

衝撃荷重によるハリの塑性変形について(続報)

正員 米 沢 博*

ON PLASTIC DEFORMATIONS OF BEAMS DUE TO IMPULSIVE LOAD (CONTINUED REPORT)

By Dr. Eng., Hiroshi Yonezawa, C.E. Member

Synopsis : In the previous paper, the plastic deformations of cantilever beams are discussed under the assumption of "plastic-rigid" body, and the characteristics of unsymmetrical deformations are obtained.

Here the plastic deformations of the beams with one end built-in and the other end simply supported under the blast type load which is uniformly distributed or concentrated are analyzed theoretically. As a result of analysis, it is made obvious that the deformations are divided into two classes for the distributed load and into five classes for the concentrated load, and the permanent deflections of each class are obtained.

1. ま え が き

構造物が衝撃荷重を受けた場合の塑性変形に関する研究が、最近、特に米国において、盛んに行われてきたようである^{1)~14)}。これらの研究は、いずれも構造物の支持状態および荷重状態が、対称の場合を扱ったもので、これらが非対称になると、変形は相当複雑になると考えられる。著者はさきに片持バリの場合を理論的に解析したので¹⁵⁾、ここでは一端固定、他端単純支持バリの場合を扱ってみた。すなわち、一端固定、他端単純支持バリが、Blast type の等分布荷重を満載、あるいは任意点に集中荷重を一個載せた場合の塑性変形を、ハリが完全剛塑性体であり、変形中のタワミ角は微小であるなどの仮定に基づいて、理論的に解析した。

2. 運動方程式の誘導

一端固定、他端単純支持バリが衝撃荷重を受けて塑性変形する場合、荷重の種類、大小、載荷位置などによつて、種々の変形が考えられる。ここでは、大きさ P_0 の全面等分布荷重、あるいは集中荷重が、図-1 に示すように、時間 τ の間作用する場合の変形を考えることにする。

図-1 衝撃荷重の型

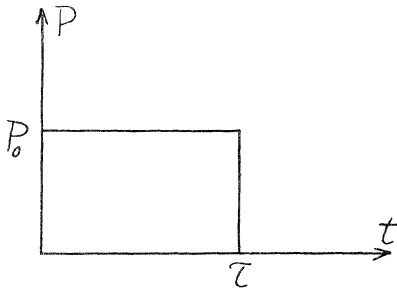


図-2 等分布荷重満載の場合の変形の種類

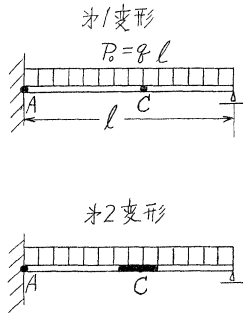
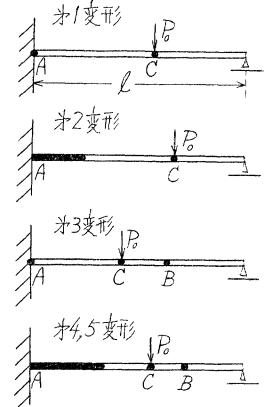


図-3 集中荷重の場合の変形の種類



次に、荷重の大小、載荷位置の相違などによる変形を、等分布荷重満載の場合を 図-2 に示すように第1、第2変形、集中荷重が一個だけ載る場合を 図-3 に示すように第1~第5変形と分類し、それぞれの場合に対して運動の方程式を誘導してみよう。ただし、ハリは完全塑性体であるとし、かつ弾性変形は無視する。また、せん断力の影響はないものとし、ハリの全塑性モーメントを M_0 、スパンを l として、以下のすべての場合に、次の記号を使用する。

$$\mu = \frac{P_0 l}{M_0} \dots \dots \dots (1)$$

* 工学博士、山口大学教授、工学部土木工学教室

(a) 等分布荷重満載の場合

まず、第1変形について考えてみよう。図-4において、固定端Aから塑性ヒンジCまでの長さaの部分の角速度を ω とすると、この部分の運動の方程式は次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \dot{\omega} = 3 \left\{ \frac{a^2 \mu}{2I^2} - 2 \right\} \dots \dots \dots (2)$$

図-4 第1変形

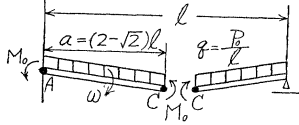
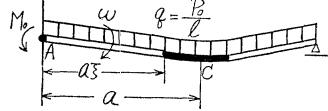


図-5 第2変形



ただし、 m はハリの単位長の質量、 $\dot{\omega}$ は $d\omega/dt$ を表わす。

次に、図-5 に示す第2変形の場合の長さ $a\xi$ の部分の運動の方程式は次のようになる。

$$\frac{ma^3\xi^3}{M_0} \dot{\omega} = 3 \left\{ \frac{a^2\xi^2\mu}{2I^2} - 2 \right\} \dots \dots \dots (3)$$

また、長さ a の部分の角運動量と角力積を等置して、次の式を得る。

$$\frac{a^2}{2I^2} \int_0^t \mu dt - 2t = \frac{ma^3\xi^3}{3M_0} \omega + \frac{m}{M_0} \int_{a\xi}^a \dot{y} x dx \dots \dots \dots (4)$$

ただし、 y はハリのタワミ、 \dot{y} は dy/dt を表わす。

式 (4) において、 $a\xi \leq x \leq a$ の部分では、 \dot{y} は次のようになる。

$$\dot{y} = \int_0^t \frac{q}{m} dt \dots \dots \dots (5)$$

式 (5) を式 (4) に代入すると、次のようになる。

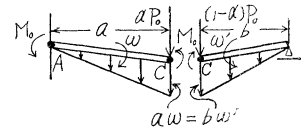
$$\frac{ma^3\xi^3}{M_0} \omega = 3 \left\{ \frac{a^2\xi^2}{2I^2} \int_0^t \mu dt - 2t \right\} \dots \dots \dots (6)$$

第1変形に対しては式 (2) を、第2変形に対しては式 (3)、(6) を解けば、 ω, ξ が得られる。以上は、点Cより左の部分の考えたが、点Cより右の部分を考えても、結果として得られるタワミはC点において両者一致する。

(b) 集中荷重の場合

(1) 第1変形 載荷点Cの左と右の部分に分けると、各部分のタワミ速度その他は、図-6 のようになる。集中荷重の場合、荷重 P_0 が点Cの左右にどのような割合で分けられるか、不明である。従つて、図-6 のように、 α なる未知常数をかけた。タワミ速度は、ヒンジCで左右一致しなければならないから、この条件から α が決定される。

図-6 第1'変形



長さ a, b の部分の運動の方程式は、それぞれ次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \dot{\omega} = 3\{n\alpha\mu - 2\} \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{mb^3}{M_0} \dot{\omega} = \frac{3n^2}{(1-n)^2} \{(1-n)(1-\alpha)\mu - 1\} \dots \dots \dots (8)$$

ただし、 $n = a/l$ である。式 (7), (8) から ω, α が決定される。

(2) 第2変形 図-7 において、載荷点Cの左右の各部分につき運動方程式を誘導すると次のようになる。

$$\frac{ma^3\xi^2}{M_0} \omega = 2n \int_0^t \alpha \mu dt \dots \dots \dots (9)$$

$$\frac{mb^3\xi^2(1-\xi/3)}{M_0} \omega = 2n \int_0^t \alpha \mu dt - 4t \dots \dots \dots (10)$$

$$\frac{m(1-n)^2 a^3 \xi}{n^2 M_0} \omega = 3(1-n) \int_0^t (1-\alpha) \mu dt - 3t \dots \dots \dots (11)$$

式 (9), (10), (11) から ω, ξ, α が決定される。

図-7 第2変形

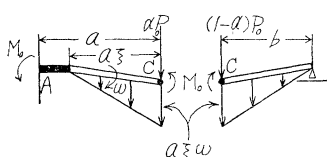
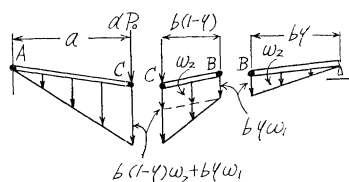


図-8 第3変形



(3) 第3変形 図-8 のように、塑性ヒンジ B, C によつて分割される三個の部分に分けて考えると、運動の方程式は次のように得られる。

点 C より右の長さ $b\eta, b(1-\eta)$ の各部分に対して、次の式を得る。

$$\frac{mb^3\eta^3}{M_0}\dot{\omega}_1=3\cdots\cdots\cdots(12) \quad \frac{mb^3(1-\eta)^3}{M_0}\dot{\omega}_2=6(1-n)(1-\alpha)(1-\eta)\mu-24\cdots(13)$$

点 C より左の長さ b, a の各部分について、角運動量と角力積を等置して、次の式を得る。

$$\frac{mb^3(3\eta-\eta^3)}{6M_0}(\omega_1-\omega_2)+\frac{mb^3}{3M_0}\omega_2=(1-n)\int_0^t(1-\alpha)\mu dt-t\cdots\cdots(14)$$

$$\frac{mn^2b^3}{3(1-n)^2M_0}\{(1-\eta)\omega_2+\eta\omega_1\}=n\int_0^t\alpha\mu dt-2t\cdots\cdots(15)$$

式 (12), (13), (14), (15) から $\omega_1, \omega_2, \eta, \alpha$ が決定される。

(4) 第4, 5変形 図-9 に示すように、第4, 5変形は荷重が載っている間は全く同一の変形で、荷重が消失した後の変形が相違する。その詳細は後述することにして、この場合の運動方程式を誘導してみよう。

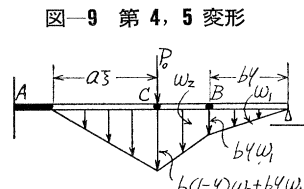


図-9 第4, 5変形

点 C より右の部分に対しては、第3変形と同じ式 (12), (13), (14) が得られ、点 C より左の長さ a の部分に対して、次の二式が得られる。

$$\frac{mn^2b^3\xi(1-\xi/3)}{2(1-n)^2M_0}\{(1-\eta)\omega_2+\eta\omega_1\}=n\int_0^t\alpha\mu dt-2t\cdots\cdots(16)$$

$$\frac{mn^2b^3\xi}{2(1-n)^2M_0}\{(1-\eta)\omega_2+\eta\omega_1\}=\eta\int_0^t\alpha\mu dt\cdots\cdots(17)$$

従つて、式 (12), (13), (14), (16), (17) から $\omega_1, \omega_2, \xi, \eta, \alpha$ が決定される。

3. 変形の分類および荷重との関係

ハリの剛塑性変形として、等分布荷重満載の場合は第1, 2変形、集中荷重の場合には第1~5変形と分類し、それぞれの運動方程式を誘導したが、これら各種の変形と荷重の大小、位置などとの関係を調べてみよう。

(a) 等分布荷重満載の場合

まず、第1変形の生ずる最小荷重を μ_I とすると、この値および塑性ヒンジの位置 C は、静的な極限解析の結果から、次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_I &= 11.66 \\ a &= (2-\sqrt{2})l \end{aligned} \right\} \cdots\cdots\cdots(18)$$

次に、第2変形として、図-10 に示すように、固定端の塑性ヒンジ A が拡大する変形も一応考えられる。しかし、このような変形を生ずる μ の最小値を、固定端における反力が0の条件と、運動方程式から求めると、 $\mu < 0$ となり、このような変形は生じ得ないことがわかる。

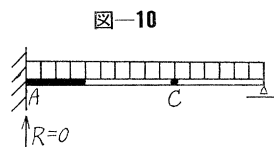


図-10

従つて、図-5 に示すような塑性ヒンジ C が左右に拡大する変形、すなわち第2変形を生ずる μ の最小値 μ_{II} を求めてみよう。この時の条件は、次の式で与えられる¹⁶⁾。

$$ma\dot{\omega} = q\cdots\cdots\cdots(19)$$

式 (19) に運動方程式 (3) にて $\xi=1$ とおいたものを代入すると、 μ_{II} は次のようになる。

$$\mu_{II} = 3\mu_I\cdots\cdots\cdots(20)$$

(b) 集中荷重の場合

(1) 第1変形 第1変形が生ずる μ の最小値を μ_I とすると、 μ_I は静的な極限解析の結果から、次のようになる。

$$\mu_I = \frac{2-n}{n(1-n)}\cdots\cdots\cdots(21)$$

(2) 第2変形 荷重が μ_I より大きくなると、第1変形を生じ、 μ がさらに大きくなると、載荷点により、すなわち n の値によつて、第2あるいは第3変形が生ずる。まず、第2変形が生ずる μ の最小値 μ_{II} を求めてみよう。第2変形の運動方程式 (9), (10), (11) において $\xi=1$ とおいて、 μ_{II} の値を求めると次のようになる。

$$\mu_{II} = \frac{4-2n-n^2}{n^2(1-n)}\cdots\cdots\cdots(22)$$

(3) 第3変形 第2変形の場合に比べて、載荷点が比較的固定端に近づくと、すなわち $n < 0.41$ (この値は後に説明する) になると、第2変形は生じないで、第3変形が生ずる。第3変形が生ずる μ の最小値を μ_{III} とし

て、この値を求めてみよう。

いま、 $\omega_1 = \omega_2$ とおくと、第3変形の運動方程式 (14), (15) から次の式を得る。

$$\frac{mb^3}{3M_0} \omega_2 = (1-n) \int_0^t (1-\alpha) \mu_{III} dt - t \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{mn^2b^3}{3(1-n)^2M_0} \omega_2 = n \int_0^t \alpha \mu_{III} dt - 2t \dots\dots\dots (24)$$

次に、図-11に示すように、載荷点Cより右の部分に作用する力を考えてみよう。単純支持端よりxの点の曲げモーメント M_x は、次の式で表わされる。

$$M_x = (1-\alpha)P_0x - \frac{mb^2x}{2} \dot{\omega}_2 + \frac{mx^3}{6} \dot{\omega}_2 \dots\dots\dots (25)$$

M_x が M_0 になるための条件 $dM_x/dx=0$ から、xの値が求められる。式 (25) の右辺にそのxの値および式 (23), (24) から得られる α, ω_2 を代入すると、 μ_{III} が次のように求められる。

$$\mu_{III} = \frac{2+5n+n^2}{n(1-n)^2} \dots\dots\dots (26)$$

(4) 第4および第5変形 第4および第5変形は載荷中は全く同一の変形であるが、荷重が消失した後の変形が、載荷点が比較的単純支持端に近いかな否かによつて、すなわち $n \geq 0.41$ によつて異なる。図-12に示すように、 $n > 0.41$ の場合は、ヒンジBがまず消失して後に $\xi=1$ になるのに対し、 $n < 0.41$ の場合は、まず $\xi=1$ になつてからヒンジBが消失する。

まず、第4変形が生ずる μ の最小値 μ_{IV} を求めてみよう。式 (14), (16), (17) において $\omega_1 = \omega_2$ とおくと、次のようになる。

$$\frac{mb^3}{3M_0} \omega_2 = (1-n) \int_0^t (1-\alpha) \mu_{IV} dt - t \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{mn^2b^3\xi(1-\xi/3)}{2(1-n)^2M_0} \omega_2 = n \int_0^t \alpha \mu_{IV} dt - 2t \dots\dots\dots (28)$$

この三式と、 μ_{III} の時と同一の操作、すなわち単純支持端よりxの点の曲げモーメント M_x が M_0 になる条件式から、 ω_2, ξ, α を消去して μ_{IV} を計算すると、次のようになる。

$$\mu_{IV} = \frac{3(3+2\sqrt{2})}{1-n} \dots\dots\dots (30)$$

次に、第5変形を生ずる μ の最小値 μ_V を求めてみよう。式 (12), (13), (14) と式 (16), (17) において、 $\xi=1$ とおき、 ω_1, η, α を消去すれば μ_V が求められる。この操作は相当な手数を要し、その詳細は後述の運動方程式の解において述べることにして、概略を説明すると、次のようである。

載荷中は $\eta = \eta_0 = \text{一定}$ と考えられるから、上記の五式から $\omega_1, \omega_2, \alpha$ を消去して、次の二式を得る。

$$\left\{ \frac{2}{(1-\eta_0)^2} - \frac{1}{\eta_0^2} \right\} = \frac{2(1-n)^2}{n^2} \dots\dots\dots (31)$$

$$\mu_V = \frac{6}{n} + \frac{6}{(1-n)(1-\eta_0)} - \frac{3(1-\eta_0)}{2(1-n)\eta_0^2} \dots\dots\dots (32)$$

式 (31) から η_0 を求め、式 (32) に代入すれば μ_V が決定する。

(5) 各種の変形と荷重との関係 集中荷重の場合に対して、載荷点すなわちnの値と各種の変形を生ずる荷重の最小値との関係を、式 (21), (22), (26), (30), (32) から求めたものを、図-13に示す。

図-13において、(I), (II), ……(V) と記入してある部分は、第1, 2 …… 5変形を生ずる荷

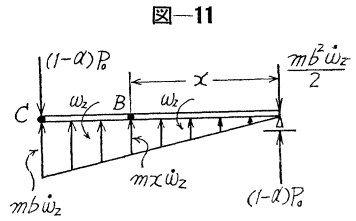
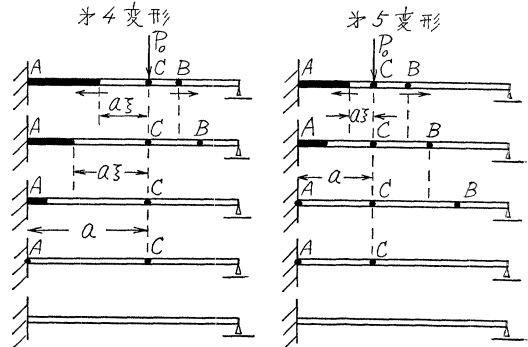
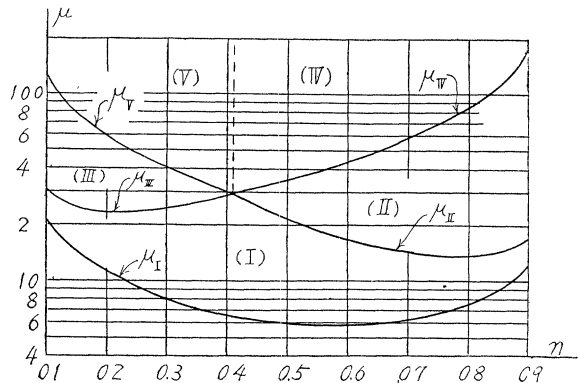


図-12 第4変形と第5変形との比較



$$\frac{mn^2b^3\xi}{2(1-n)^2M_0} \omega_2 = n \int_0^t \alpha \mu_{IV} dt \dots\dots\dots (29)$$

図-13 各種変形と荷重との関係



重領域を示す。曲線 $\mu_{II}, \mu_{III}, \mu_{IV}, \mu_V$ が $n=0.41$ の一点で交っていることは注目すべき結果であろう。すなわち、載荷点が $n=0.41$ より左であれば第1, 3, 5変形, 右にあれば第1, 2, 4変形を生ずる。

4. 運動方程式の解

さきに, 2.において誘導した運動方程式を解いて, 運動終了後の永久タワミを求めてみよう。

(a) 等分布荷重満載の場合

$\mu \geq \mu_{II}$ の場合, すなわち第2変形をまず考えてみよう。以後簡単のため, 次の記号を用いる。

$$I_t = \int_0^t \mu dt \dots\dots\dots (33)$$

運動の方程式 (3), (6) から ξ を求めると, 次のようになる。

$$\xi^2 = \frac{12 I_t^2}{a^2 I_t} \dots\dots\dots (34)$$

式 (34) において, $\xi=1$ とおけば, 点Cから左右に拡大していた塑性帯が塑性ヒンジ点になる時刻 t_{II} が, 次のように求められる。

$$t_{II} = \frac{I_{t_{II}}}{\mu_{II}} = \frac{\mu}{\mu_{II}} \tau \dots\dots\dots (35)$$

次に, ヒンジCの時間 t_{II} におけるタワミ δ_{II} を, 式 (5) を積分して求めると, 次のようになる。

$$\frac{ml^2}{M_0} \delta_{II} = \int_0^{t_{II}} I_t dt = \int_0^\tau \mu t dt + \int_\tau^{t_{II}} \mu \tau dt = \left(\frac{\mu^2}{\mu_{II}} - \frac{\mu}{2} \right) \tau^2 \dots\dots\dots (36)$$

時間 t_{II} 以後は, 塑性ヒンジは点A, Cだけになり, 第1変形に移るわけである。第2変形の方程式 (3) において, $\xi=1$ とおけば, 第1変形の方程式 (2) が得られる。式 (2) において, $\omega=0$ すなわち運動終了の時刻 t_f を求めると, 次のようになる。

$$t_f = \frac{\mu}{\mu_I} \tau \dots\dots\dots (37)$$

従つて, 変形終了時の点Cのタワミ $\delta_{II,f}$ は, 式 (2) を二度積分して, 次のようになる。

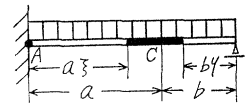
$$\frac{ml^2}{M_0} \delta_{II,f} = \frac{ml^2}{M_0} \delta_{II} + \frac{3}{2} \int_{t_{II}}^{t_f} I_t dt - \frac{6}{n^2} \int_{t_{II}}^{t_f} t dt = (0.05719 \mu^2 - 0.5 \mu) \tau^2 \dots\dots\dots (38)$$

μ が最初から μ_{II} より小さい時は, 第1変形が生じこの場合の点Cの永久タワミ $\delta_{I,f}$ は次のようになる。

$$\frac{ml^2}{M_0} \delta_{I,f} = \frac{3}{2} \int_0^\tau I_t dt - \frac{6}{n^2} \int_0^\tau t dt = (0.06435 \mu^2 - 0.75 \mu) \tau^2 \dots\dots\dots (39)$$

なお, 図-14において, 点Cより右の部分について同様な解析を行えば, 式 (34) と同様に η の値が得られ, その結果は ξ と等しくなる。すなわち, 点Cの左右の塑性部分の長さの比は $a(1-\xi)/b(1-\eta) = a/b = 1.414$ になることがわかる。

図-14



(b) 集中荷重の場合

集中荷重の場合は, 載荷位置すなわち n の値によつて, 変形が異なるわけであるが, ここでは $n > 0.41$ の場合について, 方程式の解を導誘してみよう。この場合第3, 5変形が含まれないことになるが, 第4変形の解法が, 第3, 5変形の解法にそのまま適用できるので, $n < 0.41$ の場合はここでは省略することにする。

(1) 第1変形の解 $\mu_I < \mu < \mu_{II}$ の場合, 第1変形を生ずる。式 (7), (8) から α を求めると, 次のようになる。

$$\alpha = \frac{2-4n+n^2+n^2(1-n)\mu}{n(1-n)\mu} \dots\dots\dots (40)$$

式 (40) を式 (7) に代入し積分すると, 次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \omega = 3 \int_0^t \frac{2-4n+n^2+n^2(1-n)\mu}{1-n} dt - 6t \dots\dots\dots (41)$$

第1変形が終了する時刻を t_f とすると, t_f は式 (41) において $\omega=0$ とおけば, 次のようになる。

$$t_f = \frac{\mu}{\mu_I} \tau \dots\dots\dots (42)$$

従つて, 式 (41) をさらに時間 $0 \sim t_f$ の間で積分すれば, 永久タワミが求められる。いま, 載荷点Cの永久タワミを $\delta_{I,f}$ とすると, 次のようになる。

$$\frac{mI^2}{M_0} \delta_{I,f} = \left\{ \frac{3(n-2)\mu^2}{2n(1-n)\mu_I^2} + 3 \left(\frac{\mu^2}{\mu_I} - \frac{\mu}{2} \right) \right\} \tau^2 \dots\dots\dots (43)$$

その他、任意点のタワミ、タワミ角なども同様の操作を行つて求めることができる。

(2) 第2変形の解 $\mu_{II} < \mu < \mu_{IV}$ の場合、第2変形を生ずる。式(9)、(10)、(11)から、 ξ, ω を求めると、次のようになる。

$$\xi = \frac{4(1-n)}{n \left\{ -3 + \sqrt{5+4(1-n)\frac{I_t}{t}} \right\}} \dots\dots\dots (44)$$

$$\frac{ma^3}{M_0} \omega = \frac{12t}{\xi^3} \dots\dots\dots (45)$$

第2変形が終了し、第1変形に移る時刻を t_{II} とすると、 t_{II} は式(44)において $\xi=1$ とおけば、次のようになる。

$$t_{II} = \frac{\mu}{\mu_{II}} \tau \dots\dots\dots (46)$$

従つて、 t_{II} における載荷点Cのタワミ δ_{II} は、式(45)から次のようになる。

$$\frac{mI^2}{M_0} \delta_{II} = \frac{12}{n^2} \int_0^{t_{II}} \frac{t}{\xi^2} dt \dots\dots\dots (47)$$

次に、第2変形の方程式(10)、(11)において $\xi=1$ とおけば、第1変形の方程式(7)、(8)を得る。従つて、 t_{II} 以後変形が終了する t_f までは、第1変形を適用し、載荷点の永久タワミ $\delta_{II,f}$ を求めると次のようになる。

$$\frac{mI^2}{M_0} \delta_{II,f} = \frac{12}{n^2} \int_0^{t_{II}} \frac{t}{\xi^2} dt + \left[\frac{3(n-2)t^2}{2n(1-n)} \right]_{t_{II}}^{t_f} + 3 \left[\mu \tau t \right]_{t_{II}}^{t_f} \dots\dots\dots (48)$$

(3) 第4変形の解 $\mu_{IV} < \mu$ の場合、第4変形を生ずる。第4変形の方程式(14)を t で微分し、式(12)(13)を代入すると、次のようになる。

$$\dot{\eta} \left(\frac{mb^3}{M_0} \omega_1 - \frac{mb^3}{M_0} \omega_2 \right) = 2 \left\{ -\frac{N}{1-\eta} - \frac{3}{2\eta^2} + \frac{6}{(1-\eta)^2} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

ただし、 $N=(1-n)(1-\alpha)\mu, \dot{\eta}=d\eta/dt$ である。

さらに、式(49)を t で微分し、式(12)、(13)を代入すると、次のようになる。

$$2\ddot{\eta} \left\{ \frac{N}{1-\eta} + \frac{3}{2\eta^2} - \frac{6}{(1-\eta)^2} \right\} + \dot{\eta} \left\{ -\frac{2\dot{N}}{\dot{\eta}(1-\eta)} + \frac{3}{\eta^3} + \frac{4N}{(1-\eta)^2} \right\} = 0 \dots\dots\dots (50)$$

ただし、 $\dot{N}=dN/dt$ である。

いま、 $t < \tau$ に対しては、 $\eta=\eta_0=$ 一定、 $\xi=\xi_0=$ 一定と考えられるから、式(49)は次のようになる。

$$-\frac{N}{1-\eta_0} - \frac{3}{2\eta_0^2} + \frac{6}{(1-\eta_0)^2} = 0 \dots\dots\dots (51)$$

運動方程式(16)、(17)を t で微分したものと、式(12)、(13)から、 $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ を消去すると次の二式を得る。

$$\frac{n^2 \xi_0^2}{6(1-n)^2} \left\{ -\frac{24}{(1-\eta_0)^2} + \frac{6N}{1-\eta_0} + \frac{3}{\eta_0^2} \right\} - 2 = 0 \dots\dots\dots (52)$$

$$\frac{n\alpha\xi_0\mu}{3} - 2 = 0 \dots\dots\dots (53)$$

式(51)、(52)、(53)から、 η_0, ξ_0, α が計算できる。いま、 μ_I の最小値を与える $n=0.6$ の場合について、荷重が $\mu=43.7$ (μ_{IV} の値である)、90、180のおおのおおの場合に対する η_0, ξ_0, α の値を、数値計算したものを、表-1に示す。

$t=\tau$ における塑性ヒンジB,Cのタワミを $\delta_{1,0}, \delta_{2,0}$ とすると、式(12)、(13)から、 $\delta_{1,0}, \delta_{2,0}$ は次のようになる。

$$\frac{mI^2}{M_0} \delta_{1,0} = \frac{3}{2(1-n)^2\eta_0^2} \tau^2 \dots\dots\dots (54)$$

$$\frac{mI^2}{M_0} \delta_{2,0} = \frac{mI^2}{M_0} \delta_{1,0} - \frac{12}{(1-n)^2(1-\eta_0)^2} \tau^2 + \frac{3(1-\alpha)\mu}{(1-n)(1-\eta_0)} \tau^2 \dots\dots\dots (55)$$

次に $t > \tau$ に対しては、式(50)において、 $N=\dot{N}=0$ とおくと、次のようになる。

$$\ddot{\eta} \left\{ \frac{1}{\eta^2} - \frac{4}{(1-\eta)^2} \right\} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta^3} = 0 \dots\dots\dots (56)$$

表-1

μ	η_0	ξ_0	α
43.7	0.500	0.471	0.485
90.0	0.684	0.222	0.500
180.0	0.835	0.111	0.500

式 (56) を積分すると、次のようになる。

$$dt = \frac{\eta}{K(1+\eta)(1-3\eta)^{1/3}} d\eta = \frac{F(\eta)}{K} d\eta \dots\dots\dots (57)$$

ただし、 K は積分常数である。

$t = \tau$ にて、 $\omega_1 = \omega_{1,0}$ 、 $\omega_2 = \omega_{2,0}$ 、 $N=0$ 、 $\eta = \eta_0$ なる条件を用いて、式 (49)、(57) から K は次のようになる。

$$K = - \frac{3(1-3\eta_0)^{2/3}}{\frac{mb^3}{M_0} \{\omega_{1,0} - \omega_{2,0}\} \eta_0 (1-\eta_0)^2} \dots\dots\dots (58)$$

いま、第4変形が終了する時、すなわち $\omega_1 = \omega_2$ の時の η を η_{IV} とすると、式 (49) から η_{IV} は次のようになる。

$$\eta_{IV} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots (59)$$

従つて、第4変形の方程式 (12)、(13) を積分すると、次のようになる。

$$\frac{mb^3}{M_0} \omega_1 = \frac{mb^3}{M_0} \omega_{1,0} + \frac{3}{K} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{F(\eta)}{\eta^3} d\eta \dots\dots\dots (60)$$

$$\frac{mb^3}{M_0} \omega_2 = \frac{mb^3}{M_0} \omega_{2,0} - \frac{24}{K} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{F(\eta)}{(1-\eta)^3} d\eta \dots\dots\dots (61)$$

式 (60)、(61) をさらに積分して、第4変形終了時の点 B, C のタワミ $\delta_{1,IV}$ 、 $\delta_{2,IV}$ を求めると次のようになる。

$$\frac{ml^2}{M_0} \delta_{1,IV} = \frac{ml^2}{M_0} \delta_{1,0} + \frac{mb^3 \omega_{1,0}}{(1-n)^2 M_0 K} \int_{\eta_0}^{\eta_{IV}} \eta F(\eta) d\eta + \frac{3}{(1-n)^2 K^2} \int_{\eta_0}^{\eta_{IV}} \eta F(\eta) \left\{ \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{F(\eta)}{\eta^3} d\eta \right\} d\eta \dots\dots\dots (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{ml^2}{M_0} \delta_{2,IV} = & \frac{ml^2}{M_0} \delta_{1,IV} + \frac{ml^2}{M_0} \delta_{2,0} + \frac{mb^3 \omega_{2,0}}{(1-n)^2 M_0 K} \int_{\eta_0}^{\eta_{IV}} (1-\eta) F(\eta) d\eta \\ & - \frac{24}{(1-n)^2 K^2} \int_{\eta_0}^{\eta_{IV}} (1-\eta) F(\eta) \left\{ \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{F(\eta)}{(1-\eta)^3} d\eta \right\} d\eta \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

さらに、 $\omega_1 = \omega_2$ になる時刻 t_{IV} は、式 (57) を積分すると、次のようになる。

$$t_{IV} = \tau + \frac{1}{K} \int_{\eta_0}^{\eta_{IV}} F(\eta) d\eta \dots\dots\dots (64)$$

式 (62)、(63)、(64) は、積分が解析的に不可能ではないが、非常に複雑になるから、ここでは数値積分することにする。 $\eta_{IV} = 1/3$ であり、 $n = 0.6$ で $\mu = 43.9, 90, 180$ に対する η_0 は、表-1 に与えられているので、これらの値を用いて、式 (64) の t_{IV} を求めると、 t_I, t_{II} などと同一の形式で、次の値と一致することがわかる。

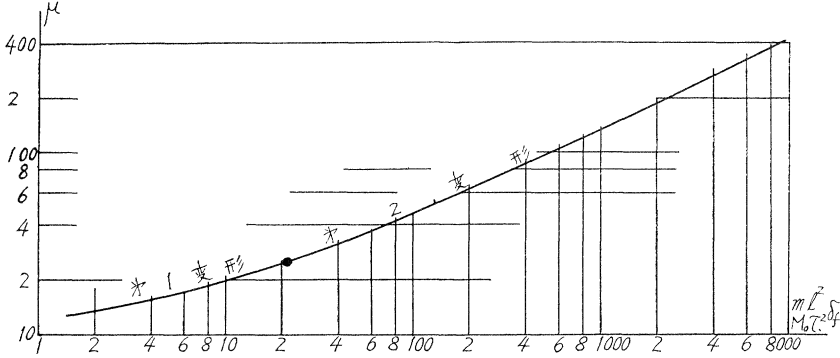
$$t_{IV} = \frac{\mu}{\mu_{IV}} \tau \dots\dots\dots (65)$$

従つて、 t_{IV} 以後の変形は、 $t_{IV} \sim t_{II}$ は第2変形、 $t_{II} \sim t_I$ は第1変形として、永久タワミその他を求めることができる。

(c) 永久タワミの計算値

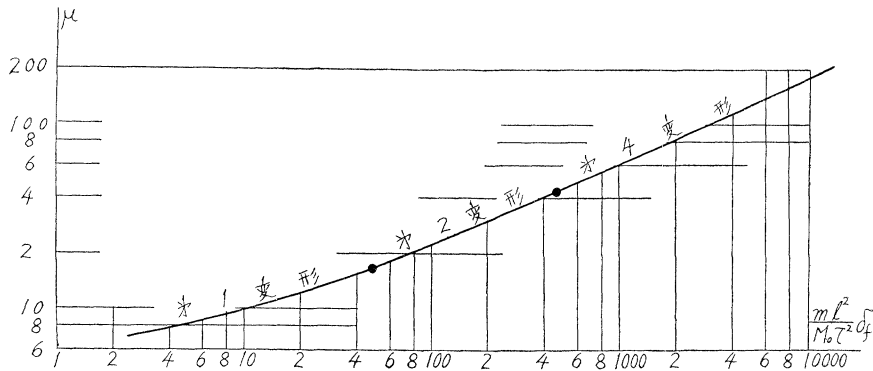
以上に誘導した解を用いて、各変形に対する永久タワミを求めることができる。まず、等分布荷重満載の場合に対して、式 (38)、(39) を用いて、種々の μ の値に対する点 C の永久タワミを求めると、図-15 のようにな

図-15 等分布荷重満載の場合の荷重と永久タワミとの関係



る。次に、 $n=0.6$ の点に集中荷重が載つた場合に対して、式 (43), (48), (63), その他を用いて、載荷点の永久タワミを求めると、図-16 のようになる。

図-16 集中荷重の場合の荷重と永久タワミとの関係



5. 結 言

一端固定、他端単純支持バりが、全面等分布あるいは任意点に集中した衝撃荷重を受けた場合の塑性変形について、ハりが完全剛塑性体であるとして、理論的解析を試みた。

その結果として、荷重の大小、載荷位置などによつて、等分布荷重に対しては二種類、集中荷重に対しては、五種類の変形が生ずること、各種の変形に対する極限荷重の大きさ、およびそれと載荷位置との関係などを明らかにし、かつ変形終了後の永久タワミを求めることができた。

これらの結果は、弾性変形、塑性条件に対するせん断力の影響、ヒズミ効果などの無視、その他の仮定に基づいて得られたものであるが、一端固定、他端単純支持バリの塑性変形の大略を知る上には、有効であると考えられる。また、連続バリの側スパンの塑性変形にも適用できるであろう。

なお、格子、板、その他の土木構造物に、同様の解析を試みること、あるいは実験的研究を行うことは興味ある問題であり、これらの研究を引き続いて行いたいと考えている。

最後に、多数の有益な文献を送つて頂いた Brown 大学 P.S. Symonds 教授に、感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) E.H. Lee, P.S. Symonds: J. of Appl. Mech., Vol. 19, 1952, p. 308
- 2) M.F. Conroy: J. of Appl. Mech., Vol. 19, 1952, p. 465
- 3) P.S. Symonds: J. of Appl. Mech., Vol. 20, 1953, p. 475
- 4) H.H. Bleich, M.C. Salvadori: Proc. A.S.C.E., Vol. 79, No. 287, 1953
- 5) P.S. Symonds, C.F.A. Leth: J. of Mech. and Phys. of Solids, Vol. 2, 1954, p. 92
- 6) P.S. Symonds: Proc. 2nd U.S. National Congress of Appl. Mech., 1954, p. 505
- 7) M.F. Conroy: J. of Appl. Mech., Vol. 22, 1955, p. 48
- 8) R.H. Owens, P.S. Symonds: J. of Appl. Mech., Vol. 22, 1955, p. 522
- 9) B.A. Cotter, P.S. Symonds: Proc. A.S.C.E., Vol. 81, No. 675, 1955
- 10) M.F. Conroy: J. of Appl. Mech., Vol. 23, 1956, p. 239
- 11) R.C. Alverson: J. of Appl. Mech., Vol. 23, 1956, p. 411
- 12) J.A. Seiler, B.A. Cotter, P.S. Symonds: J. of Appl. Mech., Vol. 23, 1956, p. 515
- 13) P.G. Hodge: J. of Appl. Mech., Vol. 23, 1956, p. 917
- 14) P.S. Symonds: British Welding Journal, August, 1956, p. 359
- 15) 米沢 博: 土木学会論文集第 58 号, 昭.33.9, p. 23
- 16) 文献 6) 参照