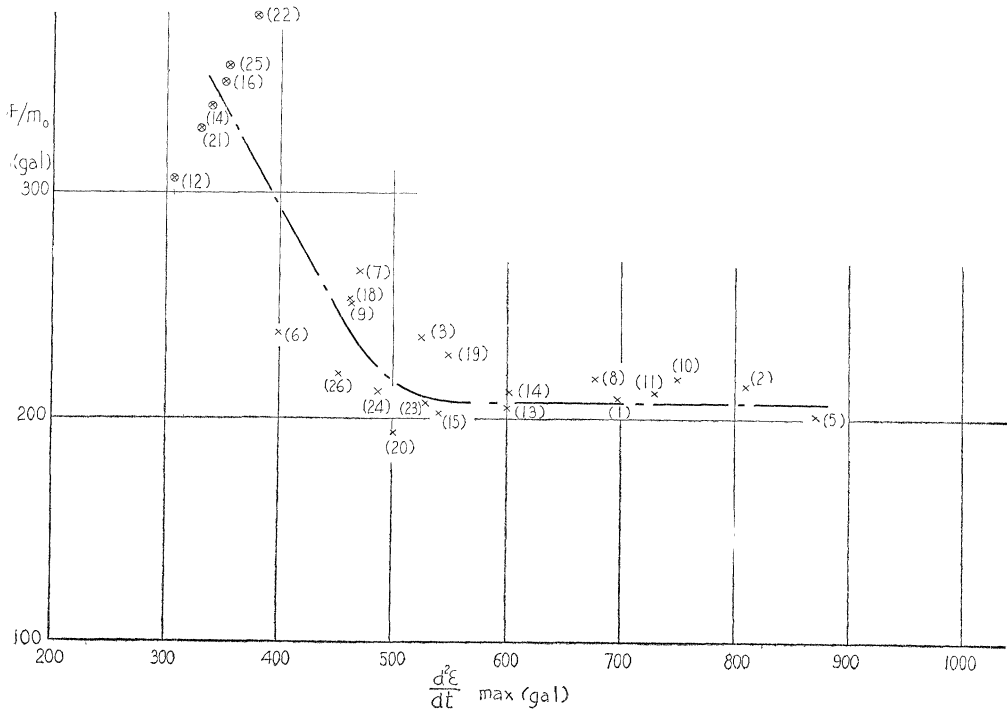
グラファイト片に作用する摩擦力は表-3から、振動週期より振動台加速度と関係つけた方がばらつきが少ない事が知れる。図-2はこの関係を図に示したものである。振動加速度が 500 gal 以上では大体 200~220 gal 程度の摩擦力が作用し、500 gal 以下においては摩擦力は次第に大きくなり振幅加速度が 300~400 gal 付近まで下ると、摩擦力もこれと同等の大きさとなつて相対変位はなくなつてしまう。すなわち静止摩擦が運動摩擦より大きく、摩擦の変化はこの変動の過程を示すものと考えられる。

このように振動摩擦力は相対的すべりを起こしている間は +, - のほぼ一定の値で作用しており、かつ地盤振動の大きさがある程度以上になると摩擦力の大きさは常に常数となると考えて差支えないようである。

表-3

番号	振動週期 $T(\text{sec})$	振動台加速度 $\frac{d^2\xi}{dt^2} \max$ (gal)	グラフアイト絶対 速度 $\frac{d(x+\xi)}{dt} \max$ (cm/sec)	摩擦 力 $F/m_0 = \frac{d^2(x+\xi)}{dt^2}$ (gal)	位相の差 $\gamma(\text{radian})$	$\cos \gamma$	$\frac{T^2}{\epsilon_0}$
(1)	0.121	698	6.31	209	0.935	0.594	0.0567
(2)	0.151	808	8.13	215	1.039	0.507	0.0489
(3)	0.122	523	7.20	236	0.619	0.814	0.0756
(4)	0.153	601	8.13	212	0.797	0.699	0.0658
(5)	0.200	870	10.07	202	1.060	0.489	0.0422
(6)	0.121	400	7.20	238	0.156	0.988	0.0989
(7)	0.153	471	10.16	266	0.328	0.947	0.0840
(8)	0.200	679	10.91	218	0.865	0.649	0.0582
(9)	0.199	461	12.60	253	0.316	0.950	0.0855
(10)	0.233	747	12.71	218	1.031	0.514	0.0528
(11)	0.239	729	12.67	212	1.020	0.523	0.0541
(12)	0.233	306	11.20	—	—	—	—
(13)	0.340	600	17.46	205	0.907	0.616	0.0658
(14)	0.390	339	18.75	—	—	—	—
(15)	0.332	540	16.88	203	0.836	0.670	0.0732
(16)	0.358	350	18.60	—	—	—	—
(17)	0.324	462	21.65	—	—	—	—
(18)	0.123	461	7.74	252	0.481	0.887	0.0855
(19)	0.154	547	8.80	229	0.776	0.714	0.0721
(20)	0.361	501	17.50	194	0.789	0.705	0.0789
(21)	0.124	329	6.37	—	—	—	—
(22)	0.153	379	8.80	—	—	—	—
(23)	0.197	526	10.20	207	0.734	0.743	0.0751
(24)	0.330	486	17.55	212	0.743	0.736	0.0814
(25)	0.200	357	10.60	—	—	—	—
(26)	0.237	451	13.02	220	0.636	0.804	0.0876

図-2 Relation between the acc of the shaking table  $\frac{d^2\xi}{dt^2} \max$  and friction force  $F/m_0$ .



従つて振動台の変位  $\varepsilon$  を  $\varepsilon_0 \sin \omega t$  とすれば,

$$F = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4c}{m\pi} \sin m(\omega t - \tau) \dots\dots\dots (6)$$

と表わすことができる。すなわち振動摩擦の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon_0 \omega^2 \sin \omega t = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4g\mu}{m\pi} \sin m(\omega t - \tau) \dots\dots\dots (7)$$

ここに  $\mu$  は摩擦係数  $\mu = \frac{c}{m_0 g}$  である。これから

$$x = -\varepsilon_0 \sin \omega t + \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{4g\mu}{m\pi} \frac{1}{(m\omega)^2} \sin m(\omega t - \tau) \dots\dots\dots (8)$$

となる。

図—3 は実験例 (3), (24) を用いて摩擦力, 相対変位等を求めた結果である。

この結果は (8) に示したものと全く同じである。すなわち摩擦力は地動の変位に位相差  $\tau$  だけ遅れているが, 相対変位は逆に進んでいること, さらに相対変位の形は頭部を切つた sine curve にはほ近く, この部分すなわち摩擦力の符号が逆転するとき滑りがなくなつて相対的に静止している事が知れる。次に位相のずれについて考察してみよう。問題を簡単にするため  $x$  を調和関数的なものとして取扱い, 位相のずれの性質を考えるものとする。(8) を, その右辺の第二項を初項のみをとつて近似的に次のように表わしてみる。

$$x = -\varepsilon_0 \sin \omega t + \frac{4g\mu}{\pi\omega^2} \sin(\omega t - \tau) = \sqrt{\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0 b \cos \tau + b^2} \sin(\omega t - \tau') \dots\dots\dots (9)$$

ここに  $b = \frac{4g\mu}{\pi\omega^2}$ ,  $\tan \tau' = \frac{b \sin \tau}{-\varepsilon_0 + b \cos \tau}$

また (7) を相当粘性係数  $c_e$  をとつて線型に直して考える<sup>2)</sup>。

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} + c_e \frac{dx}{dt} - m_0 \varepsilon_0 \omega^2 \sin \omega t = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$x = x_0 \sin \omega t$  として 1 cycle 当りの energy 損失を Coulomb 摩擦におけるものと等しいとおき,

$$c_e = \frac{4\mu m_0 g}{\pi x_0 \omega} \dots\dots\dots (11)$$

を得る。(10) の解を  $x = x_0 \sin(\omega t - \tau')$  とおくと

図—3(a) Test (3) Friction force for the sliding graphite block  $F/m_0$  and its relative displacement to the shaking table  $x$  in test (3).

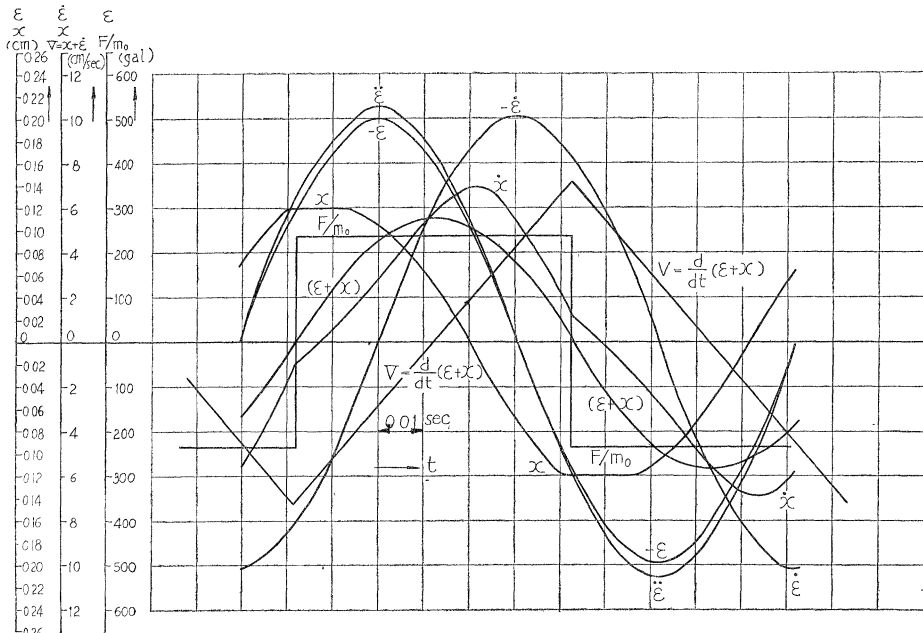
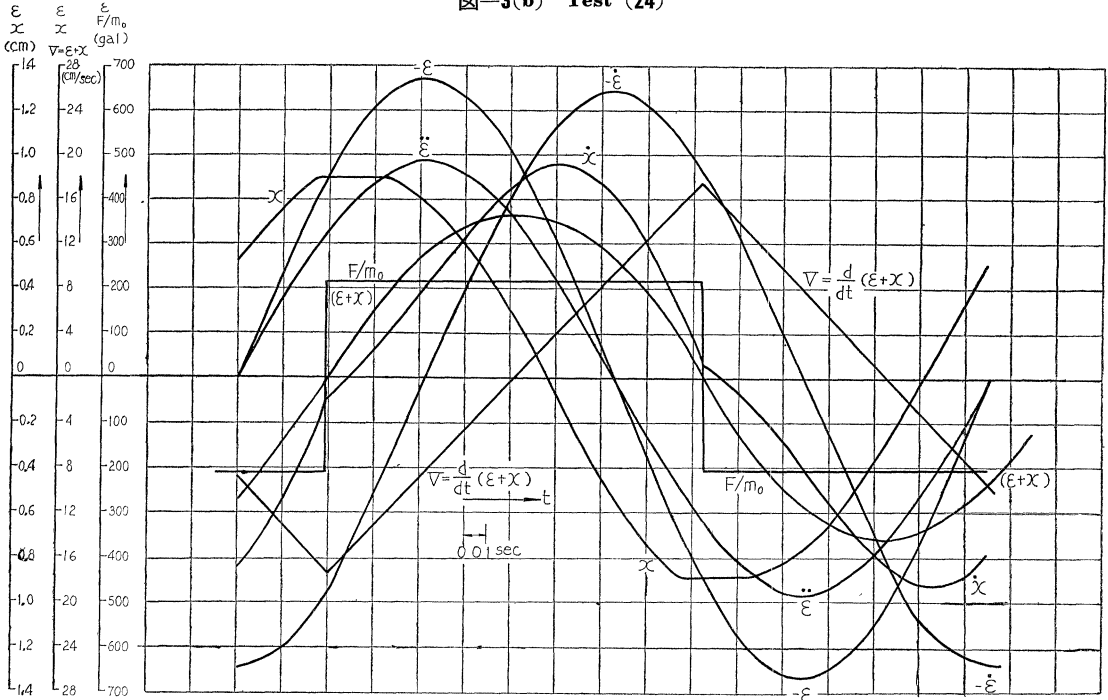


図-3(b) Test (24)



$$\tan \gamma' = \frac{4 \mu g}{\pi x_0 \omega^2}, \quad x_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{16 \mu^2 g^2}{\pi^2 \omega^4}}$$

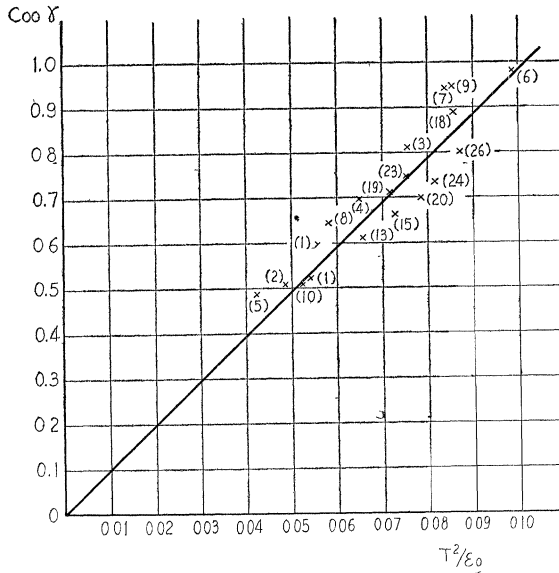
これから

$$\cos \gamma = \frac{4 g \mu}{\pi \varepsilon_0 \omega^2} \dots \dots \dots (12)$$

すなわち Coulomb 摩擦の場合  $\cos \gamma$  は  $\frac{1}{\varepsilon_0 \omega^2}$  すなわち  $\frac{T^2}{\varepsilon_0}$  に比例することになる。

表-3 の  $\cos \gamma$  と  $T^2/\varepsilon_0$  との関係は 図-4 のごとくで比例関係が成立していると見て差支えない。 $T^2/\varepsilon_0$  は地盤振動の加速度の逆数に比例するから、位相のずれ  $\gamma$  は地盤の振動加速度によって定る値であるといえる。

図-4 Relation between phase lag  $\gamma$  and acc of the shaking table.



以上のごとく振動摩擦現象は(7)を以て表わしてよい事がわかる。この運動方程式は原物  $p$  と模型  $m$  に共に成立するから前節同様模型と原物の長さの比を  $\alpha$ , 時間の比を  $\beta$  とすれば次の方程式が両立しなければならない。

原物に対して

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} - \epsilon_0 \rho \omega^2 \sin \omega_p t_p = \sum_m^{1,3,5,\dots} \frac{4g\mu_p}{m\pi} \sin m(\omega_p t_p - \tau_p) \dots \dots \dots (13)$$

模型に対して

$$\frac{\alpha d^2 x_p}{\beta^2 \alpha t_p^2} - \alpha \epsilon_0 \rho \frac{\omega^2 p}{\beta^2} \sin \omega_p t_p = \sum_m^{1,3,5,\dots} \frac{4g\mu_m}{m\pi} \sin m(\omega_p t_p - \tau_m) \dots \dots \dots (14)$$

両式が常に成立する為の条件は次のごとくである。

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\mu_m}{\mu_p} \quad \text{かつ} \quad \tau_p = \tau_m$$

しかるに  $\tau_p = \tau_m$  のためには振動加速度が等しくなければならない。振動加速度の比は  $\frac{\alpha}{\beta^2}$  となるから

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = 1, \mu_m = \mu_p \dots \dots \dots (15)$$

が必要な模型相似律となる。なお、原子炉内の高温度における摩擦係数の値は極端に減少することが考えられ<sup>3)</sup>, 模型における摩擦係数のとり方には十分の留意を要する。

(b) ロッキング現象における模型相似律：ロッキング現象における数理的取扱いはすでに古く、木村、飯田両氏<sup>4)</sup>によつて行われており、自由ロッキングについての実験的観察もなされている。著者はこの運動方程式がどの程度実際に成立するかをグラファイト小片を用いて、自由ロッキングおよび強制ロッキングの二つの場合につき実験してみた。

まず振動台上にグラファイト片を水平に固定し、この上に  $2 \times 2 \times 8 \text{ cm}$  の十分精密に仕上げたグラファイト角柱を立てる。この上辺中央にベイクライト小片をはり、これにエナメル線をはりつけてこれを磁石の両極間におき、エナメル線をオシログラフに直結してグラファイト角柱の自由ロッキングの速度を記録した。図-5(a)(b)はこの一例を示したものである。すなわち踊りの角度が最大るとき速度は0で、角度が小になるにつれて速度は大となり、角度が0のとき最大となつて回転の中心は他の端にうつるが、この記録ではその速度がまたそのままうつつているように見える。自由ロッキングがくり返されると、途中空気の抵抗、底版に対する仕事、音、その他によつてエネルギーは消費され、次第に振幅を小にして踊りは止ると解される。従来自由踊りの減衰については角運動量一定という条件から、回転端の移動の際に速度が不連続に減少するとして説明されているが<sup>4)5)</sup>, これには問題があるようだ。この点に関しては別にくわしく触れるつもりである。

自由ロッキングの運動方程式は次の様にと与えられる。

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{-ag}{a^2 + k^2} \sin(\alpha - \theta) \dots \dots \dots (16)$$

ここに  $a$  : 重心より回転軸に下した垂線の長さ  $k$  : 重心の廻りの回転半径

この式から任意の角度  $\theta_0$  から運動が始まり  $\theta = 0$  に至つて回転端を他に移すまでの時間  $T_0$ , その間の  $d\theta/dt$  および  $\theta$  の経過を計算する事ができる。

(16) の正しい解は楕円積分となるが適当な表がないので次のように数値積分を行つてみた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{-ag}{a^2 + k^2} \sin(\alpha - \theta) \Delta t + \hat{\theta} \\ \theta &= \frac{-ag}{a^2 + k^2} \sin(\alpha - \theta) \frac{\Delta t^2}{2} + \hat{\theta}_0 \Delta t + \theta_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

$\Delta t$  は積分の時間間隔で 0.01 sec をとつた。各時刻の  $d\theta/dt$ ,  $\theta$  はその 0.01 sec 前の  $d\theta/dt$ ,  $\theta$ , の値を用いて計算した。 $t=0$ ,  $\hat{\theta}_0=0$ ,  $\theta_0=0.1840$  および  $\theta_0=0.1230$ ,  $\theta_0=0.0615$  の三つの初期条件につき  $T_0$ ,  $d\theta/dt$ ,  $\theta$  を求めた。この結果は図-6に示すごとくである。図-6(1)は  $\theta_0$  と  $T_0$  の関係を示す。図中実験値は図-5の(a)のc点の速度記録を時間につき積分して得たものであり、計算値が大体実験値の曲線上にのつて(16)が実験と大体合うといつてもよいであろう。

図-6(2)は  $d\theta/dt$ ,  $\theta$  の経過を示したもので、初速0から出発する場合、ロッキングの角度が小さいときは速度がほとんど直線的に増大するが、ロッキングの角度が大きくなると上向きに凹の速度変化となり、また速度勾配がロッキング角度小なる程大きいという図-5に示された実験結果と、大体合致している事を示している。次に強制ロッキングの現象を記録して運動方程式による計算と比較してみた。水平振動台の一端に強いバネを連結し、

図-5(a) Velocity record of the free rocking of a graphite block.

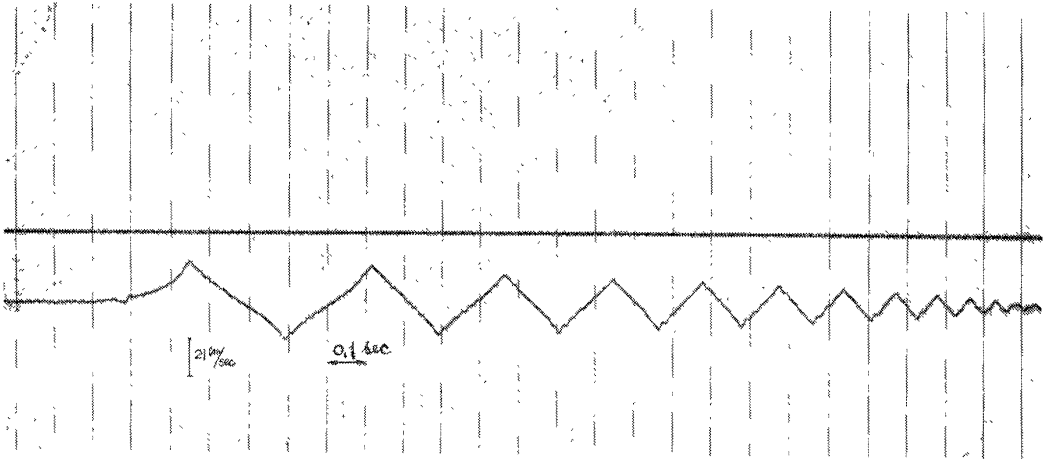
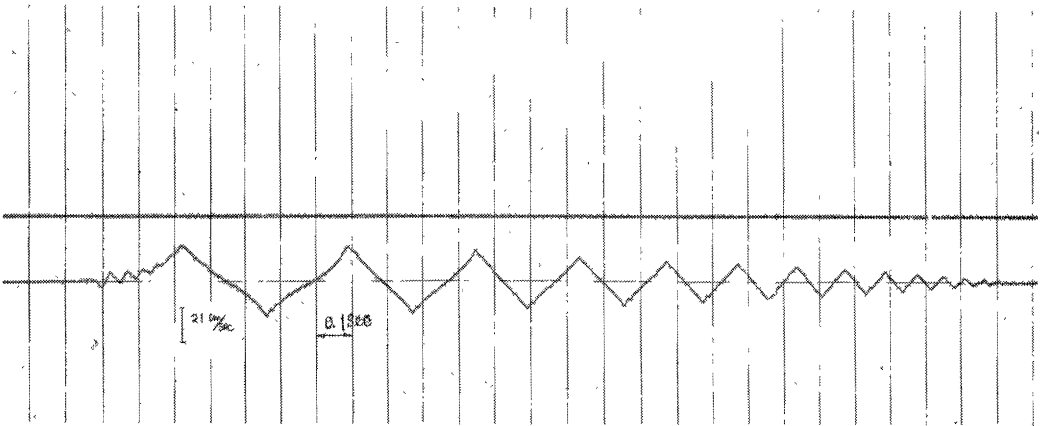


図-5(b) Velocity record of the free rocking of a graphite block.



バネの一端を固定しておき、振動台に衝撃を与えた。振動台上には水平に固定したグラファイト片をおき、その上に滑りの影響が同時に現われないように幅 2 cm、高さ 12 cm (厚さ 3 cm) に仕上げた細長いグラファイト片を立てた。振動台の動きは、前述同様に加速度計により、グラファイトの動きは同じくマグネットを用いた速度計により同時記録を行った。マグネットは振動台上に固定し、グラファイトの振動台に対する相対速度を求めた。この記録の例を 図-7 に示す。まずグラファイト片がロッキングを起こし始める条件を考えるに、重力の加速度と重心に作用する地盤振動の加速度の合力が、グラファイト片下端の端部より外部に出るときに動き出すと考えるとよいから、地盤を十分に剛なりと考えれば次式で表わす事ができる。

$$\frac{d^2 \epsilon}{dt^2} / g = \tan \alpha \quad \dots \dots \dots (18)$$

この場合  $\tan \alpha = \frac{1}{6}$  であるから、ロッキング開始の為の振動台加速度は 163 gal である。図-7 のおのおのにおいて速度計がふれはじめるすなわち振動台に対して、相対的にグラファイトが動き始めるときの振動台加速度は 163 gal にほとんどよく合致している、この条件が極めてよく満足されていることがわかる。

次に強制ロッキングの場合の運動方程式に従って 図-7 (a) の例を解いてみよう。運動の微分方程式はエネルギーの減衰を考慮しなければ次式で与えられる。

$$(a^2 + k^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -ag \sin(\alpha - \theta) + a \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} \cos(\alpha - \theta) \quad \dots \dots \dots (19)$$

この方程式の解は解析的には困難であるので数値積分によつて求めた。自由ロッキングの場合と同様に

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \theta}{dt} &= \frac{-ag}{a^2 + k^2} \sin(\alpha - \theta) \Delta t + \frac{a}{a^2 + k^2} \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} \cos(\alpha - \theta) \Delta t + \left( \frac{d \theta}{dt} \right)_0 \\ \theta &= \frac{-ag}{a^2 + k^2} \sin(\alpha - \theta) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{a}{a^2 + k^2} \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} \cos(\alpha - \theta) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \left( \frac{d \theta}{dt} \right)_0 \Delta t + \theta_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$



図-6 Results of calculation and experiments of free rocking.

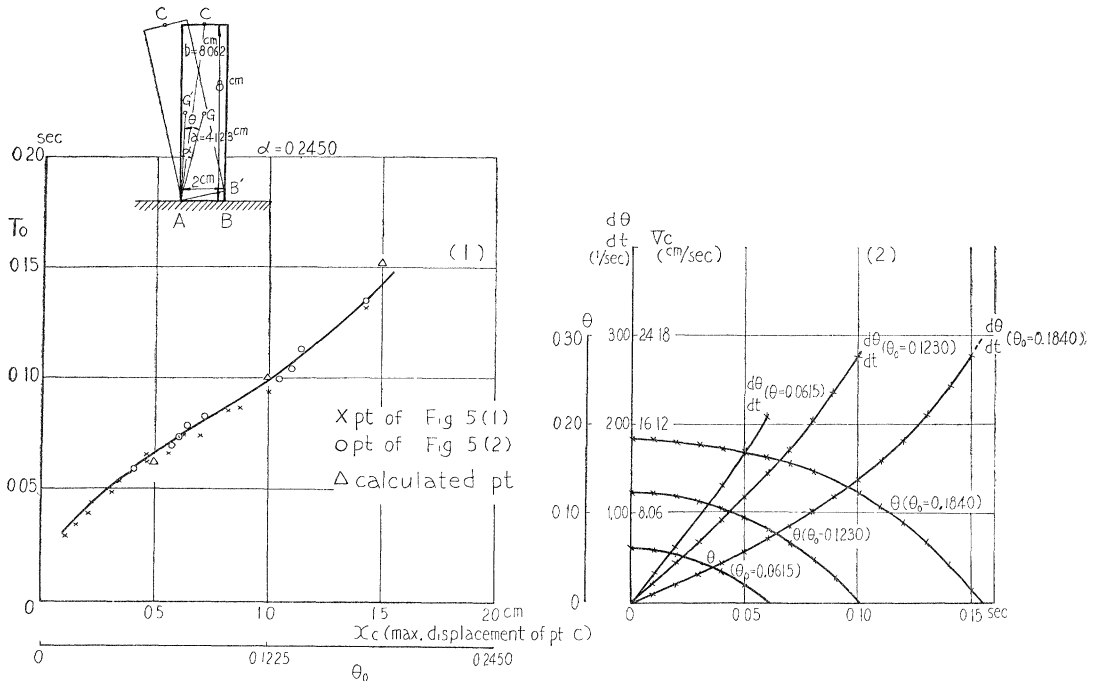


図-7(a) Record of the forced rocking of a graphite block.

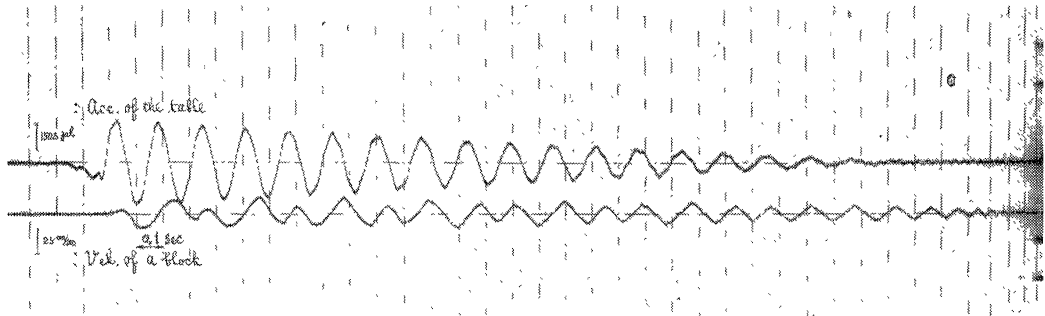
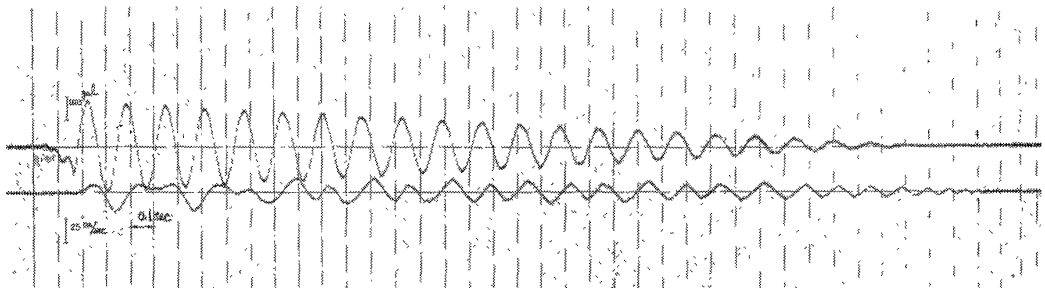
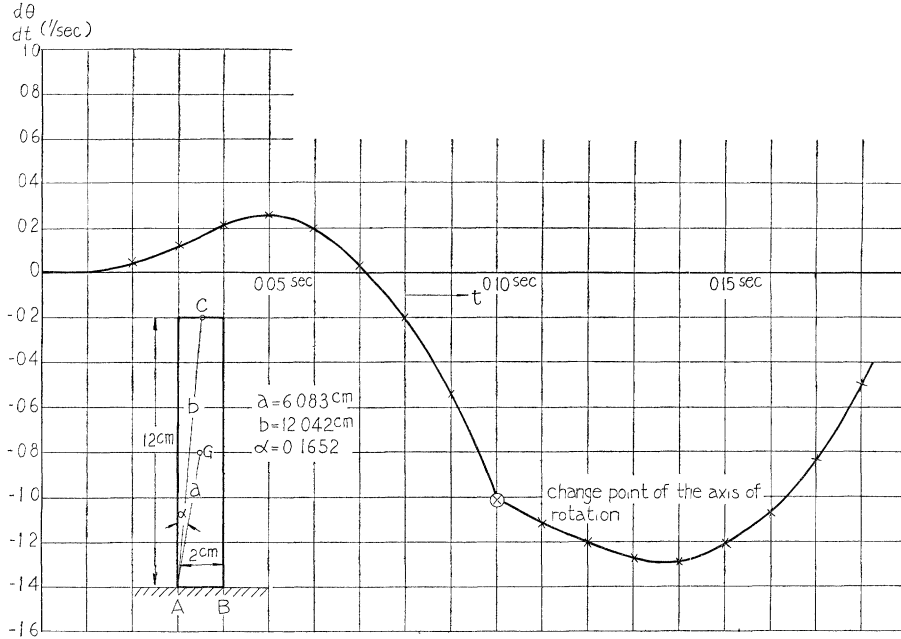


図-7(b) Record of the forced rocking of a graphite block.



により  $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$  とおき  $t = 0$ ,  $\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = 163 \text{ gal}$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ,  $\theta = 0$  の初期条件によつて逐次積分してみる。この場合、各時刻における  $\frac{d\theta}{dt}$ ,  $\theta$  を求めるのに、その  $0.01 \text{ sec}$  前の  $\frac{d\theta}{dt}$ ,  $\theta$  および  $\frac{d^2\epsilon}{dt^2}$  を用いて計算した。その結果は 図-8 のごとくで 図-7(a) の速度記録の初期の値を大体説明しているといつてよいであろう。この計算は前述したように 回転端が A から B に移るとき速度の不連続の変化は起こらないで、そのままの速度で B 端で

図-8 Calculated velocity of forced rocking.



回転するとしたものである。ここに数値積分における時間間隔のとり方、実際のロッキングにおいて生ずる各種の減衰その他によつて数値計算の値と実験とが次第に差を大きくしてゆく事はまぬがれないことであると思われるので積分を初期の値のみに止めた。

以上によりロッキング現象は減衰作用を考えない場合、(16) (19) により大体説明できるといつてよいであろう。この運動方程式において地盤の振幅、週期を比較する便宜のため  $\epsilon = \epsilon_0 \sin \omega t$  とおけば原物と模型に対するものは次のように書く事ができる。この場合  $\alpha$  および  $\theta$  は模型と原物について当然等しくなければならない。原物に対して

$$(a_p^2 + k_p^2) \frac{d^2 \theta_p}{dt^2} = -a_p g \sin(\alpha_p - \theta_p) - a_p \epsilon_0 \omega_p^2 \sin \omega_p t_p \cos(\alpha_p - \theta_p) \dots \dots \dots (21)$$

模型に対して

$$\alpha^2 (a_p^2 + k_p^2) \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 \theta_p}{dt^2} = -\alpha a_p g \sin(\alpha_p - \theta_p) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} a_p \epsilon_0 \omega_p^2 \sin \omega_p t_p \cos(\alpha_p - \theta) \dots \dots \dots (22)$$

両式が一樣に成立するための条件は

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

従つて模型相似律は

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = 1 \dots \dots \dots (23)$$

となる。

(c) 粘性減衰を伴つた弾性振動現象における模型相似律：弾性体の振動を考えるのに粘性減衰をもつ均一棒のタワミ振動を例にとつて論じてみよう。端部が振動をうける場合の方程式は一般に次のように表わされている。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + KI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3 \partial t} + \frac{\rho A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\rho A}{g} \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} \dots \dots \dots (24)$$

ここに  $E$ ：弾性常数、 $I$ ：断面慣性モーメント、 $K$ ：粘性常数、 $\rho$ ：単位体積重量、 $A$ ：断面積

いかなる形式振動であれ、上式のような理想的な減衰弾性振動の式が成立するのは、一定の限界があるのはいうまでもなく、従つてこれから求められた相似律もまたこの限界内での話である。上式のようなものの成立する限界を論ずる事は弾性や減衰の本質にふれる問題で、この小論においてよく触れる事のできる問題ではないが、微小の振動における状態が近似的に上式によつて表現され得ると前提して弾性と減衰が相似律においてどのような関係を保たねばならぬかを考えてみる。

前述同様  $\epsilon = \epsilon_0 \sin \omega t$  として原物と模型における運動方程式を書けば次のようになる。この場合生ずる変位  $y$  も長さの縮尺  $\alpha$  を満足するものとする。

原物に対して

$$E_p I_p \frac{\partial^4 y_p}{\partial x_p^4} + K_p I_p \frac{\partial^5 y_p}{\partial x_p^4 \partial t_p} + \frac{\rho_p A_p}{g} \frac{\partial^2 y_p}{\partial t_p^2} = \frac{-\rho_p A_p}{g} \epsilon_0 \omega^2 \sin \omega_p t_p \dots \dots \dots (25)$$

模型に対して

$$E_m \alpha^4 I_p \frac{1}{\alpha^3} \frac{\partial^4 y_p}{\partial x_p^4} + K_m \alpha^4 I_p \frac{1}{\alpha^3 \beta} \frac{\partial^5 y_p}{\partial x_p^4 \partial t_p} + \frac{\rho_m \alpha^4 A_p}{g} \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial^2 y_p}{\partial t_p^2} = \frac{-\rho_m \alpha^4 A_p}{g} \frac{\alpha}{\beta^2} \epsilon_0 \omega^2 \sin \omega_p t_p \dots \dots \dots (26)$$

両式が常に成立するための条件は

$$\frac{E_m}{E_p} \alpha = \frac{K_m}{K_p} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{\alpha^3}{\beta^2} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{\alpha^3}{\beta^2} \quad \therefore \frac{E_m}{E_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \frac{K_m}{K_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{\alpha^2}{\beta} \dots \dots \dots (27)$$

すなわち弾性振動における相似律は上式によつて導かれる。この場合、粘性常数に対する相似律を減衰係数の限界減衰係数に対する比  $h$  におきかえてみるに、(24)において対数減衰率は  $\frac{K}{E} \frac{2\pi^2}{T}$  で与えられるから、

$$h \doteq \frac{K}{E} \frac{\pi}{T} \quad \frac{h_m}{h_p} = \frac{K_m}{K_p} \frac{E_p}{E_m} \frac{T_p}{T_m} = 1$$

となる。 $h$  は無次元であるから模型原物について同一でなければならぬことは当然である。

(d) 総合的な模型相似律：(a), (b), (c) のすべての運動の総合した場合を考えると(15), (23), (27)の3条件が同時に成立する事を考えればよい。これは明らかに次元解析法によつて求めた結果である表-2と一致している。ただ、破壊強度については運動方程式による場合考慮されていないが、弾性常数と同次元である事から、これと同一の相似律で考えてよい事になる。ただし共振状態において破壊が起こるといふような現象は、(24)のごとき運動方程式で説明する事が無理であろうから含まないものとする。

4. 結 論

グラファイト・パイルのごとき複雑な構造物の耐震性を模型実験するとき 原物の地震によつて生ずる応力、変形、破壊、崩壊等を振動台上の模型に直ちに対応して再現する為の模型相似律は、以上のごとくしておおよそ表-2に示すごときのものであるといえよう。ただし弾性振動における共振動破壊の範囲まで再現させるには減衰についてのさらに進んだ検討が必要であろう。また、温度の条件については表-2における常数の値を定めるとき、考える原物の実際の温度におけるものを採用しなければならないことに注意しなければならない。

またグラファイト片を用いて行つた実験により、振動摩擦並びにロッキング現象は(7), (19)によつて大体説明することができるといつてよいであろうと思われる。

なお最後に地震の構造物に与える影響が地震動の速度によつて規定される範囲が広いという問題<sup>9)</sup>と、この模型相似律との関連に触れておく必要がある。著者は先に<sup>9)</sup>(24)と同様の式から、地動の一定速度がタワミ振動による棒の一定応力を生ずる条件になることを導いた。角柱の振動による転倒についても、(19)を各種の場合につき根気よく積分することにより、著者が実験的に求めた地震動速度が転倒の要素となることが導かれると考えられる。すなわち運動方程式は地震動の速度、加速度が地震の強さの要素であるという両方の立場を包括して説明していると考えてよいから、これから求めた相似律も両者の立場を包括しているとしてよいであろう。

最後に本実験にあたり測定上種々協力を戴いた当所工作場長 森 照茂氏に対し、厚く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) P.W. Bridgman: Dimensional Analysis
- 2) 松平 精: 基礎振動学
- 3) S.W. Glass: The Measurement of the Functional Characteristics of Brushes,—Iron and steel Engineers (July 1937)
- 4) 木村 準, 飯田汲事: 角柱の踊りに就て (1)(2), (地震第6巻, 第3号, 第4号)
- 5) 坪井忠二: 振動論
- 6) 著者: 構造物に影響を与える地震の強さについて, 土木学会論文集第6号