

摩擦性塑性体のり線の幾何学

正 員 山 口 柏 樹*

GEOMETRIES RELATED TO THE SLIP LINES IN THE PLASTIC MATERIAL WITH FRICTIONAL RESISTANCE

By Hakuju Yamaguchi, C.E. Member

Synopsis: In the present paper, the geometrical properties of the slip lines in the plastic material with frictional resistance, especially the relations among the lengths measured along each side of a small element composed of slip lines are studied. The results herein obtained will be useful for getting the numerical solutions of modified Kötter's equations.

Prandtl's theorem is also presented in the modified form together with the discussions on both equi-pressure theorem and Mikhlin's coordinates.

要 旨 本論文では摩擦性塑性体のり線の幾何学的性質、特にり線で囲まれる微小要素の辺長間の関係を調べたが、これは拡張された Kötter の方程式の数値解法上有効なものとなる。

なお Prandtl の定理の修正された形を求め、あわせて等圧定理、Mikhlin の座標の考察を行った。

1. 序 論

前論文¹⁾で、土のような摩擦抵抗並びに自重を無視できぬ材料の塑性平面ヒズミ問題では、塑性場を特徴づけるり線模様を組み立てには、差分的数値解法がほとんど唯一の方法であることを指摘した。すなわち図-1に示すり線要素について拡張せる Kötter の方程式の差分表示は

$$\left. \begin{aligned} \text{i)} \quad & \tau_B - \tau_A - (\tau_B + \tau_A)(\theta_B - \theta_A)\mu = r ds_1 \sin \phi \sin \left(\frac{\theta_B + \theta_A}{2} - \phi \right) \\ \text{ii)} \quad & \tau_C - \tau_D - (\tau_C + \tau_D)(\theta_C - \theta_D)\mu = r ds_1' \sin \phi \sin \left(\frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \phi \right) \\ \text{iii)} \quad & \tau_D - \tau_A + (\tau_D - \tau_A)(\theta_D - \theta_A)\mu = r ds_2 \sin \phi \cos \frac{\theta_D + \theta_A}{2} \\ \text{iv)} \quad & \tau_C - \tau_B + (\tau_C + \tau_B)(\theta_C - \theta_B)\mu = r ds_2' \sin \phi \cos \frac{\theta_C + \theta_B}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.1)^{1)}$$

$$\mu = \tan \phi$$

ここで τ はり線上の合せん断応力(粘着力も含めたもので $\tau = c + \sigma\mu$)で、 θ は s_1 り線が x 軸となす角(反時計回り方向)で、 ϕ は土のせん断抵抗角であり、 r は土の有効単位重量である。

り線場の組み立てにおいて、各点の τ と θ の両者を求めねばならない。この時 (A) 例えば AB と AD が、その上の θ と共に与えられれば、 τ_C と θ_C は前式 ii), iv) を連立して解けばよい (Riemann の問題または特性初期問題)、(B) り線でない線分、例えば BD 上の τ または θ が与えられれば (この時 BD 上の θ または τ が既知となる) 同じく ii), iv) から τ_C と θ_C が求められる (Cauchy の問題)、(C) AB と一曲線例えば AC 上の θ が与えられた時 iv) から θ_C が求まる (混合境界値問題) に分類されることは明らかである。例えば AB 上での τ , θ が知られていても ii), iii), iv) から C, D に関する 4 コの未知量は決定し得ないが、これはり線(すなわち特性曲線)の本質上当然のことである。

金属の塑性論においては、(1.1) の右辺が 0 であるので問題はないが、今の場合 (A) について云うと ds_1' , ds_2' そのものも未知であることが差分解を複雑ならしめる。このためには、 ds_1' , ds_2' を他の量であらかじめ表示しておかねばならない。換言すれば、差分解を遂行するための準備として、特にり線の幾何学的性質を多少明らかにせねばならない。本論文においては、これらの関係のほか、金属の塑性論で知られている Prandtl の定

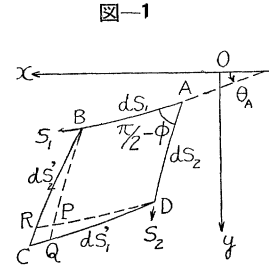
* 中央大学助教授、工学部土木工学科

理, Mises の定理, Mikhlin の座標がいかに書き替えられるかを調べて見たい。

2. 斜交曲線群の線素長

二次元塑性場では二組のり線が互いに $\pi/2 \pm \phi$ の角度で交叉する斜交曲線網目を形成することは周知である。ただし二本以上のり線が集中するような応力特異点は除外する。この時まず、図-1 の ds_1', ds_2' を既知量 ds_1, ds_2 および θ で表示しよう。ベクトルのに $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$ であるからこれを xy 成分に分解すると、

$$\left. \begin{aligned} ds_1 \cos \frac{\theta_A + \theta_B}{2} - ds_2' \sin \left(\frac{\theta_B + \theta_C}{2} - \phi \right) \\ = ds_1' \cos \frac{\theta_C + \theta_D}{2} - ds_2 \sin \left(\frac{\theta_A + \theta_D}{2} - \phi \right) \\ ds_1 \sin \frac{\theta_A + \theta_B}{2} + ds_2' \cos \left(\frac{\theta_B + \theta_C}{2} - \phi \right) \\ = ds_1' \sin \frac{\theta_C + \theta_D}{2} + ds_2 \cos \left(\frac{\theta_A + \theta_D}{2} - \phi \right) \end{aligned} \right\}$$



であるから、 ds_1', ds_2' について解けば

$$\left. \begin{aligned} ds_1' &= \frac{ds_1 \cos \left(\frac{\theta_A - \theta_C}{2} + \phi \right) + ds_2 \sin \left(\frac{\theta_A + \theta_D}{2} - \frac{\theta_B + \theta_C}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta_B - \theta_D}{2} - \phi \right)} \\ ds_2' &= \frac{ds_1 \sin \left(\frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \right) + ds_2 \cos \left(\frac{\theta_A - \theta_C}{2} - \phi \right)}{\cos \left(\frac{\theta_B - \theta_D}{2} - \phi \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.1)$$

上式で微小り線要素を考える限り、 $|\theta_A - \theta_C|/2, |\theta_B - \theta_D|/2 \ll \phi, |(\theta_A + \theta_D)/2 - (\theta_B + \theta_C)/2|, |(\theta_A + \theta_B)/2 - (\theta_C + \theta_D)/2| \ll 1$ として、

$$\left. \begin{aligned} ds_1' &= ds_1 + \left(\frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \right) \tan \phi ds_1 + \left(\frac{\theta_A + \theta_D}{2} - \frac{\theta_B + \theta_C}{2} \right) \frac{ds_2}{\cos \phi} + 0(\epsilon^3) \\ ds_2' &= ds_2 + \left(\frac{\theta_A + \theta_D}{2} - \frac{\theta_B + \theta_C}{2} \right) \tan \phi ds_2 + \left(\frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \right) \frac{ds_1}{\cos \phi} + 0(\epsilon^3) \end{aligned} \right\} (2.2)$$

が得られる。これが Riemann 問題に対する所求の関係で、(2.2) を (1.1) の ii), iv) に持ち込めば、これらは τ_C, θ_C に関する連立一次方程式になるから解は容易に得られよう。

自重が無視できる場合は、Hencky の定理が行われる¹⁾ から

$$\theta_B - \theta_A = \theta_C - \theta_D = d\theta_1, \quad \theta_D - \theta_A = \theta_C - \theta_B = d\theta_2 \dots \dots \dots (2.3)^*$$

として (2.2) は

$$\left. \begin{aligned} ds_1' &= ds_1 (1 + d\theta_2 \tan \phi) - \frac{d\theta_1}{\cos \phi} ds_2 + 0(\epsilon^3) \\ ds_2' &= ds_2 (1 - d\theta_1 \tan \phi) + \frac{d\theta_2}{\cos \phi} ds_1 + 0(\epsilon^3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.4)$$

さらに $\phi = 0$ であれば上式は

$$ds_1' = ds_1 - d\theta_1 ds_2, \quad ds_2' = ds_2 + d\theta_2 ds_1$$

に帰する (Prandtl)。

(2.2) の右辺各項の幾何学的意味を調べると次のごとくである。今 B, D よりそれぞれ AD, AB に平行なる曲線々素を引いて交点 P, Q, R をつくる (図-1) と、 DQ が (2.2) の第一式の右辺 ds_1 の項を、 CQ が ds_2 の項を表わす。 BP, RC についても同様である。

以上述べたことは小さい角 ($\pi/2 - \phi$) をはさむ二辺長が与えられるとした場合であるが、大きい角をはさむ二辺長が既知であれば、図-1 で AB, BC が与えられたものとして、(2.2) (2.4) に応じ

* Hencky Net では例えば θ_1 は s_2 り線が基準となる s_1 り線を切る点での θ と考えてよいから θ_1 は一つの s_2 り線に沿って一定である (θ_2 も同様)。すなわち θ_1, θ_2 は網目の座標に関するパラメータ (独立変数) と見なしてよい。

$$\left. \begin{aligned} ds_1' &= ds_1 + \left(\frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \right) \tan \phi \cdot ds_1 + \left(\frac{\theta_A + \theta_D}{2} - \frac{\theta_B + \theta_C}{2} \right) \frac{ds_2'}{\cos \phi} + O(\varepsilon^3) \\ ds_2 &= ds_2' - \left(\frac{\theta_A + \theta_D}{2} - \frac{\theta_B + \theta_C}{2} \right) \tan \phi \cdot ds_2' - \left(\frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \right) \frac{ds_1}{\cos \phi} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.5)$$

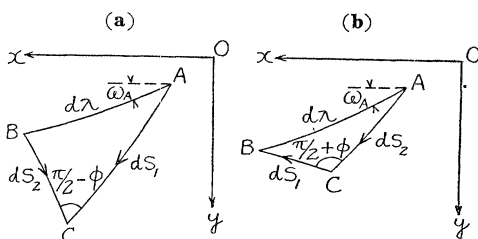
$$\left. \begin{aligned} ds_1' &= ds_1(1 + d\theta_2 \tan \phi) - \frac{d\theta_1}{\cos \phi} ds_2' + O(\varepsilon^3) \\ ds_2 &= ds_2'(1 + d\theta_1 \tan \phi) - \frac{d\theta_2}{\cos \phi} ds_1 + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

が得られる。

次に図-2で AB は与えられた境界線素 (迂り線とは一致しないものとする) とし, θ と同じ意味でその偏角を ω とする。ただし ds_1, ds_2 は正の向きを角 C の大小に応じて矢の向きとするが, AB はその方向を指定しない代り, 常に $|\omega| \leq \pi/2$ とする (例えば AB が右下りであれば ω は時計回りに測つた角の負値とする)。

この時, 前と同様の取扱いにより, 図-2 の (a) (b) 場合に依りて

図-2



$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= \frac{d\lambda}{\cos\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2} + \phi\right)} \left[\cos\left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} + \phi - \theta_B\right) + \frac{\theta_C - \theta_B}{2} \sin\left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} + \phi - \theta_B\right) \right] \\ ds_2 &= \frac{d\lambda}{\cos\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2} + \phi\right)} \left[\sin\left(\theta_A - \frac{\omega_A + \omega_B}{2}\right) + \frac{\theta_C - \theta_A}{2} \cos\left(\theta_A - \frac{\omega_A + \omega_B}{2}\right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= \frac{d\lambda}{\cos\left(\frac{\theta_B - \theta_A}{2} + \phi\right)} \left[\cos\left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} + \phi - \theta_A\right) + \frac{\theta_C - \theta_A}{2} \sin\left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} + \phi - \theta_A\right) \right] \\ ds_2 &= \frac{d\lambda}{\cos\left(\frac{\theta_B - \theta_A}{2} + \phi\right)} \left[\sin\left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} - \theta_B\right) + \frac{\theta_B - \theta_C}{2} \cos\left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} - \theta_B\right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.8)$$

となる。ここで $O(\varepsilon^3)$ は省略した。

(2.7) または (2.8) と (1.1) の ii), iv) 式によつて, Cauchy の問題の差分解は, 容易に行われる。

迂り線の正の向きに対する, われわれの約束は相対的のものであるから, 図-2 と逆向きに矢印を付けてもよい (このとき, 前二式の右辺には負号が付く)。また図では境界より右下方に, 塑性域を組み立てる場合を示したが, 左上方へ組み立てる場合は, AB に関する C の鏡像の対応点を C' とし, 上二式で $C'B = ds_1, C'D = ds_2$ と書き替えた上, θ の脚符について $A \Rightarrow B$ の置き換えを行えばよい (ただし s の正の向きは C' より測る)。

混合型境界値問題については, 一般に上の二つの場合に本質的に含まれてしまう。

次に簡単な二, 三の例を示そう。

1) 放射線と対数螺旋から組み立てられる網目

$$r = ae^{\theta \tan \phi}$$

なる対数螺旋と放射動径は $\pi/2 - \phi$ で交叉する Hencky Net であるので, 図-1 で $AB = ds_1 = dr, AD = r \cdot d\theta / \cos \phi, d\theta_2 = d\theta, d\theta_1 = 0$ とし, (2.4) より

$$ds_1' = dr + r d\theta \tan \phi, \quad ds_2' = \frac{r d\theta + dr d\theta}{\cos \phi}$$

これは解析的に得られる結果と一致する。

2) $\phi \neq 0, r = 0$ である塑性域内で, 一つの迂り線簇が直線である時, 他の迂り線簇の形を決定すること
求める迂り線場は Hencky Net である。

s_1 簇が直線であるとし, これらは平行ではないとする (平行なれば Rankine 域である)。隣接する二本の s_1 迂り線の交点を O_1 とし, O_1 より迂り線に沿つて測つた動径長を r とすると (2.4) で $d\theta_1 = 0, d\theta_2 = d\theta$ とし

$$ds_1' = ds_2(1 + d\theta \tan \phi), \quad ds_2' = ds_2 + \frac{d\theta}{\cos \phi} ds_1$$

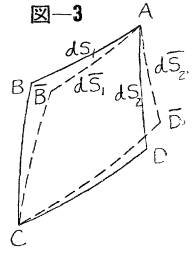
明らかに、 $ds_1=dr$ 、 $ds_2=r d\theta/\cos\phi$ 、 $ds_2'=(r+dr)d\theta/\cos\phi$ であるから、 $ds_1'=dr+d(dr/d\theta)d\theta$ と共に前式へ入れると

$$d\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)=drd\theta\tan\phi \quad \therefore r=ae^{\theta\tan\phi}$$

が得られる。ここで a は、前の交点 O_1 の位置によるが、全ての s_1 じり線が同一点 O_1 に集まれば、 a は共通数となつて s_1 じり線は対数螺旋となる。もし相隣る s_1 じり線が一点に集まらない時は、個々の微小偏角区内で、それぞれ異なる対数螺旋が連続的に連つて s_2 じり線が構成される。

3) 不正なじり線により求めた応力誤差の構造

標準的な一例として、図-3 を考えよう。C 点の応力を A 点の応力で表わすには、正しいじり線 ABC または ADC に沿つて Kötter の式を積分するか、差分式を解けばよいが、 ABC 、 ADC が未知として、これを近似じり線 \bar{ABC} 、 \bar{ADC} によつて行つたとする。この場合 (1.1) が近似的に成り立つとして i) iv), ii) iii) の二組から $\bar{\tau}_C$ を求めると



$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_C &= \tau_A \left\{ 1 + 2\mu \left(2\bar{\theta}_B - \bar{\theta}_A - \bar{\theta}_C \right) \right\} + r \sin\phi \left(\frac{\bar{\theta}_B + \bar{\theta}_A}{2} - \phi \right) d\bar{s}_1 + r \cos\frac{\bar{\theta}_B + \bar{\theta}_C}{2} d\bar{s}_2' \\ \bar{\tau}_C &= \tau_A \left\{ 1 + 2\mu \left(\bar{\theta}_C + \bar{\theta}_A - 2\bar{\theta}_D \right) \right\} + r \sin\phi \left(\frac{\bar{\theta}_C + \bar{\theta}_D}{2} - \phi \right) d\bar{s}_1' + r \cos\frac{\bar{\theta}_D + \bar{\theta}_A}{2} d\bar{s}_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots i)$$

(2.2) より $d\bar{s}$ を ds で表わした式は

$$\left. \begin{aligned} d\bar{s}_1 &= ds_1 \left(1 + \frac{\mu}{2} \frac{\bar{\theta}_B - \theta_B + \bar{\theta}_A - \theta_A}{\cos\phi} \right) + \frac{ds_2'}{\cos\phi} \frac{\bar{\theta}_B - \theta_B + \bar{\theta}_C - \theta_C}{2} \\ d\bar{s}_2 &= ds_2' \left(1 + \mu \frac{\theta_B - \bar{\theta}_B + \theta_C - \bar{\theta}_C}{2} \right) + \frac{ds_1}{\cos\phi} \frac{\theta_B - \bar{\theta}_B + \theta_A - \bar{\theta}_A}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ii)$$

以下 $(\bar{\theta} - \theta)/2 = \epsilon$ のごとく記せば、例えば

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\bar{\theta}_A + \bar{\theta}_B}{2} - \phi\right) &\doteq \sin\left(\frac{\theta_B + \theta_A}{2} - \phi\right) + (\epsilon_A + \epsilon_B) \cos\left(\frac{\theta_B + \theta_A}{2} - \phi\right) \\ \cos\frac{\bar{\theta}_B + \bar{\theta}_C}{2} &\doteq \cos\frac{\theta_B + \theta_C}{2} - (\epsilon_B + \epsilon_C) \sin\frac{\theta_B + \theta_C}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots iii)$$

のごとくなるから、i) ~ ii), iii) を代入した式を計算し、これらより正しい τ_C (これは i) で $\bar{\theta} \rightarrow \theta$ 、 $d\bar{s} \rightarrow ds$ としたもので求められる) を減ずれば、左周り右周りの場合の C 点の応力誤差として

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_C - \tau(\text{左周り}) &= 2\tau_A \mu (2\epsilon_B - \epsilon_A - \epsilon_C) \\ &\quad + 2r\mu \left[(\epsilon_A + \epsilon_B) \sin\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2} - \phi\right) ds_1 - (\epsilon_B + \epsilon_C) \cos\frac{\theta_C + \theta_B}{2} ds_2' \right] \\ \bar{\tau}_C - \tau(\text{右周り}) &= 2\tau_A \mu (\epsilon_C + \epsilon_A - 2\epsilon_D) \\ &\quad + 2r\mu \left[(\epsilon_C + \epsilon_D) \sin\left(\frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \phi\right) ds_1' - (\epsilon_D + \epsilon_A) \cos\frac{\theta_D + \theta_A}{2} ds_2 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.9)$$

が得られる。これが求める誤差構造式であるが、微小要素について見れば、偏角誤差 ϵ の一次形式である。上式右辺で $\theta \rightarrow \bar{\theta}$ 、 $ds \rightarrow d\bar{s}$ としても誤差の大略の表示式としては、使用可能であるが、実際の誤差の見積りには ϵ そのものを知らねばならない。しかしなんらかの方法で ϵ の最大限が推定できれば、(2.9) は誤差の限界を見極める手段となる。有限領域についても、本方法によれば、ある程度の誤差の推定がなし得てであろう*。

3. 斜交じり線場が, Hencky Net である条件

砂質土のごとく、 $r, \phi \neq 0$ である材料のじり線場においては、次の条件式が別にじり線間に課せられる時のみ Hencky Net となる¹⁾。すなわち 図-1 について

$$\left. \begin{aligned} ds_1(1 - d\theta_2 \tan\phi) \sin\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2} - \phi\right) + ds_2'(1 - d\theta_1 \tan\phi) \cos\frac{\theta_C + \theta_B}{2} \\ = ds_1'(1 + d\theta_2 \tan\phi) \sin\left(\frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \phi\right) + ds_2(1 + d\theta_1 \tan\phi) \cos\frac{\theta_D + \theta_A}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1)$$

* 壁面土圧について近似対数螺旋による土圧誤差について見ると、実誤差 13% に対し、評価誤差は 10% 程度であることがわかる。

を用いて前 4 式の θ を α, β など置き替え, さらに

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2\alpha'} \doteq 2 \quad \frac{\beta + \beta'}{2\alpha'} \doteq \frac{\beta}{\alpha} \quad \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha} \doteq \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha^2}$$

のごとき近似を用いると, $R' = R + dR$ であるから容易に

$$dR_1 = ds_1(\alpha - \alpha')/\alpha^2 + \tan \phi \cdot \beta ds_1/\alpha - ds_2/\cos \phi$$

$$dR_2 = ds_2(\beta' - \beta)/\beta^2 + \tan \phi \cdot \alpha ds_2/\beta - ds_1/\cos \phi$$

が得られ, さらに

$$\beta ds_1/\alpha = -R_1 ds_2/R_2, \quad ds_1(\alpha - \alpha')/\alpha^2 = -R_1^2 ds_2 \partial^2 \theta / \partial s_1 \partial s_2$$

などを考えると前式は

$$\left. \begin{aligned} s_2 \text{ に沿つて} \quad dR_1 &= - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial s_1 \partial s_2} R_1^2 + \tan \phi \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{\cos \phi} \right) ds_2 \\ s_1 \text{ に沿つて} \quad dR_2 &= - \left(- \frac{\partial^2 \theta}{\partial s_1 \partial s_2} R_2^2 + \tan \phi \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\cos \phi} \right) ds_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.2)$$

となる。これは $\phi \neq 0$ の時の Prandtl の定理の拡張された形式であつて, $\phi = 0$ であれば $\partial^2 \theta / \partial s_1 \partial s_2 \equiv 0$ (Hencky Net) であるから (4.1) と共に (4.2) は Prandtl の式 (2. 参照) に帰することは明白である。

もし $r = 0$ であれば, ϕ の有無にかかわらず $\partial^2 \theta / \partial s_1 \partial s_2 = 0$ であるから, (4.2) は (4.1) を用いて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} s_1 \text{ に沿つて: } dR_2 &= - \left(\frac{R_2}{R_1} \tan \phi + \frac{1}{\cos \phi} \right) ds_1 = - \left(R_2 \tan \phi + \frac{R_1}{\cos \phi} \right) d\theta_1 \\ s_2 \text{ に沿つて: } dR_1 &= - \left(\frac{R_1}{R_2} \tan \phi + \frac{1}{\cos \phi} \right) ds_2 = \left(R_1 \tan \phi + \frac{R_2}{\cos \phi} \right) d\theta_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.3)$$

$d\theta_1, d\theta_2$ は (2.3) の意味で, 座標の独立変数 θ_1, θ_2 の微分とすれば, 上式から

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} + \mu \left(- \frac{\partial R}{\partial \theta_1} + \frac{\partial R}{\partial \theta_2} \right) + R = 0 \quad (R \equiv R_1, R_2) \dots \dots \dots (4.4)$$

これは曲率半径に関する双曲型の偏微分方程式で, 減衰性を考えた電信方程式にほかならない。したがつて境界の一部で R_1, R_2 が指定される時は, Riemann の積分法が利用できよう²⁾。

通常は境界で応力成分が与えられるが, 降伏条件を用いれば, 境界での θ_0 と応力 (例えば τ) は既知量となる¹⁾。この時境界での R_1, R_2 を求める式を導こう。境界の傾きを ω (図-2 参照) とし, 境界線方向に距離 s を測ると

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\cos \phi} \left[\cos(\theta_0 - \omega - \phi) \frac{\partial}{\partial s_1} - \sin(\theta_0 - \omega) \frac{\partial}{\partial s_2} \right]$$

よつて $\partial \tau / \partial s, \partial \theta_0 / \partial s$ をつくり前者に対しては Kötter の式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial s_1} - 2\mu\tau \frac{\partial \theta}{\partial s_1} &= r \sin \phi \sin(\theta - \phi) \\ \frac{\partial \tau}{\partial s_2} + 2\mu\tau \frac{\partial \theta}{\partial s_2} &= r \sin \phi \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

を用い, (4.1) を考えるならば

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi \frac{\partial \tau}{\partial s} &= 2\mu\tau \left[\frac{\cos(\theta_0 - \omega - \phi)}{R_1} - \frac{\sin(\theta_0 - \omega)}{R_2} \right] + r \sin \phi \left[\cos(\theta_0 - \omega - \phi) \sin(\theta_0 - \phi) - \sin(\theta_0 - \omega) \cos \theta_0 \right] \\ \cos \phi \frac{\partial \theta_0}{\partial s} &= \frac{\cos(\theta_0 - \omega - \phi)}{R_1} + \frac{\sin(\theta_0 - \omega)}{R_2} \end{aligned} \right\}$$

これより R_1, R_2 を求めて

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{4\mu\tau \cos(\theta_0 - \omega - \phi)} \left[\cos \phi \frac{\partial \tau}{\partial s} + 2\tau \sin \phi \frac{\partial \theta_0}{\partial s} - r \sin \phi \left\{ \cos(\theta_0 - \omega - \phi) \sin(\theta_0 - \phi) - \cos \theta_0 \sin(\theta_0 - \omega) \right\} \right] \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{4\mu\tau \sin(\theta_0 - \omega)} \left[-\cos \phi \frac{\partial \tau}{\partial s} + 2\tau \sin \phi \frac{\partial \theta_0}{\partial s} + r \sin \phi \left\{ \cos(\theta_0 - \omega - \phi) \sin(\theta_0 - \phi) - \cos \theta_0 \sin(\theta_0 - \omega) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.5)$$

前述の通り境界上で $\partial \tau / \partial s, \partial \theta_0 / \partial s$ は既知であるから (4.5) が, そこでの曲率を与える式となる。

$\phi = 0$ である時は Kötter の式で $2\mu\tau \rightarrow 2c, r \sin \phi \rightarrow r, \phi \rightarrow 0, \tau \rightarrow \sigma_m$ (平均圧力) としたものから出発し (4.5)

の代りに次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{2c \cos(\theta_0 - \omega)} \left[\frac{\partial}{\partial s} (\sigma_m + 2c \theta_0) - r \sin \omega \right] \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{2c \sin(\theta_0 - \omega)} \left[\frac{\partial}{\partial s} (-\sigma_m + 2c \theta_0) + r \sin \omega \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.6)$$

なお (4.3) を用いて、網目の近似作図法が可能である (差分解の要領は 6. で述べる)。Riemann 型の問題についてその方法を示すと、今 図-5 で AB, AD が指定され (簡単のため頂角が $\pi/2 - \phi$ とし特異性はないものとする) た時 C の位置を求めるには、まず

$$1/R_1 = (\theta_B - \theta_A) / ds_1, \quad ds_1 = \overline{AB}$$

などにより R_1, R_2 を求め、B, D でそれぞれ ds_1, ds_2 と $\pi/2 + \phi$ で交わる二線分 t_2, t_1 を引く。次に D, B で t_1, t_2 に垂線を立て、その上に R_1, R_2 の存在する方向へ

$$\begin{aligned} O_1 D &= R_1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \tan \phi + \frac{1}{\cos \phi} \right) ds_2, \\ O_2 B &= R_2 - \left(\frac{R_2}{R_1} \tan \phi + \frac{1}{\cos \phi} \right) ds_1 \end{aligned}$$

を測つて O_1, O_2 を定める。そうすれば O_1, O_2 を中心とする半径 $O_1 D, O_2 B$ の二円の交点 C が求めるものとなる。

周知のごとく、Prandtl の定理は Hencky の定理と共に、迂り線場の作図上有用な手段となつてゐるが²⁾ 拡張された (4.2) は、この意味ではあまり効用がない。しかし応力場の不連続を論ずる際には利用できる。

図-6 に曲率半径の正負による要素の基本形を分類的に示した。

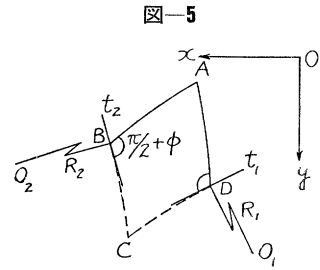


図-5

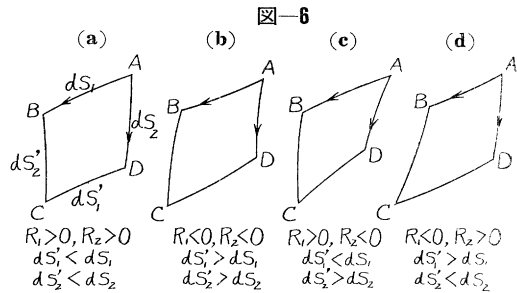


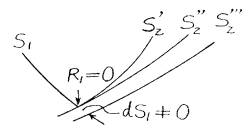
図-6

5. 迂り線が包絡線をもつ場合

斜交 Hencky Net ($r=0$) で、迂り線に急な折れ曲りがない領域を考える。この時 R_1, R_2 が同符号であつて、かつ一組の相隣る二本の迂り線が合流すれば、他の同簇の迂り線も切触的に合流し、これらは包絡線⁴⁾ (いわゆる自然境界) を形成する。なお R_1, R_2 が共に正であれば包絡線は s_1 または s_2 の増大する側に現われ、共に負であれば減少する側に生ずる。

証明は次の通り。今 R_1, R_2 とも正の時 (4.3) の第二式で $ds_2 > 0$ ならば $dR_1 < 0$ であつて、 $ds_2 \neq 0$ なる限り s_2 の増すにつれ、 R_1 は漸次小さくなりやがて $R_1 \rightarrow 0$ となる。 $R_1, R_2 < 0$ である時 $ds_2 > 0$ ならやはり $dR_1 < 0$ となるが、 R_1 は負であるから $|R_1 + dR_1| > |R_1|$ すなわち $|R_1(s_2 + ds_2)| > |R_1(s_2)|$ ($ds_2 > 0$) となつて、 R_1 は s_2 の減少するにつれて小さくなる。さて $R_1 = 0$ であれば (4.1) より $ds_1 = 0$ 、すなわち s_2 迂り線が切触的に合流を行つて、 s_1 迂り線はその合流点を超えられない (図-7 参照)。以上では、相隣る二本の迂り線 (s_2', s_2'') のみを考えたが、これらに隣接する s_2 迂り線 (s_2''') も実は始めの合流線に、さらに合流することが次のようにして知られる。 s_2''' が s_2', s_2'' の合流線に合流しないとすると、始めの s_2', s_2'' の合流点と s_2''' 間の最短距離は 0 でない。よつて合流点から s_2''' へ至る有限長の s_1 迂り線が存在するはずであるが、これは前述の延長不能 ($ds_1 = 0$) の事実と矛盾する。したがつて s_2''' も合流することとなりこれらは包絡線を形成することが知られる。

図-7



一般の場合 ($\partial^2 \theta / \partial s_1 \partial s_2 \neq 0$) にも、 $\partial^2 \theta / \partial s_1 \partial s_2 > 0$ の場では、(4.2) の第一式より、同符号の R_1, R_2 に対し $dR_1 \rightarrow 0$ ($\therefore ds_1 \rightarrow 0$) で s_2 迂り線簇が包絡線を形成し得る。 $\partial^2 \theta / \partial s_1 \partial s_2 < 0$ の場では (4.2) の第二式より s_1 簇が包絡線をつくる。これらの例としては、壁面土圧問題の過渡域迂り線場があげられ、主動の時 s_2 が包絡線 (壁面) を構成し、粗度が正なる時は R_1, R_2 とも負、粗度が負の場合は、 R_1, R_2 とも正に対応している。同様 s_1 簇が包絡線となるのは、受働過渡域で現われる (図-6 参照)。

5. 斜交 Hencky Net での等角網目

完全塑性体では汙り線が等角的に組み立てられる時、網目の一方の対角線上で圧力 p が一定、他方の対角線上では θ が一定である (von Mises)⁴⁾。この性質は斜交 Hencky Net でも成り立つが圧力の表示式は修正される。

要素が 図-6 の (a) 型であるものと考え、一定の偏角 $\Delta\theta (>0)$ に対し、 $\theta_B > \theta_A$, $\theta_C > \theta_D$, $\theta_A > \theta_D$, $\theta_B > \theta_C$ であるから

$$\theta_B - \theta_A = \theta_C - \theta_D = -(\theta_C - \theta_B) = -(\theta_D - \theta_A) = \Delta\theta$$

これを (1.1) に用い、今の場合 $r=0$ であるから

$$\left. \begin{aligned} \tau_B - \tau_A - (\tau_B + \tau_A)\mu\Delta\theta &= 0 \\ \tau_C - \tau_D - (\tau_C + \tau_D)\mu\Delta\theta &= 0 \\ \tau_C - \tau_B - (\tau_C + \tau_B)\mu\Delta\theta &= 0 \\ \tau_D - \tau_A - (\tau_D + \tau_A)\mu\Delta\theta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

これより
$$\tau_B = \tau_D = \frac{\tau_C + \tau_A}{2} \frac{1 - (\mu\Delta\theta)^2}{1 + (\mu\Delta\theta)^2} = \frac{\tau_C + \tau_A}{2} \{1 - 2(\mu\Delta\theta)^2\} \dots\dots\dots (5.1)$$

すなわち対角線 BD は τ に関し等圧線となり、前式へ $\tau_B = \tau_D$ の関係を用いると

$$\theta_A = \theta_C = \frac{\theta_B + \theta_D}{2} \dots\dots\dots (5.2)$$

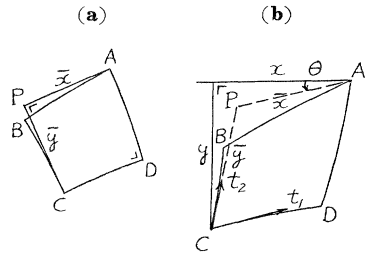
で、 AC が等傾線となる。このことは 図-6 の (b) 型についても云えるが、(c) (d) 型について同様な吟味を行うと逆に AC 対角線が等圧線、 BD 対角線が等傾線となる。

Hencky Net でない時は、もちろん上の式は成り立たないが、齊次一般解に対する応力 (サーチャージによるもの) は、近似的に (5.1) のごとく表わせるとみてよいと思われる。

6. Mikhlin の座標の拡張

直交曲線座標について Mikhlin が導入した座標⁴⁾ は 図-8 (a) に示すごとく、頂点 C における BC の切線へ、 A より下した垂線の足 P に関し、 $AP = \bar{x}$, $CP = \bar{y}$ とするものである。

図-8



斜交曲線網目について、Mikhlin の座標に対応するものを新たに次のごとく定義しよう。今 C で、 BC , CD に引いた二切線を t_2 , t_1 とし、 A より t_1 に平行に引いた線と t_2 との交点を P とする時

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} = AP \\ \bar{y} = CP \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.1)$$

従来の意味の座標 (x, y) と新しい (\bar{x}, \bar{y}) の間は

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} \cos \phi &= x \cos (\theta - \phi) + y \sin (\theta - \phi) & \text{i)} \\ \bar{y} \cos \phi &= -x \sin \theta + y \cos \theta & \text{ii)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.2)$$

で結ばれる (図-8 (b) 参照)。 AB , CD を s_1 線 (汙り線とは限らない同様 AD , BC を s_2 線とすると、 s_1 , s_2 線に沿う微小長の x , y 成分 (dx, dy) は明らかに

$$\begin{aligned} s_1 \text{ に沿つて} & : dy = \tan \theta \cdot dx & \text{iii)} \\ s_2 \text{ に沿つて} & : dy = -\cot(\theta - \phi) dx & \text{iv)} \end{aligned}$$

を満たす。ii) を s_1 上で微分し iii) を用いると

$$d\bar{y} \cos \phi = (-dx \sin \theta + dy \cos \theta) - (x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta = -(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad \text{v)}$$

しかるに i) ii) より

$$\bar{x} \cos \phi = \cos \phi (x \cos \theta + y \sin \theta) - \sin \phi (-x \sin \theta + y \cos \theta) = \cos \phi (x \cos \theta + y \sin \theta) - \bar{y} \sin \phi \cos \phi$$

$$\text{または} \quad x \cos \theta + y \sin \theta = \bar{x} + \bar{y} \sin \phi \quad \text{vi)}$$

であるから v) は $d\bar{y} \cos \phi = -(\bar{x} + \bar{y} \sin \phi) d\theta$ とかける。同様に i) を s_2 とで微分し iv), ii), vi) を逐次利用すると $d\bar{x} \cos \phi = (\bar{y} + \bar{x} \sin \phi) d\theta$ が得られる。すなわちまとめて

$$\left. \begin{aligned} s_1 \text{ に沿つて} & : d\bar{y} = -\left(\frac{\bar{x}}{\cos \phi} + \bar{y} \tan \phi\right) d\theta_1 \\ s_2 \text{ に沿つて} & : d\bar{x} = \left(\frac{\bar{y}}{\cos \phi} + \bar{x} \tan \phi\right) d\theta_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.3)$$

が得られる。これは形式上 (4.3) と同じだが, (6.3) は一般の斜交網目について成立する点が注目される。Hencky Net であれば θ_1, θ_2 を座標の独立変数ととれる [(2.3) 参照] から (4.4) と同様に

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} + \mu \left(-\frac{\partial Z}{\partial \theta_1} + \frac{\partial Z}{\partial \theta_2} \right) + Z = 0 \quad (Z = \bar{x}, \bar{y}) \dots\dots\dots (6.4)$$

が行われる。

Riemann 問題で Hencky Net を対象とする時の網目の作図は (6.3) により簡単に行える。例えば 図-5 において C 点の位置 (x_C, y_C) は (6.3) を差分化した

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_C - \bar{y}_D &= - \left(\frac{\bar{x}_C + \bar{x}_D}{2 \cos \phi} + \frac{\bar{y}_C + \bar{y}_D}{2} \tan \phi \right) (\theta_B - \theta_A) \\ \bar{x}_C - \bar{x}_B &= \left(\frac{\bar{y}_C + \bar{y}_B}{2 \cos \phi} + \frac{\bar{x}_C + \bar{x}_B}{2} \tan \phi \right) (\theta_D - \theta_A) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.5)$$

より \bar{x}_C, \bar{y}_C を求め (6.2) を解けばよい。

一般のり線場では, θ_C も未知だから (6.3) だけでは C の位置は決らず, Kötter の式の援用を要するが, この事情は Cauchy の問題にも現われてくる。すなわち Cauchy 問題で Hencky 場を求める時は $r=0$ を仮想するのだから, Kötter 式

$$\frac{\partial \tau}{\partial s_1} - 2 \mu \tau \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = 0 \quad \frac{\partial \tau}{\partial s_2} + 2 \mu \tau \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = 0$$

を, 例えば 図-2 (a) に用いて

$$\begin{aligned} \log \tau_C - 2 \mu \theta_C &= \log \tau_A - 2 \mu \theta_A & \log \tau_C + 2 \mu \theta_C &= \log \tau_B + 2 \mu \theta_B \\ \therefore \theta_C &= \frac{1}{4 \mu} \log \tau_B / \tau_A + \frac{1}{2} (\theta_A + \theta_B) \dots\dots\dots (6.6) \end{aligned}$$

で θ_C が知られる。よつて (6.3) から \bar{x}_C, \bar{y}_C は

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_C - \bar{y}_A &= - \left(\frac{\bar{x}_C + \bar{x}_A}{2 \cos \phi} + \frac{\bar{y}_C + \bar{y}_A}{2} \tan \phi \right) (\theta_C - \theta_A) \\ \bar{x}_C - \bar{x}_B &= \left(\frac{\bar{y}_C + \bar{y}_B}{2 \cos \phi} + \frac{\bar{x}_C + \bar{x}_B}{2} \tan \phi \right) (\theta_C - \theta_B) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.7)$$

の根として与えられる。

7. 結 論

本論文の前半で調べたり線素間の公式は, Hencky Net でない一般のり線場の数値解法上基本的なものである。摩擦性材料の塑性場に拡張された Prandtl, R. von Mises の定理, Mikhlin の座標などは, 一般のり線場の決定には不便のようであるが, Hencky Net で近似せしめる時は図式または数値解法上の手段となり得ることが示された。なお塑性場の特性 (例えば不連続問題など) の理論的研究には, Prandtl の定理は足掛りとなるであろう。り線の包絡線に関しここに述べたことは, 極く局限されたものというべく, 今後研究の余地がある。

本論文は摩擦を有する材料に関する塑性の理論的研究の一部であるが, 本研究に関しては東大教授最上博士の懇篤な御指導と御討論を仰いだ。ここに厚く感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 山口柏樹: 拡張せる Kötter の方程式に関する二, 三の考察 (土木学会論文集第 60 号 昭. 34. 1.)
- 2) 犬井鉄郎: 応用偏微分方程式論 P.194 (岩波書店)
- 3) E.G. Thomson: New Method for Construction of Hencky-Prandtl Nets, Jour. of App. Mech. Vol. 24 No. 1
- 4) R. Hill: The Mathematical Theory of Plasticity (1950) P. 136~149