

土 木 学 会 論 文 集

第 60 号・別 冊 (3-3)

單位図法とその適用に関する基礎的研究

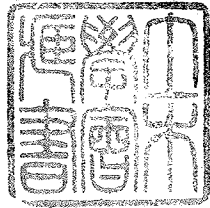
正 員 工 博 石 原 藤 次 郎
正 員 高 棹 琢 馬

TRANSACTIONS
OF THE
JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

NO. 60, EXTRA PAPERS (3-3)

FUNDAMENTAL RESEARCHES ON THE UNIT
HYDROGRAPH METHOD AND ITS APPLICATION

*By Dr. Eng., Tojiro Ishihara, C. E. Member
and Takuma Takasao, C. E. Member*



March 1959
TOKYO JAPAN

昭和 34 年 3 月

土 木 学 会

単位図法とその適用に関する基礎的研究

正員 石原 藤次郎*

正員 高 棹 琢 馬**

FUNDAMENTAL RESEARCHES ON THE UNIT HYDROGRAPH METHOD AND ITS APPLICATION

By Dr. Eng., Tojiro Ishihara, C. E. Member
and Takuma Takasao, C. E. Member

Synopsis : The basic principle of the unit hydrograph method assumes that there exists a linear relation between the discharge $Q(t)$ and the rainfall $r(t)$ expressed as

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t X(\tau)r(t-\tau)d\tau,$$

where $X(t)$ is the unit hydrograph given as a kernel of the linear integral equation.

Since this expression is obviously based on empirical relations, the hydraulic significance of the unit hydrograph method will be lost, unless a dynamical basis of the above expression is verified in the light of fluid mechanics.

Under these considerations, the present paper deals theoretically with the following two themes from a stand point of hydraulics.

- 1) Hydraulic significance of the fundamental principle of the unit hydrograph method.
- 2) The most preferable elements of the unit rainfall and the unit hydrograph, and estimation of errors due to the application of the unit hydrograph method.

The authors hope that the results derived in the present paper will bring effective procedures to solve important practical problems such as the range of applicability of the unit hydrograph method or the synthetic unit hydrograph and so on.

要 旨 本論文は、山間地流域における雨水の挙動を水理学に究明して、単位図法の力学的意義を明確にするとともに、単位降雨および単位図の内部的の機構を論じて、それらの最も妥当な形を求め、さらに単位図法適用にともなる誤差関係を明らかにしたものであつて、えられた成果は本質的に普遍性をもつものといつてよい。これらは経験的に発展してきた単位図法において論議の対象となつている単位降雨および単位図の最適要素、単位図法の適用限界、さらには総合単位図といつた問題に直結したものであり、単位図法に関する諸問題の解決に寄与するところが少なくないであろう。

目 次

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. はしがき 2. 雨水流出の水理機構 <ol style="list-style-type: none"> (1) 雨水の伝播と流量に関する基礎方程式 (2) 二、三の流出特性と降雨および流域の特性との関係 3. 単位図法の力学的意義と流出現象の線型性 <ol style="list-style-type: none"> (1) 単位図法の力学的意義 (2) 流出現象の線型性 4. 単位図法の精度と降雨および流域の諸特性との関係 <ol style="list-style-type: none"> (1) 単位図法における伝播速度と流量の表示 (2) $x_0 \sim t$ 面における α_t の変動 | <ol style="list-style-type: none"> (3) α_t の変動と流下距離および降雨継続時間との関係 (4) 降雨の場所的分布と単位図法の精度 (5) 単位図法の精度についての総括 5. 流出機構の分類と単位図法による最大流量の適合条件 <ol style="list-style-type: none"> (1) α_t の平均化 (2) 流出機構の差異による分類 (3) 単位図法による流出解析の適合条件 6. 単位降雨の要素 <ol style="list-style-type: none"> (1) 小流域の場合 ($t_u < t_c, t_d > t_c$) (2) 大流域の場合 ($t_u < t_c, t_d < t_c$) |
|--|--|

* 工学博士，京都大学教授，工学部土木工学教室，

** 京都大学大学院学生，博士課程

- (3) 流域の大小と単位降雨要素との関係
7. 単位図の要素
- (1) 最大流量の遅れの時間
- (2) 小流域における単位図の要素
- (3) 大流域における単位図の要素
- (4) 流域の大小と単位図要素との関係

8. 単位図法の適用誤差

- (1) 最大流量に関する単位図法誤差
- (2) 流出量曲線全体に関する単位図法誤差
- (3) 流域の大小と単位図法誤差との関係

9. むすび

参考文献

1. は し が き

1932年 Sherman が三つの線型仮説にもとづく単位図法を提案して以来、単位図法はその簡明な実用性によって、山間地流域における流出解析法として広く用いられるようになった。

単位図法の基礎的原理は、流量 $Q(t)$ と降雨 $r(t)$ の間に、

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t X(\tau)r(t-\tau)d\tau$$

という線型関係が成立するものとし、この線型積分方程式の核として、単位図 $X(t)$ を与えるということである。これは、山間地流域における流出現象のように、流れの場が極端に不均一であつて、しかも任意性にとむ現象に対しては、古典的な力学的取り扱いが困難あるいは不可能であることに着目し、一種の確率論的思考をも含んでいることを意味しているのであつて、簡明な実用性という面からだけではなく、方法論的にも卓抜した理念を内蔵している点に注目しなければならない。

山間地流域における雨水の挙動は、明らかに一つの力学系を構成しているが、雨水の微小な実質部分に注目すると、この系の自由度は非常に大きく、その厳密な取り扱いが古典力学の範囲外にあるといえよう。しかし系全体の各時刻における微視状態を完全に知ること、すなわち系全体を完全に力学的に記述することは、実際上われわれの関心をひくものではないし、またその必要もないのであつて、観測地点における現象の巨視的な知識さえあればよいのである。単位図法の基礎としての上述の線型積分方程式は、力学的法則によるものではなく、全く経験的事実にもとづくものであることが明白であり、これが原理的に正しければ、系の各時刻の微視状態を力学的に追跡しなくとも、必要な知識がえられるということであつて、単位図法の力強さは実にこの点にあるのである。

しかしながら、雨水の流出が明らかに力学的事象である以上、上述の経験的事実にもとづく法則の力学的な妥当性が保証されなければ、単位図法の意義が失われることはいうまでもない。こうした意味から、単位図法の論議の対象は、つぎの点につくされているといえよう。

1. 単位図法の力学的意義を明確にすること。

2. もし単位図法の基礎原理が力学的法則とはずれているとすれば、単位図法の基礎となる単位降雨および単位図には、われわれの問題とする対象に応じて、最も望ましい形があるはずであるから、その形を求めることが必要になり、さらにそうした単位降雨および単位図による単位図法を適用するときの誤差関係を知らねばならない。このためには、単位降雨あるいは単位図のもつ内部的な機構を明らかにすることが必要である。

以上の二つの主題は、現在単位図法で論議の対象となつている単位降雨および単位図の最適要素、単位図法の適用限界、さらには総合単位図といった諸問題に直結しており、これらの主題を解決することによつて、単位図法に関する問題点がおのずから解明されるであろう。

この研究は、以上の見地にあたつて、山間地流域における雨水の挙動を水理学的に一貫して究明しながら、上述の二つの主題の解明を試みたものである。

2. 雨水流出の水理機構

山間地流域における雨水の流出現象は、降雨を供給源とし流域を媒体とした雨水の運動現象である。ところが供給源である降雨は、きわめて任意性にとんでいて、その時間的場所的分布については、偶然現象と考えざるをえないことが多い。さらに流出の媒体、すなわち雨水運動の場である流域は、大きく分けて面的特性をもつ斜面と線的特性をもつ流路の二つの要素で構成されたものと考えられるが、この二つの要素の分布と性状ははなはだしく不均一である。こうした意味から、流出現象は不均一場における偶然性で特徴づけられた雨水の運動現象といえるのであつて、雨水流出の一般法則を理論的に求めることの極度の困難さは、この流出現象の性格にもとづくものといえよう。

流域内の雨水流出機構を理論的に取り扱つた従来の研究には、B. D. Richard¹⁾ や R. T. Zoch²⁾ のものがあるが、前提としておいた仮定があまりに単純かつ大胆にすぎようであり、また単に定性的な意味からも疑問の点

があつて、力学的な論拠をもつものとは考えられない。

ここでは、単位図法に関する論議の基礎とするために、雨水流出の水利学的諸関係を明らかにするが、さらに十分な理論の厳密な組立ては、流出現象の偶然的特性を考慮した確率論的思考を導入してはじめて可能になるものと思われる。

なお、以下においては降雨の場所的分布および雨水の損失現象については考慮せず、もつぱら有効降雨を対象として、地表面流出だけを取り扱うことにする。

(1) 雨水の伝播と流量に関する基礎方程式

運動現象を力学的に明らかにしようとする場合、一般に微分方程式が用いられるが、その基礎として微視的平衡という概念があるから、不均一場においては、その場の特性として平均量をとつても妥当である場合にのみ、微分方程式にもとづく理論の組立てが許される。

流出現象においては、運動の場は流域であつて、その特性として重要なものは、重力の効果を表わす勾配と摩擦効果を表わす粗度とである。流域は斜面と流路の二つの場から構成されているが、それぞれの場の特性、ことに粗度がいちじるしく異なることは、Palmer の実験⁶⁾や特性曲線法による流出計算の結果から明らかにされている。こうした意味で、流出現象の力学的取り扱いにおいては、斜面と流路とを等価な流れの場として一様化することができない。したがつて、流域を斜面と流路との二つの場に分けることは、流域を単純化する極限と考えられる。斜面あるいは流路自体の諸因子がまたはははだしく不均一であるが、それぞれにおける流れの機構には本質的な相違がなく、またそれぞれの場の特性の平均値からの分散の程度もそれほど大きくないから、これらの不均一量を平均量に変換して処理することは、十分許されるであろう。

以上の立場に立つて、斜面および流路の二つの流れの場について、それぞれにおける雨水流出の水利機構を考察しよう。まず、一般断面流路において、時間的に変動する横からの流入がある場合、流れが等流に近いものと仮定すれば、運動方程式と連続式はそれぞれつぎのように表わされる。

$$A = f_n(Q) = KQ^p, \dots\dots\dots(2.1)$$

$$\partial A / \partial t + \partial Q / \partial x = q(t), \dots\dots\dots(2.2)$$

ここに、 A は流水断面積、 Q は流量、 $q(t)$ は流路単位長当りの横から流入量 (時間の任意関数)、 x は距離、 t は時間であつて、流れが Manning の抵抗法則にしたがうものとする、

$$K = \{n(\sin \theta)^{-1/2} K_1^{2/3}\}, \quad p = 3/(2z + 3)$$

である。この場合、 n は流路の粗度係数、 $\sin \theta$ は流路の勾配、 K_1 および z は径深 R と流水断面積 A との関係が $R = K_1 A^z$ とおけるとした場合の常数である。

(2.1) および (2.2) 式から、特性方程式として、

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{dA/dQ} = \frac{dQ}{q(t)} \dots\dots\dots(2.3)$$

が与えられ、さらに (2.1) 式を用いて変形すれば、

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{pKQ^{p-1}} = \frac{dQ}{q(t)} \dots\dots\dots(2.4)$$

となる。したがつて、(2.3) および (2.4) 式から、特性曲線

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{dA} = \frac{Q^{1-p}}{pK} \dots\dots\dots(2.5)$$

の上で、次式が成立することになる。

$$Q = \left\{ \int_{\tau}^t q(t) dt / K \right\}^{1/p} + Q(\xi, \tau), \quad Q = \int_{\xi}^x q(t) dx + Q(\xi, \tau), \dots\dots\dots(2.6)$$

ここに、 $Q(\xi, \tau)$ は流量の初期および境界条件を示すもので、特性曲線の出発する場所的、時間的位置 ξ, τ における流量を表わしている。

いま、(2.6) 式を (2.5) 式に入れると、特性曲線の微分方程式として、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{pK} \left[\left\{ \int_{\tau}^t q(t) dt / K \right\}^{1/p} + Q(\xi, \tau) \right]^{1-p} \dots\dots\dots(2.7)$$

がえられ、これを積分してつぎの特性曲線式が導かれる。

$$x = \frac{1}{pK} \int_{\tau}^t ds \left[\left\{ \int_{\tau}^s q(z) dz / K \right\}^{1/p} + Q(\xi, \tau) \right]^{1-p} + \xi \dots\dots\dots(2.8)$$

(2.6)、(2.8) の両式の関係を数学的に説明すれば、 $Q-x-t$ の三次元空間において、解あるいは積分曲面に合

まれる曲線を $x-t$ 面に投影したものが特性曲線式 (2.8) であり、したがってこの上で (2.6) 式という Q の関係が成立するのである。なお、 Q の一般解は、(2.3) および (2.4) 式から独立な二つの第一積分を求めることによつて、

$$Q = F \left[Q - \left\{ \int q(t) dt / K \right\}^{1/p}, x - (1/pK) \int Q^{1-p} dt \right] = 0$$

で表わされる任意関数である。

つぎに、斜面の場合には流れを近似的に二次元流と考えることができ、横からの流入量は有効降雨強度 $r(t)$ 、斜面の流量は q で表わせばよい。また斜面流の初期および境界条件は 0 としてよいから、流路の場合の (2.1), (2.2), (2.6) および (2.8) 式に対応するものとして、つぎの諸式がえられる。ここに、ダッシュは斜面上における値を示したものである。

$$h' = K' q^{p'}, \dots \dots \dots (2.9)$$

$$\partial h' / \partial t + \partial q / \partial x' = r(t), \dots \dots \dots (2.10)$$

$$q = \left\{ \int_{\tau}^t r(t) dt / K' \right\}^{1/p'}, \quad q = \int_{\xi}^{x'} r(t) dx', \dots \dots \dots (2.11)$$

$$x' = \frac{1}{p' K'^{1/p'}} \int_{\tau}^t ds \left\{ \int_{\tau}^s r(z) dz \right\}^{1/p'-1} + \xi', \dots \dots \dots (2.12)$$

なお、斜面上の流れが Manning の抵抗法則にしたがうものとする、つぎのようになる。

$$K' = (n' / \sqrt{\sin \theta'})^{1/p'}, \quad p' = 3/5.$$

上にえられた (2.8) および (2.12) 式は雨水の伝播状態を表わす式であつて、(2.6) および (2.11) 式は伝播式上で成立する流量の関係を示すものである。これらの諸式は以下における考察の基礎となるものであるが、ここでそれらの物理的意義を説明しておく。

図-2.1 矩形模型流域図
Fig. 2.1 Schematic diagram of a rectangular model basin.

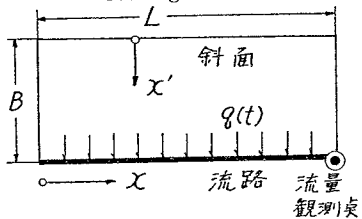
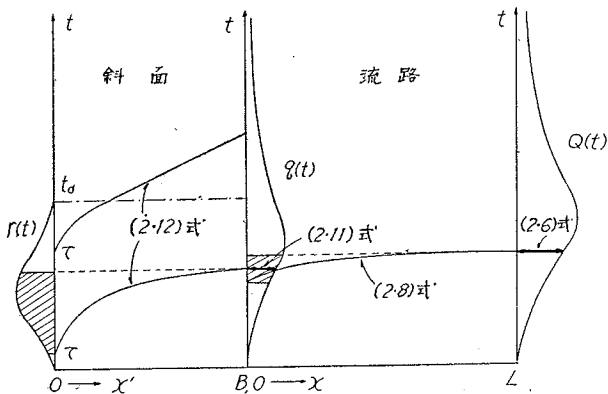


図-2.2 雨水擾乱の伝播状態および伝播式と流量式との関係
Fig. 2.2 Schematic diagram showing propagation states of rainfall disturbance and relations between equations of propagation and discharge.



流路への流入量は時間的に変動するが、場所的には一様と仮定しているから、図-2.1 のように片側に一本の流路をもつ矩形流域(あるいは平行四辺形流域)について考えていることになる。流路が流域の中を流れている場合も、取り扱いは全く同様であつて、両斜面からの流入量を合せて $q(t)$ とすればよい。座標は斜面ではその上流端から雨水の平均的な流下径路に沿つてとり、流路ではその上流端から下流端に向つてとつて、斜面上の流下距離を B とし、流路長を L とする。なお、こうした座標系をとつた場合には、(2.8) および (2.12) 式において ξ, ξ' が

ともに 0 となるはずである。

斜面上流端に始まつた雨水の伝播が流路端 B に達して流路に流入し、流路下流端の観測点に向つて流下していく過程を示すと、図-2.2 のとおりである。斜面上および流路内の雨水の伝播状態を表わす各特性曲線は (2.12) および (2.8) 式で与えられ、(2.11) および (2.6) 式は流路端の流入量および観測点の流量にはそれぞれの伝播時間内の降雨および流入量に関与することを示し、図に斜線を施した部分で表わされる。なお、斜面および流路の特性を示す四つの量 p', K', p, K は、それぞれの遅滞効果を表わしていることになる。

最後に、運動方程式として Manning の抵抗法則を採用した点について、ふりかへつておこう。まず、斜面上の流れは降雨によつて発生し、その水深は数 mm ないし数 cm であつて、土壌表面を薄くおおつて流下する。こうした流れは、薄層流 (Thin sheet flow), 浅水流 (Shallow flow), 地表流 (Overland flow) あるいは低水流 (Low flow) といった名称でよばれている。しかし、流域斜面の特性である植物による被覆と極端な不均一性を考慮している点において、流域斜面流の定義としては、Palmer の名づけた低水流が妥当なものと考えられる。

土壌表面を薄くおおつて流れる流れについては、従来から多くの研究があり、そのほとんどが流れの性格を Reynolds 数によつて判断しているようであるが、層流から乱流に移る限界 Reynolds 数としては、310、300~330³⁾、あるいは 550~770⁴⁾ といった数字をあげている。開水路の流れでは一般に 500 程度と考えられているが、上掲の値は一例を除いてはそれよりかなり小さく、粗度の増加に応じて限界 Reynolds 数が減少するという岩垣博士の実験結果⁵⁾と較べて、興味の深いことといえよう。いずれにしても、流域斜面流でも層流と乱流の二つの領域が存在することになるが、斜面の極度の不均一さを考慮すれば、斜面流全体にわたつて乱流として取り扱う方が適当と思われる。このことは、Palmer が草地における大規模な実験⁶⁾によつて、流量が水深の 5/3 乗に比例し、したがつて流れが乱流でしかも Manning の抵抗法則に従うことを見出している点からも、十分妥当なものといえよう。

また流域斜面流では、摩擦の効果が卓越するものと考えられるから、慣性項、水面勾配の変化率、降雨による流入および浸透による流出などが流れの運動状態におよぼす影響は考慮しなかつた。

流路における運動方程式として、Manning の抵抗法則を選ぶことは、洪水流の頂部付近において近似的に許されるに過ぎないが、流出現象で工学的に最も重要な特性が最大流量にあることと、次節で述べるように流出関係におよぼす流域の特性は斜面が支配的であることを考慮すれば、流出問題においてこの近似による誤差は、それほど問題とならないものと考えられる。

以上の仮定や近似は、末石助教授⁷⁾が特性曲線法を適用し、大戸川および由良川の出水を解析して良好な結果をえた場合に用いたものと全く同一であることを付記しておく。

(2) 二、三の流出特性と降雨および流域の特性との関係

ここでは前節で求めた基礎方程式を用いて、二、三の重要な流出特性と降雨および流域の諸特性との関係を明らかにするが、これらの成果は後に述べる単位図法に関する考察の基礎を与えるものである。

(a) 雨水擾乱の伝播時間について ここでいう伝播時間は、降雨という流入によつて生じた擾乱の伝播についてであつて、水粒子そのものの伝播についてはではない。物理的には、一種の波動の移行として理解できよう。

二次元流において、流れが Manning の抵抗法則に従うとし、かつ横からの流出入が運動状態におよぼす影響を無視すれば、雨水擾乱の伝播速度 dx/dt と平均流速 u の間には、

$$dx/dt = 5u/3$$

の関係があり、流れが Chézy の抵抗法則に従うとすれば、上式の右辺は $3u/2$ となる。一方、(2.5) 式から

$$dx/dt = dQ/dA$$

をうるが、これは洪水流頂部の伝播速度を表わす Kleitz-Seddon の法則と形式的に一致する。ここでいう擾乱の伝播は、横から流入のない有堤部における洪水流の伝播とは多少意義を異にするが、大体において似たものと考えてよい。しかし数学的にはその意義は明確であつて、 dx/dt は (2.1) および (2.2) 式 (あるいは (2.9)、(2.10) 式) からえられる積分曲面 Q (あるいは q) に含まれる曲線を $x-t$ 面に投影して求めた特性曲線の接線であり、また前節で求めた特性曲線式 (2.8) 式 (あるいは (2.12)) の上で (2.6) 式 (あるいは (2.11) 式) が成立して、

流量が関係づけられるのであるから、流出関係でいう雨水の流達時間という概念は、ここでいう擾乱の伝播時間という意味で考えられなければならない。したがつて Richard あるいは Zoch などが流達時間を流速から定義づけているのは、妥当なものとは考えられない。こうした意味で以下に述べる伝播時間は、水理学的な意義での雨水の流達時間を表現するものである。

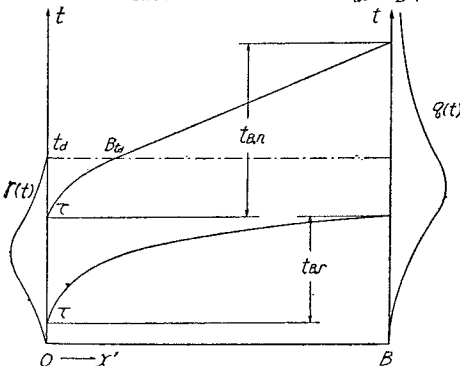
流域内に降つた雨は、斜面上を流れて流路に流入し、さらに流路内を流れて観測点に到達するから、まず流域斜面上の流れの伝播時間 t_B について考える。この場合、伝播時間 $(t-\tau)$ と水文量との関係は、(2.12) 式によつて次式のように表わされる。

$$p' BK^{1/p'} = \int_{\tau}^t ds \left\{ \int_{\tau}^s r(z) dz \right\}^{1/p'-1} \dots \dots \dots (2.13)$$

斜面上の流れは、降雨がある場合とない場合とで機構を異にするから、最初に降雨継続時間中に雨水擾乱の伝播が斜面

図-2.3 流域斜面の伝播状態を表わす特性曲線 ($t_d > t_{B,r}$)

Fig. 2.3 Characteristic curves showing propagation states of rainfall disturbance on side slope surface in the case of $t_d > t_{B,r}$.



全体をおおするような場合の伝播時間 $t_{B,r}$ について考えよう。こういう場合には、(2.13) 式の右辺の積分は、伝播時間内の平均降雨強度 r_m を用い、つぎのように書き直される。

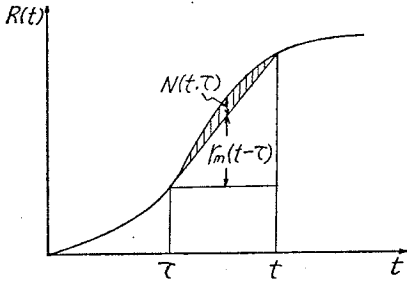
$$\int_{\tau}^t ds \left\{ \int_{\tau}^s r(z) dz \right\}^{1/p'-1} = \int_{\tau}^t \left[r_m(t-\tau) + \left\{ R(t) - R(\tau) - r_m(t-\tau) \right\} \right]^{1/p'-1} dt, \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

ただし、 $R(t) = \int_0^t r(t) dt$, $r_m = \int_{t_{B,r}} r(t) dt / \int_{t_{B,r}} dt$

上式における右辺被積分項の第二項

$$\{R(t) - R(\tau)\} - r_m(t-\tau) = N(t, \tau) \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

図-2.4 降雨の時間的分布形状と $N(t, \tau)$ との関係
Fig. 2.4 Relation between rainfall hourly distribution and $N(t, \tau)$



は、伝播時間内における降雨の時間分布形状が伝播時間におよぼす効果を示すものであつて、その積分は図-2.4 に示す影線部分に相当する。この $N(t, \tau)$ は、伝播時間内の降雨 $r(t)$ の t に関する一次微係数の正負によつて符号が変わり、つぎの関係がある。

$$dr/dt \geq 0 \text{ に対し, } N(t, \tau) \leq 0 \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

しかしいずれにしても、 $N(t, \tau)$ は被積分項の第一項の平均降雨強度項 $r_m(t-\tau)$ に較べていちじるしく小さいから、(2.14) 式は十分の近似度をもつて、

$$p' BK^{1/p'} = \int_0^{t-\tau} (r_m t)^{1/p'-1} dt \quad \dots\dots\dots(2.17)$$

と表わすことができる。これは容易に積分できるから、

$$t_{B,r} = t - \tau = K' B^{p'} / r_m^{1-p'} \quad \dots\dots\dots(2.18)$$

として、伝播時間とその間の平均降雨強度および流域特性との関係式を求めることができる。この式には $N(t, \tau) = 0$ とした近似が入つており、実際の伝播時間 $t_{B,s}$ とここで求めた伝播時間 $t_{B,r}$ との間には、(2.16) 式の関係からつぎのような性質がある。

$$dr/dt \geq 0 \text{ に対し, } t_{B,r} \leq t_{B,s} \quad \dots\dots\dots(2.19)$$

したがつて伝播時間内の降雨の平均強度が等しくても、降雨曲線の変化率 dr/dt によつて、伝播時間が影響されることになる。一般的には、降雨強度が増加していく部分の伝播時間が減少していく部分のそれよりも大きいといえるが、降雨の形状項 $N(t, \tau)$ は平均強度項 $r_m(t-\tau)$ に比していちじるしく小さいから、降雨の分布形状の効果を無視した(2.18)式の精度は十分高いといつてよい。なお、後に述べる最大流量の発生条件から、最大流量を発生する伝播の出発時刻 τ_p と到達時刻 t_p との間には、降雨のピークをはさんで $r(\tau_p) = r(t_p)$ という関係があるから、 τ_p と t_p の間の降雨の分布形状の影響が相殺されて、 $N(t, \tau)$ の積分値はほとんど0に等しくなるはずである。

つぎに斜面上流端から出発した雨水の擾乱が流路に到達する途中で降雨が終つた場合について、その伝播時間 $t_{B,n}$ の関係を考えよう。この場合 図-2.3 に示すように、 τ から出発した雨水が降雨終了時刻 t_d までに到達した距離を $B_{t,d}$ で表わすと、降雨の分布形状の効果を無視して、(2.17) 式からつぎの関係がえられる。

$$p' B_{t,d} K^{1/p'} = \int_0^{t_d-\tau} (r_m t)^{1/p'-1} dt = p' r_m^{1/p'-1} (t_d-\tau)^{1/p'}, \quad \dots\dots\dots(2.20)$$

ただし、 $r_m = \int_{\tau}^{t_d} r(t) dt / \int_{\tau}^{t_d} dt$.

一方、 $B_{t,d}$ における伝播速度は、(2.12) 式から

$$\left(\frac{dx'}{dt} \right)_{t=t_d} = \frac{1}{p' K^{1/p'}} \left\{ \int_{\tau}^{t_d} r(t) dt \right\}^{1/p'-1} = \frac{\{r_m(t_d-\tau)\}^{1/p'-1}}{p' K^{1/p'}} \quad \dots\dots\dots(2.21)$$

となる。したがつて $B_{t,d}$ から流路端 B までに要する伝播時間 $(t-t_d)$ は、つぎのように計算される。

$$t-t_d = \frac{B-B_{t,d}}{(dx'/dt)_{t=t_d}} = (B-B_{t,d}) \frac{p' K^{1/p'}}{\{r_m(t_d-\tau)\}^{1/p'-1}} \quad \dots\dots\dots(2.22)$$

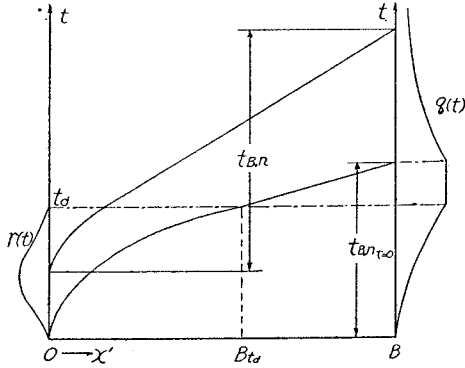
(2.21) と (2.22) の両式から $B_{t,d}$ を消去して整理すると、

$$(t_d-\tau)^{1/p'-1} \{ (t-t_d) + p'(t_d-\tau) \} = p' BK^{1/p'} / r_m^{1/p'-1} \quad \dots\dots\dots(2.23)$$

となり、 τ および t と降雨、流域の特性との関係が求められる。この場合の伝播時間 $t_{B,n} = t - \tau$ を上式から解析的に求めることは、一般的には困難であるが、流入量 $q(t)$ のピークの起時は 図-2.5 に示すように $\tau=0$ の擾乱が到達する時刻と t_d との間にある。したがつて工学的な重要性に着目すれば、 $\tau=0$ の場合を考えればよく、この場合の伝播時間を $t_{B,n\tau=0}$ とすれば、(2.23) 式からただちにつぎの関係が導かれる。

図-2.5 流域斜面の伝播状態を表わす特性曲線 ($t_d < t_{B,r}$)

Fig. 2.5 Characteristic curves showing propagation states of rainfall disturbance on side slope surface in the case of $t_d < t_{B,r}$



関係が求められる。

$$t_L = KL^p/q_m^{1-p}, \quad \text{ただし } q_m = \int_{t_L}^t q(t) dt / \int_{t_L}^t dt \dots (2.26)$$

なお、自然流域における流出過程を本理論で数値的に追跡するには、流域をいくつかの小流域に分割する必要があります²⁾、この場合には各分割流域の上流端からの流入量 $Q(0, \tau)$ はいちじるしく大きくなり、横からの流入効果を無視することができる。したがって各分割流域内の流路における伝播時間 t_L は、(2.25) 式で $q(t)$ を無視してえられる関係

$$t_L = pLKQ(0, \tau)^{p-1} \dots (2.27)$$

によればよいが、計算方法については本論文の目的外であるから、この程度にとどめておこう。

(b) 斜面および流路の特性が流出関係におよぼす影響の比較 流域特性が流出関係におよぼす効果については、すでに特性曲線法による計算法を用いて詳しく論議し、山間地流域では斜面特性が流路特性よりもいちじるしく大きい影響を与えることを確かめている³⁾。ここではこの問題を解析的な形で改めて考察しよう。

一般に流出特性を決定するのは伝播時間であつて、伝播時間は遅滞の位相差を表わすだけでなく、流れの量をも規定する。このことは、観測点における流量 Q が一般に

$$Q = \int_{t_L}^t \frac{\int_{t_B}^t r(t) dt}{t_B} \cdot dt \cdot \frac{BL}{t_L}$$

の形で表わされ、 B, L および $r(t)$ も伝播時間 t_B, t_L を支配し、結局 Q は t_B, t_L によつてきまつてくるからである。

このように流量曲線は降雨曲線の一種の写像とも考えられ、その写像関係を決定するのが伝播時間であり、この意味で伝播時間は流出関係におよぼす流域特性の効果を総合的に表現するものといえよう。伝播時間 t_B, t_L がともに 0 の場合には、降雨曲線はそのままの形で流量曲線に移行するから、流域特性の効果は全くないことになる。伝播時間の増加は、流量への写像をひずめる効果を大きくするから、これは結局流域特性の効果の増大を意味する。したがって斜面と流路とが流出関係におよぼす効果を比較するには、それぞれの伝播時間の大小を検討すればよいであろう。

ここでは、降雨中に雨水擾乱の伝播が斜面全体をおおつる場合を取り扱うが、洪水を対象とする流出問題では、すべてこうした場合と考えてよい。(2.18) および (2.26) の両式から、斜面および流路における伝播時間 t_B, t_L はそれぞれ

$$t_B = K' B^{p'} / r_m^{1-p'}, \quad \text{ただし } r_m = \int_{t_B}^t r(t) dt / \int_{t_B}^t dt \dots (2.28)$$

$$t_L = KL^p / q_m^{1-p}, \quad \text{ただし } q_m = \int_{t_L}^t q(t) dt / \int_{t_L}^t dt \dots (2.29)$$

で表わされる。ところが雨水はまず斜面上を流れて流路に流入し、さらに流路を通つて観測点に達するから、 t_B と t_L との比較するには、図-2.2 に示すように降雨の同一時間部分に対応するものについて考えねばならぬ

$$\left. \begin{aligned} t_{B,n\tau=0} &= p' BK'^{1/p'} / (R_{td})^{1/p'-1} + (1-p') t_d, \\ \text{ただし, } R_{td} &= \int_0^{t_d} r(t) dt. \end{aligned} \right\} (2.24)$$

つぎに流路においては、上流端から下流端までの伝播時間 $t_L = t - \tau$ と、横からの流入量 $q(t)$ 、流路上流端からの流入量 $Q(0, \tau)$ および流路特性との間に、(2.8) 式によつてつぎの関係が成立する。

$$pLK = \int_{\tau}^t ds \left[\left\{ \int_{\tau}^s q(z) dz / K \right\}^{1/p} + Q(0, \tau) \right]^{1-p} (2.25)$$

この式は、流路内における雨水の伝播状態が、横からの流入量 $q(t)$ と流路上流端からの流入量 $Q(0, \tau)$ の二つの要素に支配されることを示すが、特別の場合を除いて $Q(0, \tau) = 0$ と考えてよい。また短期間の急激な流出現象、すなわち洪水を対象とする場合には、常に $q(t)$ があると考えてよく、斜面の遅滞効果によつて $q(t)$ は $r(t)$ に較べてかなり扁平化されるから、 $q(t)$ の形状効果を無視することができよう。したがつて結局、(2.18) 式の誘導と全く同様にして、つぎの

い。この場合には、(2.11)式からつぎの関係が成立する。

$$q_m = r_m B \dots\dots\dots (2.30)$$

したがって、(2.28) ~ (2.30)の3式から、

$$S_i \equiv \frac{t_L}{t_B} = \frac{KL^p}{K'B^{1-(p-p')}r_m^{p-p'}} \dots\dots\dots (2.31)$$

となる。ここに、 p' および p はそれぞれ斜面および流路における断面積～流量関係を示す値であるが、流れがともに Manning の法則に従うとすると、 p' と p とはほとんど相等しく、実測記録^{7),9)}によると、 $p \geq p'$ であつて $p-p'$ は大体 0.1 程度である。斜面上の流れを二次元流と考え、流路形状を矩形とすれば、 $p'=p=0.6$ となる。したがつて $p'=p$ の近似をとつて、(2.31)式を

$$S_i = KL^p / (K'B) \dots\dots\dots (2.32)$$

としても、十分の精度をもつてであろう。この式によれば、 S_i は流域特性のみに支配され、降雨特性に関係しないことがわかるのであつて、流域特性と流出特性の関係を定量的に表わす重要な無次元表示と考えることができ、Horton の形状係数 $F=B/L$ に較べて、はるかに水理的意義の明らかなものである。

自然流域では一般に K' は K の数倍程度の値であるから^{7),9)}、 $K'=5K$ とおき、 $B=1000$ m、 $L=20000$ m とおいて、 $p=0.6$ とすると、(2.32)式から $S_i \approx 1/10$ となる。したがつて、自然流域の S_i の値は、数分の1から数十分の1程度であることがわかる。 $S_i=1$ の場合は、降雨から流量への時間的遅れにおよぼす斜面と流路との効果が等しいことを意味し、 S_i が小さくなるほど、斜面の効果が流路のそれに比して大きいことを示しており、上の結果は斜面が流路に較べてきわめて大きい効果をおよぼすことを実証するものである。

また面積一定の流域からの出水を較べると、 L/B を増すほど、斜面上流端から観測点までの到達時間が減少することを証明できるが、同時に降雨の平均強度が低下するという経験的事実を考えると、 L/B の値のみをもつて出水の危険度を判定することは早計であろう。

(c) 最大流量の発生条件 ここでは、降雨のどの時間部分が最大流量に関与するかという問題を取り扱つて、最大流量を発生する伝播の出発時刻と到達時刻との関係を求めることにする。この場合、斜面から流路への流入量曲線についての条件を与えれば、前項で考察したように流路内伝播の流出関係におよぼす効果がきわめて小さいことから、観測点における流出機構も近似的にはその条件に支配されるものと考えてよい。

さて、斜面から流路への流入量 $q(t)$ は、(2.11)式から

$$q(t) = \left\{ \int_{\tau}^t r(t) dt / K' \right\}^{1/p'} \dots\dots\dots (2.33)$$

$$q(t) = r_m B \dots\dots\dots (2.34)$$

と表わされ、(2.34)式に(2.18)式を入れて r_m を消去すると、

$$q(t) = \{BK' / (t-\tau)\}^{1/(1-p')} \dots\dots\dots (2.35)$$

となる。さらに、(2.33)および(2.35)式を t で微分して0とおけば、最大流入量の発生条件としてつぎの2式をうる。

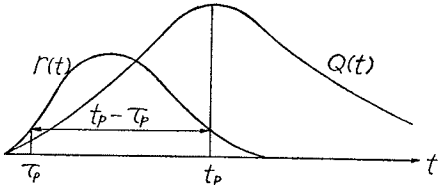
$$r(t) - \frac{d}{dt} \int_{\tau}^t r(t) dt = 0, \dots\dots\dots (2.36)$$

および $\frac{d}{dt}(t-\tau) = 0 \dots\dots\dots (2.37)$

(2.37)式は最大流入量を発生する降雨部分の伝播時間が極小であることを意味し、またこのとき t と τ の微分が等しいことを示している。したがつて(2.36)式から、最大流入量を発生する伝播の出発時刻 τ_p と到達時刻 t_p とにおける降雨強度が相等しいことになり、

$$r(\tau_p) = r(t_p) \dots\dots\dots (2.38)$$

Fig. 2.6 Relation between $(t_p - \tau_p)$ and curves of rainfall and discharge



と表わされる。この式は、降雨のピークをはさんで強度の等しい時間内の降雨が最大流入量に関与することを示すもので、こうした関係が観測点流量においても成立すると考え、かつ損失現象を考慮しなければ、降雨と流量の実測記録を用い、図-2.6 のようにして、ただちに最大流量の伝播時間 $(t_p - \tau_p)$ を求めることができる。

なお厳密には(2.38)式は流路への流入量について成立するものであるから、図-2.6 のような操作で求められた最大流量の伝播時間に、どの程度の誤差があるかを考えて

おく必要がある。この場合、伝播の到達時刻 t_p は確かに最大流量のおこる時刻であるから問題はなく、誤差の原因は出発時刻 τ_p にあるはずである。実際には流路内の伝播時間 t_L によつて、最大流量伝播の出発時刻 τ_{ps} における降雨強度 $r(\tau_{ps})$ は一般に $r(\tau_p)$ より少し大きくなるから、図-2.6 のようにして求めた $(t_p - \tau_p)$ の値は実際の伝播時間 $(t_p - \tau_{ps})$ より少し過大になつてくる。そこで両者の関係を、

$$(t_p - \tau_p) = (t_p - \tau_{ps}) + lt_L \dots\dots\dots (2.39)$$

とおけば、 l は τ_p と τ_{ps} の間の降雨の分布形状によつて変化し、一般に 0 より大きい値であつて、 τ_p 直後の t_L 区間および t_p 直前の t_L 区間の降雨の時間分布が等しいときはほぼ 1/2 の値をとる*。さらに

$$t_p - \tau_{ps} = t_B + mt_L \dots\dots\dots (2.40)$$

と表わされ、 m は t_L 時間内の流入量 $q(t)$ の形状によつて変化するが、 $q(t)$ が $r(t)$ に較べてかなり扁平化されているから、 m の値はほぼ 1/2 と考えてよい**。

以上の2式から、誤差 lt_L と $(t_p - \tau_p)$ との比 σ は、

$$\sigma \equiv lt_L / (t_p - \tau_p) = lS_t / \{1 + (l+m)S_t\} \dots\dots\dots (2.41)$$

となるから、実伝播時間 $(t_p - \tau_{ps})$ は次式で与えられる。

$$t_p - \tau_{ps} = (t_p - \tau_p)(1 - \sigma) = (t_p - \tau_p)[1 - lS_t / \{1 + (l+m)S_t\}] \dots\dots\dots (2.42)$$

したがつて、流路内の伝播時間 t_L の効果が大きいと考えられるときは、 l および m を 1/2 とおいて (2.42) 式によつて補正すればよい。しかし前述のように、自然流路の S_t の値は数分の1から数十分の1程度であるから、わが国の河川のような小流域の場合には一般に σ がきわめて小さく、(2.38) 式をそのまま観測点最大流量の発生条件と考えてよいであろう。

(d) 斜面と流路の要素の総合化 斜面と流路とは、雨水の挙動がいちじるしく違つているから、これらを区別して取り扱うことが必要である。しかし、斜面と流路のそれぞれの要素には物理的意義において対応するものが多く、ことに地表面流だけを対象とする場合には、流下距離、勾配および粗度係数といった全く同じ物理的意義をもつた要素からなつていると考えてよい。したがつて、単位図法を対象とした本論文の目的からいつて、結果としては斜面と流路を切り離して処理したときと同一の現象形態を与えるような総合量として、単一の流域要素を考えることができる。こうした意味での総合要素を添字 0 をつけて表わすこととし、

- L_0 : 流下距離で、 B と L の総合量
- $\sin \theta_0$: 勾配で、 $\sin \theta'$ と $\sin \theta$ の総合量
- n_0 : 粗度係数で、 n' と n の総合量
- K_0 : 流域の要素で、 K' と K の総合量

とする。以下の考察では、流域特性としてこれらの総合要素を用いることにするが、これらと斜面および流路の特性との相関は非常に複雑であつて、単に加えたり平均値をとつたりすることは許されない。B. D. Richard などの従来の研究では、ほとんどが斜面と流路を区別せずに等価に取り扱い、降雨はその降下点から観測点に向つて直線的に流れるとしているが、こうした立場に立てば、総合要素の決定はかなり容易になる。しかし実際にはこの仮定は妥当でなく、ここでことさらに総合要素と名付けた意味はこの点にあるのであつて、その意義は流出機構との関連において考えていかねばならない。したがつて、最大流量の遅れに関する Snyder¹⁰⁾ や中安博士¹¹⁾ などの経験公式において、観測点から流路最遠点までの距離と流域重心点までの距離との幾何平均あるいは流域最大幅にいたる距離との幾何平均として、流下距離の効果が導入されていることは、注目すべきものといえよう。

総合要素と斜面および流路の要素との相関は、今後の重要な課題であるが、前述の流路、斜面の伝播時間比 S_t は一つの示唆を与えるものであつて、その考察結果からみて、総合要素は主として斜面要素に支配されると考えることができよう。

3. 単位図法の力学的意義と流出現象の線型性

(1) 単位図法の力学的意義

* この場合、斜面と流路におけるそれぞれの最大流入量および最大流量の発生条件と、流入量および伝播の式(2.11), (2.18) から、 $l = (1/2)(r_{mtL}/r_{mtL'}) \gtrsim 1/2$ なることを証明できる。ここに、 r_{mtL} は t_L 区間の平均降雨強度、 $r_{mtL'}$ は流入ピークから t_p までの時間 t_L' 区間の平均降雨強度であつて、 $r_{mtL} \gtrsim r_{mtL'}$ の関係にあるが、近似的に両者を等しいと考えてよい。

** $m = t_L'/t_L$ であるから、* の場合と同様に τ_p 直後の t_L 区間と t_p 直前の t_L 区間の降雨分布が等しいと仮定すれば、 $m = l$ となることを証明できる。しかし、こうした仮定の拘束は、 l に対しては強いが m に対しては弱く、この仮定からかなり離れたような場合においても、 m はほぼ 1/2 と考えてよいことを付記しておく。

ここでは単位図法が成立するための力学的条件を述べるが、流域の諸要素は前章で説明した総合要素で表わし、また運動方程式の指数 p および p' はほとんど等しいとして、以下ではともに p を用いることにする。

総合要素は前述のように主として斜面要素に支配されるが、最も問題になる雨水の流下径路については、流域地形が極度に不均一な関係上、あらかじめ厳密な形で表現することがむずかしい。しかしここでは、ある力学的法則にもとづいて生れたと考えられる単位図法と、これとは異なる法則に従っていると考えられる実際の流出現象を比較するのが目的であるから、両者において流下径路そのものは等しいとみてよいであろう。そこで流下径路に沿つてとるという概念的な意味で、総合流下座標 x_0 を考えることにする。しかしこの座標系は、流域内のある地点から観測点に向つて雨水が直線的に流下するといった従来の意味におけるものでなく、出発点によつて種々の径路をもつことが予想されるが、等高線に直角方向に連続したものとすることも、一つの考え方であろう。この場合、斜面と流路とを形式的には区別していないが、適当に総合要素を用いることによつて、両者を区別したと同様な結果を観測点における流出現象に与えることができ、またこの座標系下では全体にわたつて降雨を流入量とすればよい。

以上のように考えると、総合流下座標系 x_0 における雨水伝播の特性曲線式は、前章における基礎式から、

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{1}{pK_0^{1/p}} \left\{ \int_{\tau}^t r(t) dt \right\}^{1/p-1}, \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\text{または } x_0 = \frac{1}{pK_0^{1/p}} \int_{\tau}^t ds \left[\int_{\tau}^s r(z) dz \right]^{1/p-1} \dots \dots \dots (3.2)$$

と表わされ、その上で流量の関係式

$$Q = \left[\int_{\tau}^t r(t) dt / K_0 \right]^{1/p} \dots \dots \dots (3.3)$$

が成立することになる。この流量 Q はある一つの流下座標 x_0 に沿つたもので、実際の観測点流量はこの Q をすべての流下方向について積分したものでなければならない。

また、総合流下座標系では流れを二次元流としてよいから、運動方程式は

$$h = K_0 Q^p \dots \dots \dots (3.4)$$

となり、指数 p は Manning の抵抗法則によつた場合 0.6 となり、Palmer⁶⁾ の実験結果もその妥当性を実証していることは前述のとおりである。

さて単位図法は、流域の遅滞特性が流出量曲線によつて総合的に表現されるという基本的立場にたつて、つぎの三つの仮説にもとづいている。

1. 降雨の場所的分布は一様とし、ある一流域においては、時間平均強度および継続時間を等しくする降雨による流出は、その流域の前期条件にかかわらず、ある特定の型をもっている。
2. 継続時間が等しく、時間平均強度が変化する降雨群からの流出は、その時間配分は変化せず、各時間の流量が時間平均強度に比例して増減するだけである。
3. 前の二つの仮説は、降雨が孤立したものであつても、また一連降雨のなかのどこに位置していても、常に成立する。

以上の三つの仮説について力学的に検討するが、まず第一の仮説の最も重要な点は、流域では流出型が降雨条件のみによつて定まるといふことである。ところが一流域でもその特性が常に一定とは限らず、季節による樹草の繁茂状態の変化と降雨前の保湿度状態の変動によつて、例え降雨条件が同じであつても、流出形態がかなり異なってくるであろう。しかしこうした流域条件の問題は、力学的対象として考えるよりも、いわゆる水文学的考察によつて処理すべきものとして、ここでは一応この仮説を認めておくことにする。

第二、第三の仮説は、以下に述べるように全く等価であつて、現象の線型性に依存するものである。すなわち、流量が降雨強度に比例するという第二の仮説は、線型現象の特質である重ね合わせの原理にもとづくもので、降雨と流量の関係式 (3.3) において、 $p=1$ であることを必要とする。また第三の仮説は、雨水の伝播状態が降雨条件に影響されないことを示すもので、伝播式 (3.1) または (3.2) において $p=1$ であることを意味する。その場合には、伝播状態は明らかに流域特性 K_0 のみで定まり、伝播速度は

$$\frac{dx}{dt} = 1/K_0 = \sqrt{\sin \theta_0} / n_0$$

となつて、水深の効果を考慮しない Manning 型流速と同一のものになる。

以上の考察から明らかなように、単位図法の仮説が成立するのは、 $p=1$ となつて運動方程式が線型の場合であつて、第二および第三の仮説は線型仮説といえよう。立神博士¹²⁾は流量曲線の逓減部のみについて、Horton の貯

溜方程式から単位図法の成立条件を論じておられるが、本研究におけるような取り扱いによれば、単位図法仮説の成立条件として運動方程式が一次であることを要するから、当然立神博士の取り扱いをも含むことになる。

ところが実際の流出現象では一般に β は 1 でないから、単位図法の基本仮説が厳密に成立しないわけであるが、現在のところ最も優れた流出解析法として、単位図法が広く用いられている。例えば理論的な流出問題の取り扱いとして有名な Zoch の理論²⁾では、その前提としてまず、“任意時刻の流量はその時刻の貯溜量に比例する”、あるいは“排水点での流量はその水深に比例する”という仮定をおいているが、これは明らかに Horton 型貯溜方程式を認めるか、あるいは運動方程式が線型であることを意味し、単位図法の仮説の意義と全く同様である。したがって Zoch の理論は、単位図法に較べて、高次の力学的意義をもっているとは考えられない。さらに単位図法は単位図とよばれる単位流出量曲線によつて、個々の流域がもっている特有の性状を表現しようという優れた思想を含んでおり、極度に不均一な流域における雨水の流出現象を把握する一つの方法として、示唆に富むものといえよう。したがって単位図法は、力学的意義はかわらないとしても、その簡明さにおいてはもちろん、実際の流出現象を正しく把握できる点において、Zoch の理論よりはるかに優れたものと考えられる。

(2) 流出現象の線型性

前節で述べたように、単位図法は明らかに線型仮説にもとづいているから、その適用性が流出現象の線型性に依存していることはいうまでもない。わが国のように非線型性の強い流出現象に対しては、従来から単位図法の適合性が低下するといわれているが、流出現象の線型性の意義を明確にしておくことが、単位図法の精度あるふは適用限界といった実際的な工学上の問題を究明する基礎ともなるので、以下に少し考察を加えよう。

流出現象に関与する因子を大別すると、降雨特性と流域特性とになるから、これらの諸特性と現象の線型性との関連を考えていくことが必要である。一般に運動現象が急激なとき、つまり関係する物理量の時間および距離に関する微係数が大きいときには、その非線型の強度が増加するから、線型の基礎である重合わせの原理から求められる結果、すなわちここでは単位図法の精度低下が予想される。しかしある一地点における雨水流の挙動に直接関係し、運動方程式の線型性と関連があるのは、降雨特性としてはその平均強度と時間的変動であり、また流域特性としてはその勾配と摩擦をあらわす粗度であつて、降雨の継続時間や流域の面積および形状そのものは、運動方程式の線型性とは関連をもっていない。このことは、降雨の継続時間は現象の継続する時間、すなわち時間的な場を与えるものであり、また流域の面積や形状は現象の空間的な場を与えるものであつて、流出現象の線型性とは直接的な関連をもっていないからである。しかしわれわれの対象とする山間地の流出現象では、これらの時間的な場や空間的な場が、現象の線型性を直接支配する降雨や流域の要素とかなりな相関をもっているから、流出現象を全体として把握しようとする場合、これらの場の大きさが重合わせの原理から導かれる単位図法の精度に影響をもつことになる。それにしても、これはあくまで降雨および流域の諸特性との関連においての重合わせの近似度という問題であつて、現象の線型、非線型に関する要素の挙動によつては、単位図法の精度を高めもし、低めもするものであつて、単位図法の精度に対する場の効果を一義的に考えることはできないはずである。

4. 単位図法の精度と降雨および流域の諸特性との関係

前章の説明から明らかなように、降雨の平均強度と時間的変動および流域の勾配と粗度は、流出現象の線型性に直接関与するものであつて、単位図法の精度を左右する。すなわち、運動現象が急激で非線型性が強くなるのは、降雨の平均強度と時間的変動が大きく、粗度が小さくて勾配の大きい場合であつて、こうした場合には単位図法の精度は当然低下することになる。しかしながら、流域の大きさおよび形状と降雨の継続時間については、それだけでは単位図法の精度との関係を論ずることができない。そこでこれらの場の大小および形状と基礎方程式の線型性を直接支配する降雨および流域の特性との相関を考慮しながら、単位図法の精度との関係を求めていくことにする。

(1) 単位図法における伝播速度と流量の表示

単位図法の仮説によると、雨水の伝播速度 ω_u は一定の流域では降雨条件にかかわらず一定としているが、(3.1) 式を考慮して、

$$\omega_u = (1/\beta K_0^{1/\beta}) \alpha_t \dots\dots\dots (4.1)$$

と表わせば、 α_t はつぎのようになる。

$$\alpha_t = \left\{ \int_r^t r(t) dt \right\}^{1/\beta-1} \dots\dots\dots (4.2)$$

また単位図法の仮説では、流量 Q_u が降雨強度、実際にはある時間区分すなわち単位時間内の降雨量に比例するとしているが、(3.3) 式を考慮して、

$$Q_u = (\alpha_q / K_0^{1/p}) \int_{\tau}^t r(t) dt \dots\dots\dots(4.3)$$

と表わせば、 α_q はつぎのようになる。

$$\alpha_q = \left\{ \int_{\tau}^t r(t) dt \right\}^{1/p-1} \dots\dots\dots(4.4)$$

以上のようにすれば、単位図法の伝播速度および流量に関する係数 α_t 、 α_q の間に、

$$\alpha_t = \alpha_q \dots\dots\dots(4.5)$$

の関係があることになる。(4.1)~(4.5) 式と単位図法の仮説を考えると、一定の流域においては、 α_t あるいは α_q が降雨条件の変動に左右されず一定でなければならない。ところが(4.2)あるいは(4.4)式の右辺は、降雨の時間配分によつて変動し、また伝播に要する時間 $(t-\tau)$ が含まれている。しかも $(t-\tau)$ は降雨特性だけでなく、流域の諸特性にも左右されるから、流域特性が間接的に α_t あるいは α_q の変動の大小に関与し、これらの変動が単位図法の精度を支配することは明らかである。

さて、伝播の変動効果を表現する α_t と流量の変動効果を表現する α_q との間には、(4.5) 式の関係があるから、伝播に関する単位図法仮説と流量に関するそれとが、降雨および流域のいずれの特性にも支配されないで相関をもつことになる。このことは、きわめて興味ある事実であつて、総合単位図法への方向に一つの重要な基礎を与えるものであろう。なぜならば、単位図の縦距を単位時間内の雨量に比例させることによつて、流出量曲線が求められるという単位図法の仮説は、降雨の変動によつて α_t および α_q がともに変化しないことを示すものであつて、 α_t あるいは α_q のいずれか一方がこの条件を満足すれば、(4.5) 式から明らかなように他の一方もこの条件を満足することによつて、単位図法の伝播および流量についての二つの仮説が同時に成立することになるからである。

しかしながら、 α_t および α_q は降雨条件によつて変動し、またその変動の程度は流域の特性によつても支配され、単位図法の仮説が厳密には成立しないことになるが、以下に α_t および α_q の変動の程度と降雨および流域の特性との関係について、定性的に考察しよう。なお、 $\alpha_t = \alpha_q$ なる関係があるから、ここでは α_t のみを取りあげておく。

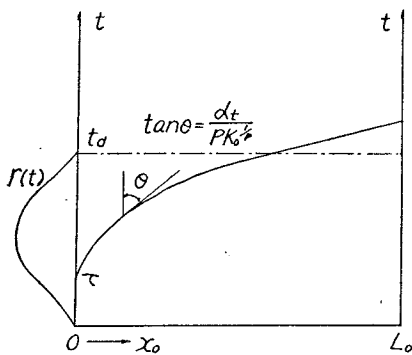
(2) $x_0 \sim t$ 面上における α_t の変動

α_t の $x_0 \sim t$ 面上の変動を考えると、(4.2) 式の関係によつて一般に τ 、 t および x_0 の関数となる。いま、 τ を固定し一つの特性曲線のみについて考えれば、その特性曲線上における α_t の変動は、

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \left\{ \int_{\tau}^t r(t) dt \right\}^{1/p-2} r(t) \geq 0$$

と表わされ、図-4.1 に示すように、 $r(t) > 0$ すなわち降雨の続く間は正であり、 $r(t) = 0$ すなわち降雨がやんだ

図-4.1 一特性曲線上における α_t の変動
Fig.4.1 Variation of α_t on a characteristic curve.



後は0となつて、 α_t は一定となる。ところが τ を固定しない場合には、 α_t の変動は τ によつても支配される。そこで x_0 を固定して、時間方向における α_t の変動を考えると、

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial t} = \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \left\{ \int_{\tau}^t r(t) dt \right\}^{1/p-2} \left\{ r(t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\tau} r(t) dt \right\}$$

となり、 α_t の時間的変動は上式右辺の第三括弧内の正負によつて増加または減少する。

さて、流域の大きさ L_0 と降雨の継続時間 t_d の大小によつて、流出機構はつぎの (a)、(b) の二つの場合にわけられる。

(a) L_0 が小さいか t_d が大きくて、 $\tau=0$ 、 $x_0=0$ から出発する標準特性曲線 s. c. が降雨中に下流端に到達する場合には、流量のピークは降雨中に生じる。

(b) L_0 が大きいとか t_d が小さくて、s. c. が降雨終了後に下流端に到達する場合には、流量のピークは降雨終了後に生じる。

そこでまず (a) の場合について考えよう。特性曲線が x_0 軸、すなわち $\tau=0$ の点から出発するときは、 $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\tau} r(t) dt = 0$ で $r(t) > 0$ であるから、 $\partial \alpha_t / \partial t > 0$ となつて、 α_t は s. c. までは単調に増加する。s. c. から t_d までは、 $\left\{ r(t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\tau} r(t) dt \right\}$ の正負によつて $\partial \alpha_t / \partial t \cong 0$ となり、 α_t の増減は降雨曲線の時間的変動に支配される。 t_d 以後は $r(t) = 0$ 、 $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\tau} r(t) dt > 0$ であるから、 $\partial \alpha_t / \partial t < 0$ となつて α_t は単調に減少する。以上

図-4.2 (a) の場合の $\alpha_t \sim t$ 面内における α_t の変動

Fig.4.2 Variation of α_t on $x_0 \sim t$ plane in the case of (a)

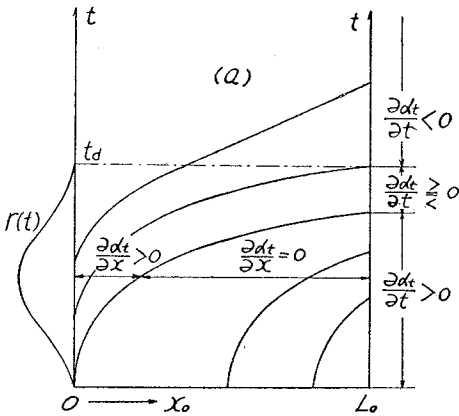
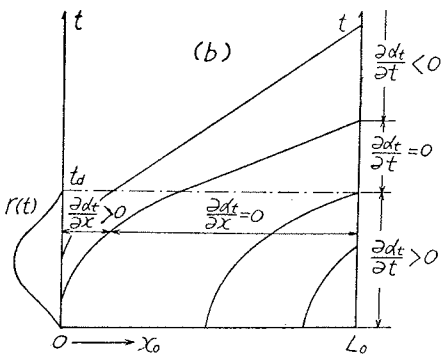


図-4.3 (b) の場合の $\alpha_t \sim t$ 面内における α_t の変動

Fig.4.3 Variation of α_t on $x_0 \sim t$ plane in the case of (b)



の関係を模式的に図示すれば、図-4.2 のとおりである。

つぎに (b) の場合には、 t_d までは $r(t) > 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r(t) dt = 0$ であるから、 $\frac{\partial \alpha_t}{\partial t} > 0$ となつて α_t は単調に増加する。 t_d 以後 s. c. までは $r(t) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r(t) dt = 0$ であるから、 $\frac{\partial \alpha_t}{\partial t} = 0$ となつて α_t は一定となる。s. c. 以後は $r(t) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r(t) dt > 0$ であるから、 $\frac{\partial \alpha_t}{\partial t} < 0$ となつて α_t は単調に減少する。以上の関係を模式的に図示すれば、図-4.3 のとおりである。

さらに α_t の x_0 方向の変動を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_0} &= \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_0} + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_t} \frac{\partial \tau}{\partial x_0} \\ &= \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \left\{ \int_{\tau}^t r(t) dt \right\}^{1/p-2} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\tau}^t r(t) dt \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_0} \end{aligned}$$

となり、 $\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\tau}^t r(t) dt$ および $\partial \tau / \partial x_0$ の正負を考えればよい。

この場合も α_t の t 方向の変動を考えたときと同様に、 L_0 および t_d の大小によつて (a), (b) 二つの流出機構にわけられるが、これらのいずれの場合についても、つぎのように考察することができる。すなわち、図-4.2 および 図-4.3 に示すようであつて、ともに $x_0 = 0$ から s. c. までは $\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\tau}^t r(t) dt < 0$, $\partial \tau / \partial x_0 < 0$ であるから、 $\frac{\partial \alpha_t}{\partial x_0} > 0$ となつて α_t は x_0 方向に単調に増加する。s. c. から下流端 L_0 までは $\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\tau}^t r(t) dt = 0$, $\partial \tau / \partial x_0 = 0$ であるから、 $\frac{\partial \alpha_t}{\partial x_0} = 0$ となつて α_t は x_0 方向に一定となるはずである。

(3) α_t の変動と流下距離および降雨継続時間との関係

前節で述べた L_0 , t_d という空間的、時間的場における α_t の変動にもとづいて、単位図法の精度と L_0 および t_d との関連を考察しよう。 L_0 および t_d の大小によつて流出機構が (a), (b) の二つの場合にわけられることは、さきに述べたとおりであるが、

これらをつなげて図示したのが 図-4.4 であつて、 L_{01} および L_{03} はそれぞれ (a), (b) に属する流下距離であり、 L_{02} はその境界である。この場合、 $L_{01} \leq L_{02} \leq L_{03}$ であることはいうまでもない。

(a) の場合には、 L_0 の増加につれて、 $\partial \alpha_t / \partial t \equiv 0$ の区域すなわち降雨の時間分布に左右される区域が減少し、(a) と (b) との境界 (c) にいたつてこの区域は 0 となる。(b) の場合には、 $\partial \alpha_t / \partial t = 0$ すなわち降雨の時間分布に影響されない区域が、 L_0 の増加につれて増していく。ところが前に述べたように、単位図法は α_t の時間的変動の減少につれて精度を向上するから、 L_0 の増加が単位図法の精度を向上させることになる。しかしこれは、降雨の時間的場である t_d と空間的場である L_0 とが互いに独立であるためにいえることであつて、両者が何らかの相関をもつならば、こうしたことを一義的にいうことができない。

降雨の時間的場の大きさ、すなわち t_d は α_t との関連に関する限り L_0 と逆関係にあるが、 t_d は流出現象の発生の源である降雨量との関連においてとりあげねばならない。降雨量は洪水の程度を直接左右するから、大洪水を問題とする場合は当然といえよう。降雨の量と強度が比例して、降雨の時間的分布が相似であるような場合は、単位図法の精度に対する t_d の減少の効果は、 L_0 の増加の効果と等価であるが、こうした場合の t_d の減少は降雨強度ひいては洪水の強度を減退させ、あまり問題とならないであろう。現実の問題として、洪水の程度に直接の効果をおよぼす降雨の量を一定と考えると、 t_d の減少は平均降雨強度を増加して、むしろ現象の非線型性を増大させることになる。また周知のように、 t_d の減少につれて一般に降雨強度を増加し、その時間的変動を急激ならしめるから、こうした場合の単位時間のとり方の複雑さと相まつて、工学的立場からすれば t_d の減少はむしろ単位図法の精度を低下させるであろう。

図-4.4 (a) および (b) の場合を結びつけて示した $\alpha_t \sim t$ 面内における α_t の時間的変動
 Fig.4.4 Hourly variation of α_t on $x_0 \sim t$ plane in the combined case of (a) and (b)

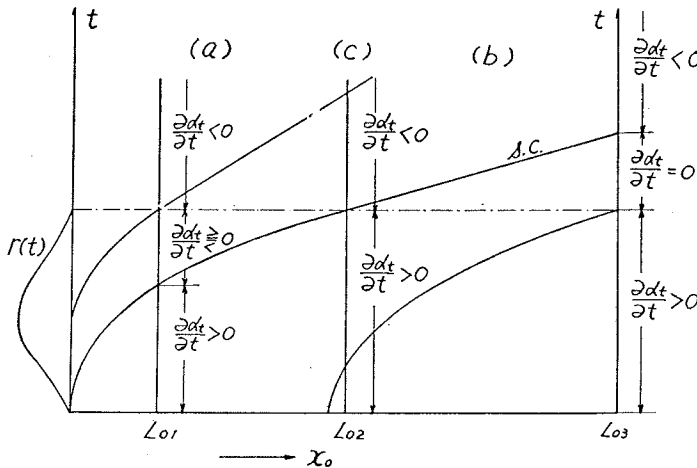


図-4.5 降雨の場所的分布と流下径路との関係
 Fig.4.5 Schematic diagram showing the relation between areal rainfall distribution and runoff route.

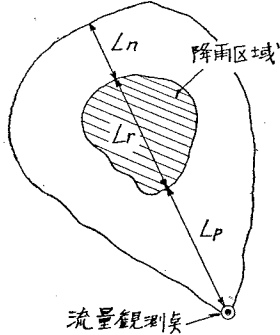
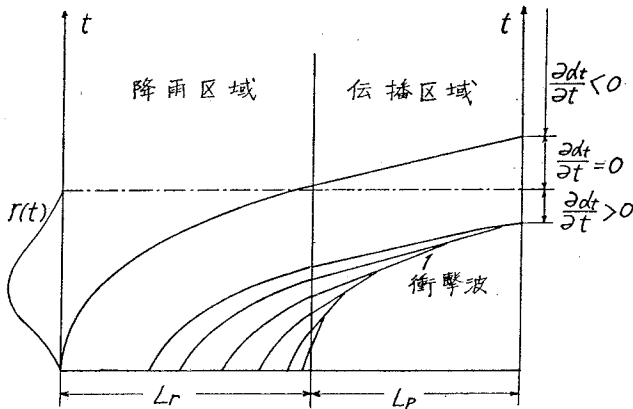


図-4.6 $L_p \neq 0$ の場合における α_t の時間的変動
 Fig.4.6 Hourly variation of α_t in the case of $L_p \neq 0$



問題となるのは運動方程式の非線型性にもとづく α_t の変動と降雨および流域の特性との相関関係であつて、 $\alpha_t =$

(4) 降雨の場所的分布と単位図法の精度

一般に大規模な現象を考える場合には、現象の発生源の場とその伝播の場とを分離する必要があるが、流出現象では前者は流域内の降雨区域であり、後者は降雨区域から観測点までの面積である。

流域面積の大きさをある代表的な距離を L_0 で表わすと、図-4.5 から明らかなように、 L_0 は次式で与えられる。

$$L_0 = L_n + L_r + L_p,$$

ここに、 L_n は流出現象に関与しない距離(面積)、 L_r は降雨のある距離(面積)、 L_p は現象が伝播していく距離(面積)である。したがつて、流出現象に直接関係するのは L_r と

L_p であつて、ここに降雨の場所的分布を考慮することが必要となる。そこで L_p と L_r の大小と α_t との関連を考えると、 L_p が 0 でない場合には、そこを流下する雨水の前面で一種の衝撃波が発生するから、 L_p の増下につれて下流端における $\partial \alpha_t / \partial t > 0$ の部分が減少し、 $\partial \alpha_t / \partial t = 0$ の部分が増加する。したがつて図-4.6 に示すように、 L_p の増加は α_t の時間的変動を減退させて、単位図法の精度を向上させる。なお、 L_p が増加すると浸透その他による雨量損失を増し、有効降雨の平均強度を低下するから、さらにこのことが助長されるであろう。したがつて、一流域における降雨面積、実際には洪水に最も効果の大きい降雨区域から流量観測点までの距離を増すほど、単位図法の適合性がよくなってくる。すなわち、単位図法の精度は L_p / L_r の増加とともに向上し、一般には L_p が流域面積の増加につれて大きくなるから、降雨の時間的分布の均一化とも相まつて、 L_0 の増加が単位図法の精度を向上させることになるはずである。

さらに、降雨の平均強度は流域面積を増すほど一般に減少するが、このことは面積の増加が流出現象をますます線型に近づけることを意味するから、この点からも単位図法の精度を向上させるものといえよう。

しかしながら、単位図はその基礎仮説によつて、流域内の一様な降雨からの流出量曲線であるとされているから、流域面積が過大になつて、降雨の場所的分布がはなはだしく不均一になると、 α_t の時間的変動の低下や平均降雨強度の減少よりも、基礎仮説からの偏倚の影響が大きくなつて、単位図法の精度はむしろ低下するであろう。米国で単位図法の適用が 2000 mile² 以上の流域には不適当といわれているのは、降雨分布の場所的不均一を考えたためと思われる。

(5) 単位図法の精度についての総括
 前節までの考察結果からわかるように、

$\left\{ \int_{\tau}^t r(t) dt \right\}^{1/p-1}$ の平均値のまわりの変動が大きくなれば、単位図法の精度が低下するわけである。いま、降雨 $r(t)$ を時間 t だけの偶然関数とみなすと、 α_t の集団は物理的条件で規制された時間区分 $(t-\tau)$ 内における $r(t)$ の和集合、つまり集合 $r(t)$ の部分集合の集合と考えることができ、こうした集団の平均値が時間区分 $(t-\tau)$ の増加につれてある一定値に近づくことは、確率的に証明されている。したがって、時間区分 $(t-\tau)$ を増加させるような物理的条件は、単位図法の精度を向上させることになる。この場合、降雨平均強度や流域の粗度および勾配といった現象の線型性に関与する要素と流下距離および降雨継続時間とは、単位図法の精度あるいは適合性との相関において、統計集団 $r(t)$ の時間区分 $(t-\tau)$ の大小との関連については形式的に同じ意味をもつが、その物理的意義が全く異なっていることを再び強調しておきたい。このことは、前節までの α_t 変動と単位図法の精度との関係についての考察が最大流量付近にかぎるのであつて、流出過程全体にわたるときは、 α_t は 0 からある値まで変化し、流出過程全体についての α_t 変動の強弱と場の大小との間には、一義的な相関を見出すことができないからである。ただ最大流量付近だけにかぎるときは、場の大きさの増加とともに α_t の分散の割合が小さくなるとしても、場の大小と線型性に関与する要素との間に相関があり、ことに降雨は時間だけの偶然関数でなく、場の大小とはかなりの相関があるから、こうした面からも場の大小と単位図法の精度との関係が考えられることになるのである。

要するに、線型性に関与する要素と単位図法の精度との関係は、力学的意義からわかるように一義的普遍的であるが、場の大きさを示す要素については、工学的的重要性および要素間の内的相関によつて、単位図法の精度との関係が考えられるのであつて、その関係が一義的でないことを注意すべきである。

以上を考慮して、線型性に関与する要素だけをとりあげると、つぎのような場合に単位図法の精度が向上する。

1. 降雨の平均強度が小さく、降雨曲線の変動がわずかで滑らかに変化する場合。
2. 流域の粗度が大きい場合、したがつて流域における樹草の繁茂状態はとくに重要な因子となるであろう。
3. 流域の平均勾配が小さい場合。

つぎに、場の大小および形状については、一般につぎのような場合に単位図法の適合性が増加するといえよう。

4. 流域面積が大きい場合、しかし過大になつて降雨の場所的分布があまり不均一になると、かえつて単位図法の適合性が低下するから、こうした場合には流域を適宜分割して適用すべきである。
5. 流域形状が比較的集約的である場合、これは降雨の場所的分布を均一化するとともに、斜面の流下距離を増加して、流域の総合的流下距離 L を増すという効果をも考慮しているからである。
6. 降雨の継続時間が比較的長い場合、しかしこれは降雨の総量および時間的分布と継続時間との相関を考慮しているためであつて、もし降雨が時間だけの偶然関数であるとすれば、結論は逆になつてくる。

5. 流出機構の分類と単位図法による最大流量の適合条件

雨水流出の機構は、降雨および流域の特性に支配され、したがつてまた流出機構の差異に応じて、単位図法の取り扱いを異にするべきである。また前章までに明らかにしたように、単位降雨の単位強度と単位時間をいかに適当に選んだとしても、その結果としてえられる単位流出量曲線すなわち単位図は、 α_t が時間の関数である以上、流出の時間的場所的の全過程を通じて、単位図法の仮説を満足することができない。実際問題としては、一流域では場所を固定した特定位置の流出が対象となるから、 α_t の時間的分布だけをとりあげればよいが、それにしても α_t が一般に時間の関数であるから、ある特定の位置、たとえば観測点における流出の時間的全過程を、単位図法によつて厳密に表現するわけにいかない。したがつて、流出問題に単位図法を適用する場合、流出過程のどの部分に着目するかによつて、単位降雨あるいは単位図の要素が違つてくるはずである。単位降雨を瞬間降雨と考えてよいという立場をよく見受けるが、これは単位図法の線型仮説が厳密に成立することを前提としたものであつて、流出の実態を無視したものと見えよう。

本章では、単位図法を適用するときの取り扱いの差異によつて流出機構を分類し、それぞれの場合について単位図法の適合条件を検討する。この場合流出のピークに着目することにするが、これは工学的立場からすれば当然であろう。

(1) α_t の平均化

単位図法によつて対象降雨からの流出のピークが正しく推定できるように、単位降雨を求めようとする場合、最大流量を発生する特性曲線 m. c. 上の α_t 、すなわち α_{t_p} が問題となるが、取り扱い上 m. c. の上における α_{t_p} の平均値 $(\alpha_{t_p})_m$ を考えた方が都合がよい。いま、m. c. 上における積分を \int_s で示すと、

$$(\alpha_{t_p})_m = \int_s \alpha_{t_p} dt / \int_s dt \dots \dots \dots (5.1)$$

であるが, m. c. が時間について単調増加するから, (5.1) 式はつぎの積分と等価になる。

$$(\alpha_{tp})_m = \int_{\tau_p}^{t_p} \alpha_{tp} dt / \int_{\tau_p}^{t_p} dt, \dots\dots\dots (5.2)$$

ここに, τ_p および t_p は m. c. の出発時刻と到達時刻である。ところが (4.2) および (3.2) 式から,

$$\int_{\tau_p}^{t_p} \alpha_{tp} dt = p L_0 K_0^{1/p}$$

の関係がえられるから, (5.2) 式は

$$(\alpha_{tp})_m = p L_0 K_0^{1/p} / (t_p - \tau_p) \dots\dots\dots (5.3)$$

となる。この関係は, L_0 を伝播時間 $(t_p - \tau_p)$ で割つた m. c. の平均接線 (伝播の平均速度) に $p K_0^{1/p}$ をかけたものが $(\alpha_{tp})_m$ であると考えても, 簡単に求めることができる。

(5.3) 式における $(t_p - \tau_p)$ は最大流量の伝播時間であるから, τ_p と t_p の間には最大流量の発生条件として,

$$r(\tau_p) = r(t_p)$$

の関係が成立しなければならないし, また降雨条件によつてはいくつものピークを生じるから, その場合には

$$t_p - \tau_p \leq t_{pi} - \tau_{pi}$$

を満足すべきこともいうまでもない。ここに, τ_{pi} と t_{pi} はそれぞれピークを発生する特性曲線の出発時刻と到達時刻である。

さて, $(t_p - \tau_p)$ の表現は, t_p が降雨時間中にあるか, またはそれ以後にあるかによつて異なつてくる。まず $t_p < t_d$ (前章(2)の(a)の場合) ならば, (2.18) 式から

$$t_p - \tau_p = K_0 L_0^p / r_{mp}^{1-p}, \quad \text{ただし } r_{mp} = \int_{\tau_p}^{t_p} r(t) dt / \int_{\tau_p}^{t_p} dt \dots\dots\dots (5.4)$$

となり, また $t_p > t_d$ (前章(2)の(b)の場合) ならば, (2.24) 式から

$$t_p - \tau_p = \left\{ p L_0 K_0^{1/p} + (1-p) r_m^{1/p-1} t_d^{1/p} \right\} / (r_m t_d)^{1/p-1},$$

$$\text{ただし, } r_m = \int_0^{t_d} r(t) dt / \int_0^{t_d} dt \dots\dots\dots (5.5)$$

となる。したがつて (5.3) ~ (5.5) 式からそれぞれの場合について α_{tp} の平均値はつぎのように表現され, これが後に述べる単位図法の決定因子となる。

$$t_p < t_d; (\alpha_{tp})_{m.s} = (p L_0 K_0^{1/p})^{1-p} (p r_{mp}^{1/p-1})^p, \dots\dots\dots (5.6)$$

$$t_p > t_d; (\alpha_{tp})_{m.t} = \left\{ p L_0 K_0^{1/p} (r_m t_d)^{1/p-1} \right\} / \left\{ p L_0 K_0^{1/p} + (1-p) r_m^{1/p-1} t_d^{1/p} \right\}, \dots\dots\dots (5.7)$$

(2) 流出機構の差異による分類

単位時間を t_u , 対象降雨の継続時間を t_d , 到達時間を t_c とすると, 流出機構の差異によつてつぎの三つの場合にわけられる。

(a) $t_u < t_c, t_d > t_c$ の場合: 流域の勾配が大きく, 粗度および流下距離が小さい場合であつて, 単位降雨の継続時間すなわち単位時間中には, 上流端からの伝播がその下流端に到達しないが, 対象降雨の継続時間が到達時間より長い場合である。これはわが国では, 単位図法を適用するときに考えられるほとんどすべての場合であつて, 以下では小流域の場合とよぶことにする。

(b) $t_u < t_c, t_d < t_c$ の場合: 単位時間, 対象降雨の継続時間がともに到達時間より短い場合で, 流下距離が大きい場合を指すことになる。米国では一般に最大流量が降雨終了後に生じるようであつて¹³⁾, この場合に相当するが, 以下では大流域の場合とよぶことにする。

(c) $t_u > t_c, t_d \geq t_c$ の場合: 単位時間を到達時間よりも大きくとつた場合であつて, 単位時間を適当に選んで単位図法の誤差をなるべく軽減しようという立場からは, 好ましいことではない。したがつて, 単位図法でとりあげられるのは, (a) および (b) の場合だけであらう。

(3) 単位図法による流出解析の適合条件

単位降雨の $(\alpha_{tp})_m$ を $(\alpha_{tp})_{m.u}$ とし, 対象降雨のそれを $(\alpha_{tp})_{m.n}$ とした場合, 単位図法を用いて最大流量を適確に求めるために必要な関係を; 上記の三つの場合についてそれぞれ導いておこう。

(a) $t_u < t_c, t_d > t_c$ の場合: 対象降雨による最大流量を $Q_{n.p}$ とすれば, つぎのように表わされる。

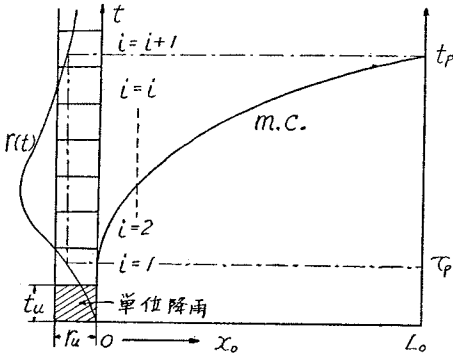
$$Q_{n.p} = \left\{ (\alpha_{tp})_{m.n} / K_0^{1/p} \right\} \int_{\tau_p}^{t_p} r(t) dt \dots\dots\dots (5.8)$$

つぎに, 対象降雨の最大流量を生じる伝播の平均速度が単位降雨の平均伝播速度より大きいか等しいという条件, すなわち $(\alpha_{tp})_{m.u} \leq (\alpha_{tp})_{m.n}$ を与え, 単位流出量曲線のピークが t_u から伝播の到達する時刻まで続くということと, 単位図法の二つの線型仮説とを考慮すれば, 単位図法による最大流量 $Q_{n.p}$ は,

$$Q_{u \cdot p} = \frac{(\alpha_{qp})_{m \cdot u}}{K_0^{1/p}} \left\{ m_1 \int_{\tau_p}^{t_{u_{i=1}}} r_u dt + \sum_{i=2}^i m_i \int_0^{t_u} r_u dt + m_{i+1} \int_{t_p - t_{u_{i=1}}}^{t_p} r_u dt \right\} \dots (5.9)$$

図-5.1 $t_u < t_c, t_d > t_c$ の場合の番号 i の説明図

Fig. 5.1 Schematic diagram showing the meaning of number i in the case of $t_u < t_c, t_d > t_c$



となる。ここに、 r_u は単位降雨の強度であり、 $(\alpha_{qp})_m$ は $(\alpha_{tp})_m$ に対応する流量の係数であつて、両者の間には (4.5) 式の関係がある。なお、番号 i の意味は 図-5.1 のとおりであつて、 τ_p を含む t_u 区間を $i=1$ とし、 t_p を含む t_u 区間を $i+1$ としている。また、 $i=1$ 以前の単位降雨の流量への影響は、小さいものとして無視している。

ところが単位図法の仮説から、

$$m_i = \left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_i / \int_0^{t_u} r_u dt$$

であるから、(5.9) 式を書き改めると、

$$Q_{u \cdot p} = \frac{(\alpha_{qp})_{m \cdot u}}{K_0^{1/p}} \left\{ \frac{\left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_{i=1}}{\int_0^{t_u} r_u dt} \int_{\tau_p}^{t_{u_{i=1}}} r_u dt + \sum_{i=2}^i \left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_i + \frac{\left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_{i=i+1}}{\int_0^{t_u} r_u dt} \int_{t_p - t_{u_{i=1}}}^{t_p} r_u dt \right\} \dots (5.10)$$

となり、(5.8) 式はつぎのように変形される。

$$Q_{n \cdot p} = \frac{(\alpha_{qp})_{m \cdot n}}{K_0^{1/p}} \left\{ \int_{\tau_p}^{t_{u_{i=1}}} r(t) dt + \sum_{i=2}^i \left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_i + \int_{t_p - t_{u_{i=1}}}^{t_p} r(t) dt \right\} \dots (5.11)$$

いま、 t_u を適当に小さく選べば、

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau_p}^{t_{u_{i=1}}} r(t) dt &\doteq \left\{ \left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_{i=1} / \int_0^{t_u} r_u dt \right\} \int_{\tau_p}^{t_{u_{i=1}}} r_u dt, \\ \int_{t_p - t_{u_{i=1}}}^{t_p} r(t) dt &\doteq \left\{ \left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_{i=i+1} / \int_0^{t_u} r_u dt \right\} \int_{t_p - t_{u_{i=1}}}^{t_p} r_u dt \end{aligned} \right\}$$

と近似できて、 $Q_{n \cdot p}$ と $Q_{u \cdot p}$ の $\{ \}$ 内の量が等しくなる。したがつて、 $(\alpha_{qp})_{m \cdot n} = (\alpha_{qp})_{m \cdot u}$ のときには、 $Q_{n \cdot p} = Q_{u \cdot p}$ となる。ところが α_q と α_t の間には (4.5) 式の関係があるから、結局

$$(\alpha_{tp})_{m \cdot n} = (\alpha_{tp})_{m \cdot u} \dots (5.12)$$

なる条件を満足すれば、対象降雨の最大流量は量的にも時間的にも単位図法による計算結果と一致することになる。

(b) $t_u < t_c, t_d < t_c$ の場合：この場合には $\tau_p = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} Q_{n \cdot p} &= \{ (\alpha_{qp})_{m \cdot n} / K_0^{1/p} \} \int_0^{t_d} r(t) dt \\ &= \{ (\alpha_{qp})_{m \cdot n} / K_0^{1/p} \} \left\{ \sum_{i=1}^i \left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_i \right\} \dots (5.13) \end{aligned}$$

となる。つぎに、 $(\alpha_{tp})_{m \cdot u} \leq (\alpha_{tp})_{m \cdot n}$ なる条件を与え、(a) の場合と同様な考慮をすると、

$$Q_{u \cdot p} = \{ (\alpha_{qp})_{m \cdot u} / K_0^{1/p} \} \left\{ \sum_{i=1}^i m_i \int_0^{t_u} r_u dt \right\} \dots (5.14)$$

と表わされ、単位図法の仮説にもとづく関係

$$m_i = \left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_i / \int_0^{t_u} r_u dt$$

を代入すると、つぎのようになる。

$$Q_{u \cdot p} = \{ (\alpha_{qp})_{m \cdot u} / K_0^{1/p} \} \left\{ \sum_{i=1}^i \left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_i \right\} \dots (5.15)$$

ここに、番号 i の意味は、図-5.2 に示すように、最初の t_u 区間を $i=1$ とし、以下順次 2, 3, ..., i とする。

(5.13) および (5.15) の両式から、 $(\alpha_{qp})_{m \cdot n} = (\alpha_{qp})_{m \cdot u}$ すなわち

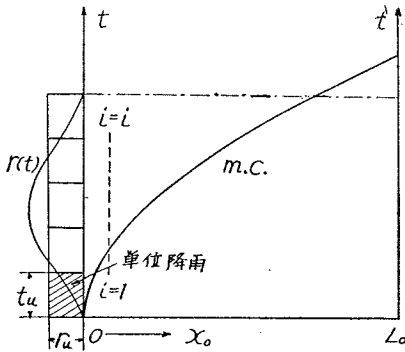
$$(\alpha_{tp})_{m \cdot n} = (\alpha_{tp})_{m \cdot u} \dots (5.16)$$

のときに、 $Q_{n \cdot p} = Q_{u \cdot p}$ となることがわかる。

(c) $t_u > t_c, t_d \geq t_c$ の場合：この場合には

図-5.2 $t_u < t_c, t_d < t_c$ の場合の番号 i の説明図

Fig.5.2 Schematic diagram showing the meaning of number i in the case of $t_u < t_c, t_d < t_c$



$$Q_{n,p} = \{(\alpha_{qp})_{m,n} / K_0^{1/p}\} \int_{\tau_p}^{t_p} r(t) dt, \dots (5.17)$$

$$Q_{u,p} = \{(\alpha_{qp})_{m,u} / K_0^{1/p}\} m \int_{\tau_p}^{t_p} r_u dt \dots (5.18)$$

となる。ここに、

$$m = \int_0^{t_u} r(t) dt / \int_0^{t_u} r_u dt$$

であるが、こうした場合における近似関係

$$\int_{\tau_p}^{t_p} r(t) dt \approx \left\{ \int_0^{t_u} r(t) dt / \int_0^{t_u} r_u dt \right\} \int_{\tau_p}^{t_p} r_u dt$$

が成立するのは、 $\int_{\tau_p}^{t_p} r(t) dt = \int_{\tau_p}^{t_p} r_u dt$ のときだけであるから、降雨のかなり広い変動を許すという単位図法の基本的概念が全く失われてしまうことになる。

したがって以下の考察では、(a) 小流域の場合、(b) 大流域の場合にかぎることとし、単位図法による最大流量の適合条件 $(\alpha_{tp})_{m,u} = (\alpha_{tp})_{m,n}$ を用いて、解析を進めることにする。

6. 単位降雨の要素

ここでは、前章で求めた適合条件 $(\alpha_{tp})_{m,u} = (\alpha_{tp})_{m,n}$ を用いて、流出量曲線のピークを単位図法で適確に推定するために、単位降雨と降雨特性および流域特性との間にいかなる条件が必要であるかを明らかにしよう。

(1) 小流域の場合 ($t_u < t_c, t_d > t_c$)

単位降雨および対象降雨の流出機構を考慮し、

$$\left. \begin{aligned} B_c &= p L_0 K_0^{1/p}, \delta = (1/p) - 1, \epsilon = 1 - p, \\ r_{mp} &= \int_{\tau_p}^{t_p} r(t) dt / \int_{\tau_p}^{t_p} dt \end{aligned} \right\}$$

とすれば、(5.7) および (5.6) の両式からつぎのようになる。

$$(\alpha_{tp})_{m,u} = B_c (r_u t_u)^\delta / \{B_c + \epsilon r_u^\delta t_u^{\delta+1}\}, \dots (6.1)$$

$$(\alpha_{tp})_{m,n} = p^\delta (B_c r_{mp})^\epsilon. \dots (6.2)$$

したがって、前章(3)に述べた条件から上の両式を等しいとおけば、

$$r_u^\delta \{t_u^\delta / p^\delta (B_c r_{mp})^\epsilon - \epsilon t_u^{\delta+1} / B_c\} = 1 \dots (6.3)$$

となる。ところが $r_u^\delta > 0$ であるから、 t_u に関する一つの条件不等式として、

$$t_u < B_c^{\epsilon-1} / (\epsilon p^\delta r_{mp}^\epsilon) \dots (6.4)$$

がえられるが、従来経験的に選んでいる単位時間 t_u は、(6.4) 式の関係を十分に満足している。(6.3) 式を変形すると、

$$r_u = \{ (p^\delta B_c r_{mp}^\epsilon)^{1/\delta} / (B_c^\delta - \epsilon p^\delta r_{mp}^\epsilon t_u)^{1/\delta} \} / t_u \dots (6.5)$$

となるが、一般に $B_c^\delta \gg \epsilon p^\delta r_{mp}^\epsilon t_u$ であるから、近似式として次式がえられる。

$$r_u = (p^{1/\delta} B_c r_{mp}) / t_u \dots (6.6)$$

Manning の抵抗法則を用いて、 $p=0.6, \epsilon=0.4, \delta=2/3$ を入れると、

$$r_u = 0.6^{0.9} (B_c r_{mp})^{0.6} / t_u \dots (6.7)$$

となり、単位降雨の強度 r_u が流域指標 B_c 、平均降雨強度 r_{mp} の 0.6 乗に比例し、単位時間 t_u に逆比例すべきことがわかる。さらに $B_c = p L_0 K_0^{1/p}$ を上式に入れると、

$$r_u = 0.6^{1.5} (n_0 L_0 r_{mp} / \sqrt{\sin \theta_0})^{0.6} / t_u \dots (6.8)$$

となつて、単位降雨の総量 $r_u t_u$ が一流域について r_{mp} の 0.6 乗に比例すべきことがわかる。いま、一例として、

$$t_u = 2 \text{ hr}, r_{mp} = 10 \text{ mm/hr} = 10^{-2} \text{ m/hr}, L_0 = 1000 \text{ m},*$$

$$n_0 = 1 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$$

$$= 1/3600 \text{ m}^{-1/3} \text{ hr}^{**}, \sin \theta_0 = 1/400$$

として、(6.8) 式から計算すると $r_u = 0.05 \text{ m/hr} = 50 \text{ mm/hr}$ となる。この r_u の値は雨水流の水理学的考察から

* L_0 は主として斜面の流下距離に支配されるから、この値はそれほど大きくない。

** n_0 は主として斜面の粗度係数 n' に支配され、 n' の値は由良川流域で $1 \sim 1.5 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$ 、大戸川流域で $0.3 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$ 程度であり、Palmer の草地での実験では $0.2 \sim 0.4 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$ である。

求めたもので、実測の流出量曲線から単位図法の線型仮設によつて求められているものとは、その意義を異にしている。流れが非線型であることを考えると、本論のような取り扱いで求めた単位降雨強度がきわめて大きくなるのは、当然といつてよい。従来の単位降雨という概念は、単位図の与える流出総量と単位降雨の総量とを一致させること以外には、本質的な意義をもつておらず、単位面積当り 1 mm または 1 inch といった値がとられているのは、単なる計算上の便宜からといつてよい。したがつて、こうした立場からの単位降雨と単位図の間には、構構的にはなんの関連もなく、また単位降雨の要素、ことに単位強度をいかにとるかという論議は不可能である。しかし単位時間は、単位図法によつて流出の全過程をなるべく合わせるという現象論的实际的立場からは、重要な問題となろう。従来から単位降雨については、単位時間が問題とされているのは、こうした理由によるものである。

(6.5) あるいは (6.6) 式は、水理学的論拠からえられた r_u , t_u に関する基本式であるが、この両者をそれぞれ独立に決定することはできない。ただ最大流量を合致させるような r_u と t_u の間に、こうした関係があるということである。このうち t_u の方は、流出の全過程をなるべく適確に表現するように選ぶという誤差論的ないし統計的な取り扱いで定めらるべきであらう。従来から t_u が最大流量の遅れと結びつけて考えられているのも、こうした意味にほかならない。

最大流量の伝播時間 t_{pc} は、(5.4) 式によつて

$$t_{pc} = B_c^p / (p^p r_{mp}^e) \dots\dots\dots (6.9)$$

となるから、(6.6) 式の関係を用いて、

$$t_u = p^{1/\delta} (r_{mp}/r_u) t_{pc} \dots\dots\dots (6.10)$$

となる。したがつて、単位時間は最大流量の伝播時間に比例するから、また最大流量の遅れの時間にも比例することになる。このことは、最大流量の遅れの時間とその伝播時間との間には密接な関係があり、降雨曲線がピークを中心として左右対称なときには、前者は後者の 1/2 となるからである。この意味から、 t_u を最大流量の遅れの時間と結びつけて求めている従来の立場は、一つの行き方として合理的といえよう。いま、 $p=0.6$ とおいて (6.10) 式を書き改めると、

$$t_u = 0.4 (r_{mp}/r_u) t_{pc} \dots\dots\dots (6.11)$$

となる。 $(\alpha_{tp})_{m \cdot u} = (\alpha_{tp})_{m \cdot n}$ および $t_u < t_c$, $t_d > t_c$ の条件から、いまの場合常に $r_u > r_{mp}$ であるが、 r_u を r_{mp} の 2 倍とすれば、単位時間は最大流量の伝播時間の 1/5 倍、最大流量の遅れの時間のほぼ 2/5 倍にとるべきことがわかる。

(2) 大流域の場合 ($t_u < t_c$, $t_d < t_c$)

この場合、 $(\alpha_{tp})_{m \cdot u}$ は (6.1) 式で与えられるが、 $(\alpha_{tp})_{m \cdot n}$ は (5.7) 式を考慮してつぎのように表わされる。

$$(\alpha_{tp})_{m \cdot n} = B_c (r_m t_d)^\delta / \{B_c + \epsilon r_m^\delta t_d^{\delta+1}\}, \dots\dots\dots (6.12)$$

ここに、 $r_m = \int_0^{t_d} r(t) dt / \int_0^{t_d} dt$ である。

したがつて、単位図法の仮説を流出のピーク部分で満足させる r_u と t_u の関係は、 $(\alpha_{tp})_{m \cdot u} = (\alpha_{tp})_{m \cdot n}$ とおくことにより、

$$r_u t_u / r_m t_d = B_c^{1/\delta} / \{B_c + \epsilon (r_m t_d)^\delta (t_d - t_u)\}^{1/\delta} \dots\dots\dots (6.13)$$

となる。ところが一般に $B_c \gg \epsilon (r_m t_d)^\delta (t_d - t_u)$ であるから、近似式としてつぎの関係がえられる。

$$r_u t_u = r_m t_d = R_{td} \dots\dots\dots (6.14)$$

したがつて、 r_u と t_u とは、その積が総雨量 R_{td} に等しく、一方を大きくとれば、他方を小さくとることが必要である。この場合の r_u , t_u の意義も前節の小流域の場合と同様であつて、 t_u は流出の全過程をなるべく適確に表現できるように選ぶべきである。米国では、 t_u を最大流量の遅れの時間の 1/2~1/4 程度とすればよいとしているが、これを t_u に対する一つの基準としてよいであらう。

(3) 流域の大小と単位降雨要素との関係

小流域と大流域の場合の単位降雨要素を、それぞれ添字 s および l をつけて表わすと、(6.6) および (6.14) 式によつて、

$$r_{m \cdot s} = p^{p/\delta} (B_c r_{m \cdot s})^p / t_{u \cdot s}, \quad r_{m \cdot s} = \int_{\tau_p}^{t_p} r(t) dt / \int_{\tau_p}^{t_p} dt \dots\dots\dots (6.15)$$

$$r_{m \cdot l} = r_{m \cdot l} t_{u \cdot l} / R_{td} = R_{td} / t_{u \cdot l}, \quad r_{m \cdot l} = \int_0^{t_d} r(t) dt / \int_0^{t_d} dt \dots\dots\dots (6.16)$$

となる。これらの関係式によつて、単位降雨選定上の注意事項を、小流域と大流域とにわけて要約すると、つぎ

のとおりである。

1. 小流域では流域指標 B_c が重要で、流域ごとに単位降雨の要素を変えねばならないが、大流域ではこうした流域特性を考える必要はない。

2. 降雨特性については、小流域では降雨のピーク付近の強度が重要であるが、大流域では降雨全体の平均強度と継続時間あるいは降雨の総量が重要である。

3. 以上の二点からわかるように、わが国では単位降雨の関係因子として、流域特性とピーク付近の降雨強度に着目することが必要であつて、一流域においても降雨強度の変動に応じて単位降雨要素を変化すべきであるが、降雨の継続時間はほとんど考えなくてもよい。米国などのような大流域では、降雨強度よりもむしろ降雨の総量あるいは継続時間が重要であつて、流域特性には考慮を要しないであろう。

4. $r_{m.s}$ は降雨のピーク付近の強度であつて、(6.15) 式と等価な (6.10) 式において一般に $p^{1/\delta} t_{pc} > t_u$ であるから $r_u > r_{m.s}$ であり、また $r_{m.l}$ は降雨全体の平均強度であるから、小流域における単位強度は大流域におけるものよりかなり大きくとらねばならない。しかし単位降雨の総量は、大流域では小流域よりもきわめて大きく、ほぼ対象降雨の総量の程度にとらねばならない。このことは、単位強度として、わが国では 10~20 mm/hr、米国では 1 in/day がとられている理由を、定性的に説明することになる。

5. 単位時間としては、従来一般に最大流量の遅れの時間が基準とされている。しかし米国では、降雨の継続時間は最大流量の遅れの時間の 1~2 倍程度であるから¹³⁾、単位時間を後者の 1/2~1/4 にとつても、単位図法の計算は容易であるが、この基準をわが国においてそのまま用いると、操作が繁雑になりすぎるようである。後に述べるように、わが国と米国では、最大流量の遅れの時間の水理学的意義が異なっているから、単位時間のとり方については、わが国独自の基準を必要とし、米国の基準をそのまま受け入れることは、実状に沿わないし、また無意味であろう。

7. 単位図の要素

単位図の重要な要素は、ピーク、上昇時間および基長の三つであるが、単位図法の精度に直接影響するのはピークと上昇時間であつて、従来からこれらの要素の決定について種々の提案があるが、いずれも経験に依存したものとついでよく、理論的裏付けが欠けているから、その普遍性には多くの疑問がある。ここでは前章までの成果にもとづいて、最大流量とその発生時刻を適合させるような単位図のピークおよび上昇時間について、水理学的立場から考察を進めよう。

(1) 最大流量の遅れの時間

流出機構が雨水の伝播状態に支配されることは、すでにしばしば強調したとおりであるが、この伝播状態の一表示と考えられる最大流量の遅れの時間を単位図の上昇時間と結びつけている従来の立場は、こうした点に論拠をもつものといえよう。

最大流量の遅れの時間というのは、降雨に関して定められたある基準時刻から最大流量の発生時刻までの時間であつて、降雨および流域のあらゆる特性の総合効果として理解されている。この場合、流域重心点から流量観測点まで雨水が流下してくるのに要する時間をとることがあるが、この概念ははなはだ不明確である。また降雨の基準時刻として、Snyder¹⁰⁾ は降雨分布の重心時刻をとり、米国では一般にこの方法を用いているが、わが国ではむしろ最大降雨強度の時刻がとられている。これらは単に経験的事実に依存したものであつて、理論的裏付けがないから、以下において水理学的立場から考察しよう。

最大流量を発生する伝播の出發時刻 τ_p と到達時刻 t_p の間には、(2.38) 式によつて $r(\tau_p)r(t_p)$ の関係があり、最大流量には $(t_p - \tau_p)$ の間の降雨が関与する。したがつて、 $(t_p - \tau_p)$ は最大流量と直接関係をもつ雨水の伝播時間と考えられ、以下ではこれを t_{pc} と表わすことにする。この t_{pc} は、降雨中に最大流量を生じる $t_{pc} < t_d$ の場合と降雨後に最大流量を生じる $t_{pc} > t_d$ の場合とで異なり、それぞれ $t_{pc.s}$ および $t_{pc.l}$ とすれば、(5.4) および (5.5) 式によつて、

$$t_{pc.s} = B_c^{\delta} / (p^{\delta} r_{m.p}^{\epsilon}), \dots\dots\dots (7.1)$$

$$t_{pc.l} = B_c / R t_d^{\delta} + \epsilon t_d \dots\dots\dots (7.2)$$

となる。5.(2) の説明によつて、前者は小流域、後者は大流域に対応するといえるが、ともに最大流量と直接関係をもつ雨水の伝播時間であつて、最大流量の遅れの時間と密接な相関をもつはずである。こうした相関を考えるために、まず最大流量の遅れに対する降雨の基準時刻について考えておこう。

一般に流域の大小は伝播時間の大小と対応するから、小流域ほど最大流量に関与する降雨部分が減少してくる

はずであつて、これからつぎのように考えることができる。すなわち、小流域では(7.1)式からわかるように、最大流量付近の降雨が最大流量に関与するから、降雨基準時刻としては、最大強度の時刻をとつた方がよい。ことに降雨分布が非常に非対称な場合には、降雨分布の重心を基準時刻とすることは全く不適當である。大流域では伝播時間が大きいから、この間に多くの降雨ピークが含まれることになり、また最大ピークの時間的位置も一定したものでない。したがつて降雨を巨視的にみて、あまり位置を変動しない降雨重心の時刻を基準とした方がよい。

さらに大流域になつて(7.2)式があてはまる場合には、降雨全体が最大流量に関与してくるから、降雨開始時刻を基準とした方が雨水伝播の力学的機構からみて妥當である。ただこうした基準時刻をとると、(7.2)式からわかるように、最大流量の遅れの時間が降雨の総量と継続時間によつて大きく変動する。したがつて、この遅れの時間を流域の重要な流出特性として降雨条件にあまり左右されないように選ぶためには、降雨の重心時刻を基準とすべきである。このことは、降雨の重心時刻を基準とした場合、降雨条件が最大流量の遅れの時間におよぼす影響を、結果的に小さくできるからである。

要するに、降雨基準時刻を一意的に決定することは、降雨条件の任意性からみて不可能であつて、流域特性ことにその大きさと関連において選定しなければならない。米国では降雨の重心時刻がとられ、わが国ではむしろ最大強度時刻が妥當とされている経験的事実は、上述のような事情によるものと考えられ、それぞれの意義が異なつて注意しなければならない。

つぎに最大流量の遅れの時間 T_g と伝播時間 t_{pc} との関係を考えるが、流出機構の相違によつて、 $T_{g,s}$ と $T_{g,l}$ の二つの場合にわけることとする。添字 s, l の意義は、 t_{pc} の場合と同様である。

まず降雨中に最大流量を生じる場合には、一般に

$$T_{g,s} = (1-\alpha)t_{pc,s} \dots\dots\dots(7.3)$$

の関係がある。この場合、上の考察にもとづいて、図-7.1のように降雨基準時刻を最大強度の時刻とすれば、 α は最大流量の伝播の出發時刻 τ_p から最大強度時刻までの時間と伝播時間 $t_{pc,s}$ との比、すなわち $t_{pc,s}$ の間の降雨分布の形状に支配されるパラメーターであつて、一般に $0 < \alpha < 1$ の範囲にあり、降雨のピーク付近の形状が対称なときは $1/2$ である。

降雨後に最大流量を生じる場合には、斜面上の流下距離があらゆる点で等しいような流域では、流出量曲線のピークが t_d から $t_{pc,l}$ まで継続することになるが、自然流域の形状は不規則であつて雨水の流下径路もきわめて多様であるから、実際の流出現象ではある定まつた時刻に最大流量が発生する。その時刻は、 t_d と $t_{pc,l}$ の間にくると考えられるが、これは流域特性として流出に最も効果的な B_c あるいは L_o を採用している関係上、当然といふべきであらう。

図-7.1 降雨継続時間中に最大流量を生じる場合の雨水擾乱の伝播状態

Fig. 7.1 Propagation states of rainfall disturbance in the case when the peak flow discharge occurs before the end of rainfall duration

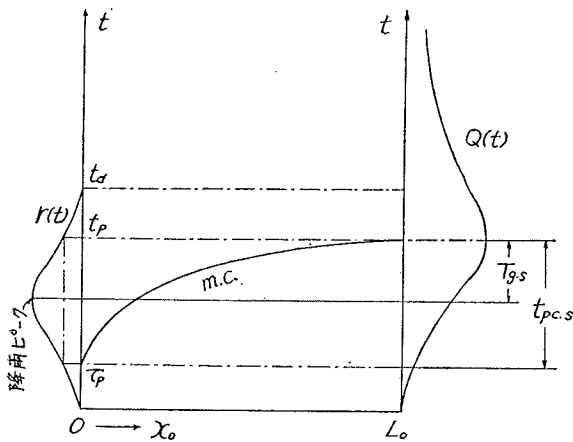


図-7.2において、破線で示した流出量曲線は、流域形状の不規則性を考えず1本の流下径路 x_o についての仮想的のものであつて、実際の流出量曲線は実線のようになるはずである。以上のことを考えると、

$$T_{p,l} = (1-\beta)t_{pc,l} + \beta t_d \dots\dots\dots(7.4)$$

と表わすことができ、 β は $T_{p,l}$ から $t_{pc,l}$ までの時間と t_d から $t_{pc,l}$ までの時間の比、すなわち流域形状の不規則性を考慮した $t_d \sim t_{pc,l}$ 間の $T_{p,l}$ の位置を示すパラメーターであつて、一般に $0 < \beta < 1$ の範囲内にあり、平均的には $1/2$ と考えてよい。

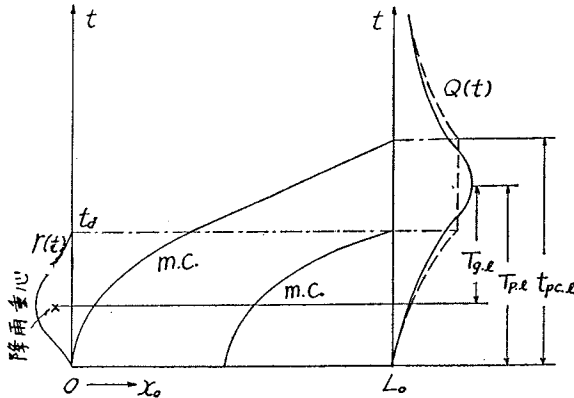
さらに、最大流量の遅れの時間 $T_{g,l}$ と $T_{p,l}$ との間には、

$$T_{g,l} = T_{p,l} - \beta' t_d \dots\dots\dots(7.5)$$

なる関係がある。この場合、図-7.2のように降雨の基準時刻を降雨重心とすれば、 β' はこの重心時刻と t_d との比、すなわち降雨重心の位置を表わすパラメーターであつて、一般に $0 < \beta' < 1$ の範囲にあり、降雨の分布曲線が対称な場合には $1/2$ である。

図一7.2 降雨継続時間後に最大流量を生じる場合の雨水擾乱の伝播状態

Fig. 7.2 Propagation states of rainfall disturbance in the case when the peak flow discharge occurs after the end of rainfall duration.



告¹³⁾を説明することになる。

(2) 小流域における単位図の要素

これは $t_u < t_c$, $t_d > t_c$ の場合であつて、以下の考察は一般にわが国のような小流域河川に対するものといえよう。

単位降雨による流出量曲線、すなわち単位図を考えると、その流出機構は 5.(2) の (a) の場合に相当するから、伝播時間 $t_{uc.s}$ は (2.18) 式によつて、

$$t_{uc.s} = B_c / (r_u t_u)^\delta + \epsilon t_u \dots\dots\dots (7.9)$$

となる。ここで述べている単位流出量曲線は、水理学的意義をもつた単位図であるから、前節で述べたと同様の考察によつて、単位図の上昇時間 $t_{g.s}$ は一般につきのように表わされる。

$$t_{g.s} = (1 - \alpha') t_{uc.s} + \alpha' t_u \dots\dots\dots (7.10)$$

ここに、 α' は $t_{g.s}$ から $t_{uc.s}$ までの時間と t_u から $t_{uc.s}$ までの時間の比であつて、主として流域形状に支配され、一般に $0 < \alpha' < 1$ の範囲にあり、 $t_{g.s}$ が t_u と $t_{uc.s}$ の中央にくるときは $1/2$ となる。

ここで目的としているのは、単位図法で最大流量を適確に表現する単位図の要素を求めることであるから、単位降雨と最大流量の伝播時間 $t_{pc.s}$ との間には、(6.5) および (6.9) の両式から r_{mp} を消去して、

$$(r_u t_u)^\delta = B_c / (t_{pc.s} - \epsilon t_u) \dots\dots\dots (7.11)$$

の関係がある。これを (7.9) 式に代入して、

$$t_{uc.s} = t_{pc.s} \dots\dots\dots (7.12)$$

がえられる。この関係は、最大流量の適合条件 $(\alpha_{tp})_{m.u} = (\alpha_{tp})_{m.n}$ から、直ちに導くことができる。したがつて、単位図の上昇時間 $t_{g.s}$ は、(7.10) 式から次式で表わされる。

$$t_{g.s} = (1 - \alpha') t_{pc.s} + \alpha' t_u \dots\dots\dots (7.13)$$

さらに (7.3) 式の関係を用いると、

$$t_{g.s} = \{ (1 - \alpha') / (1 - \alpha) \} T_{g.s} + \alpha' t_u \dots\dots\dots (7.14)$$

となる。(7.13) 式あるいは (7.14) 式は、最大流量の伝播時間あるいはその遅れの時間によつて表現された小流域の場合の単位図上昇時間の決定式である。0 と 1 の間で変動するパラメーター α および α' を平均的に 0.5 とすれば、

$$t_{g.s} = T_{g.s} + 0.5 t_u \dots\dots\dots (7.15)$$

という近似式がえられるが、中安博士の提案式は右辺第2項の係数が 0.8 となつている。なお、(7.15) 式の $t_{g.s}$ は最大流量を合致させるためのものであつて、流出過程全体にわたる単位図法の平均的な精度を向上させるには、ややこれより大きい値を採用した方がよいであろう。中安博士の提案は、このことを暗示したものと思われる。従来一般に単位図の遅れの時間と対象降雨のそれとを等しいとする立場から、単位図上昇時間として概念的に $t_{g.s} = T_{g.s} + 0.5 t_u$ を用いているが、(7.15) 式によれば十分根拠であるといえよう。

つぎに単位図のピーク $q_{up.s}$ は、(3.3) 式によつて

結局 $T_{g,l}$ と $t_{pc,l}$ との関係は、(7.4), (7.5) の両式から $T_{p,l}$ を消去することによつて、つぎのように表わされる。

$$T_{g,l} = (1 - \beta) t_{pc,l} + (\beta - \beta') t_d \dots\dots (7.6)$$

さらに (7.1) および (7.2) 式を用いて、 $T_{g.s}$ および $T_{g,l}$ を書き改めると、

$$T_{g.s} = (1 - \alpha) B_c / (p^p r_{mp}^\epsilon) \dots\dots (7.7)$$

$$T_{g,l} = (1 - \beta) B_c / R t_d^\delta + \{ \epsilon (1 - \beta) + (\beta - \beta') \} t_d \dots (7.8)$$

となり、パラメーター α , β および β' は平均的に $1/2$ と考えてよい値である。上の二つの式は、一流域 ($B_c = \text{一定}$) における T_g の変動が、わが国では降雨のピーク付近の強度と形状によつて変動するという経験的事実、米国では主として降雨の継続時間に支配され、その増加につれて $T_{g,l}$ が增大するという Taylor および Schwalz の報

$$q_{up.s} = (1/K_0^{1/p}) \left(\int_0^{t_u} r_u dt \right)^{1/p} \dots\dots\dots (7.16)$$

と表わされる。いま r_u として、単位降雨の近似式 (6.6) からえられる $r_u = (p^{1/\epsilon} B_c r_{mp})^p / t_u$ を上式に代入すると、対象降雨による最大流量を合致させるための単位図のピークとして、

$$q_{up.s} = p^{1/\epsilon} L_0 r_{mp} \dots\dots\dots (7.17)$$

がえられる。一方、対象降雨による最大流量 Q_{np} は、

$$Q_{np} = L_0 r_{mp} \dots\dots\dots (7.18)$$

であるから、 $q_{up.s}$ と Q_{np} の間には、

$$q_{up.s} = p^{1/\epsilon} Q_{np} \dots\dots\dots (7.19)$$

の関係が成立することになり、とくに $p=0.6$ とおくと、

$$q_{up.s} = 0.6^{2.5} Q_{np} = 0.28 Q_{np} \dots\dots\dots (7.20)$$

となる。したがって両者の関係は、水深～流量関係の非線型指数 p のみによつて支配され、近似的に単位図のピークは対象降雨による最大流量の 28% 程度とすればよいことがわかる。なお、 Q_{np} は (7.18) と (6.9) の両式から、

$$Q_{np} = L_0 (B_c/p)^{1/\delta} / t_{pc.s}^{1/\epsilon} \dots\dots\dots (7.21)$$

と表わされるから、単位面積当りの単位図のピーク $q'_{up.s}$ と降雨、流域および流出の諸特性との関係は、つぎのようになる。

$$q'_{up.s} = p^{1/\epsilon} r_{mp} = p^{1/\epsilon} (L_0 n_0 / \sqrt{\sin \theta_0})^{1/\delta} / t_{pc.s}^{1/\epsilon} \dots\dots\dots (7.22)$$

ところが L_0 の増加につれて r_{mp} が減少するから、 $q'_{up.s}$ は流域面積の増加につれて減少し、また一定流域について考えると、 $q'_{up.s}$ は $t_{pc.s}$ の減少につれて増大することがわかるが、これらは経験的事実と一致する。

以上のようにして求めた (7.13) あるいは (7.14) 式と (7.19) 式とは、実測流量記録から単位図を作製するときに用いるべき基礎式であるが、これらの単位図の要素 $t_{g.s}$ および $q_{up.s}$ が降雨特性ことに降雨強度によつていかに変化するかを考えてみよう。まず (7.13) と (6.9) の両式から、

$$t_{g.s} = (1-\alpha') B_c^p / (p^p r_{mp}^\epsilon) + \alpha' t_u \dots\dots\dots (7.23)$$

となる。したがって一つの流域について考える場合、 $t_{g.s}$ は降雨強度の増加につれて減少するが、上式の右辺第 1 項が第 2 項に較べてかなり大きいことから、平均降雨強度 r_{mpi} 、 r_{mpj} に対応する単位図の上昇時間 $t_{g.s_i}$ 、 $t_{g.s_j}$ の関係は、近似的に次式で与えられる。

$$(t_{g.s_i} / t_{g.s_j}) = (r_{mpj} / r_{mpi})^\epsilon \dots\dots\dots (7.24)$$

同様に、単位図のピーク $q_{up.s_i}$ 、 $q_{up.s_j}$ の関係は、(7.17) 式から

$$(q_{up.s_i} / q_{up.s_j}) = (r_{mpj} / r_{mpi}) \dots\dots\dots (7.25)$$

となる。ところが ϵ は 0.4 程度と考えてよいから、単位図の上昇時間は降雨強度の変動によつてそれほど大きく変化しないが、ピークは降雨強度に一次的に比例することになり、降雨強度の効果がきわめて大きいことがわかる。

由良川の実測記録から逆算した降雨強度の変動に対応する単位図要素の変化が¹⁴⁾、上の両式の関係とよく一致していることは、一つの有力な実証といえよう。一つの流域においても、単位図を強雨強度によつて変化させるべきであるというわれわれの研究結果も¹⁵⁾、本節の考察によつて水理学的に裏付けられたわけである。

(3) 大流域における単位図の要素

これは $t_u < t_c$ 、 $t_d < t_c$ の場合であつて、以下の考察は一般に米国のような大流域河川に対するものといえよう。単位降雨による流出量曲線、すなわち単位図の伝播時間 $t_{uc.l}$ は (2.18) 式によつて、

$$t_{uc.l} = B_c / (r_u t_u)^\delta + \epsilon t_u \dots\dots\dots (7.26)$$

と与えられる。一方、単位図の上昇時間 $t_{g.l}$ は、前節と同様に流域形状の不規則性を考慮して、つぎのように表わされる。

$$t_{g.l} = (1-\beta'') t_{uc.l} + \beta'' t_u \dots\dots\dots (7.27)$$

ここに、 β'' は $t_{g.l}$ から $t_{uc.l}$ までの時間と t_u から $t_{uc.l}$ までの時間の比であつて、主として流域形状に支配され、一般に $0 < \beta'' < 1$ の範囲内にあり、 $t_{g.l}$ が t_u と $t_{uc.l}$ の中央にくるときは 1/2 となる。

いま、単位降雨の決定式 (6.13) と最大流量の伝播式 (7.2) を (7.26) 式に代入すると、

$$t_{uc.l} = t_{pc.l} \dots\dots\dots (7.28)$$

がえられるが、最大流量の適合条件 $(\alpha_{tp})_{m \cdot u} = (\alpha_{tp})_{m \cdot n}$ から当然である。したがって、単位図の上昇時間 $t_{g.l}$ は、(7.27) 式から次式で表わされる。

$$t_{g,i} = (1 - \beta'')t_{pc,i} + \beta''t_u \dots\dots\dots (7.29)$$

さらに (7.6) 式の関係を用いると、

$$t_{g,i} = \frac{1 - \beta''}{1 - \beta} T_{g,i} + \beta''t_u - (1 - \beta'') \frac{\beta - \beta'}{1 - \beta} t_d \dots\dots\dots (7.30)$$

となる。(7.29) 式あるいは (7.30) 式は、最大流量の伝播時間あるいはその遅れの時間によつて表現された大流域の場合の単位図上昇時間の決定式である。パラメーター β , β' および β'' を平均的に 0.5 とすれば、近似式として、

$$t_{g,i} = T_{g,i} + 0.5 t_u \dots\dots\dots (7.31)$$

がえられる。大流域ではこの式によつて単位図上昇時間が与えられているが、上述の説明からわかるように、十分な水理学的意義をもっている。

つぎに単位図のピーク $q_{up,i}$ は、単位降雨の近似式 (6.14) および (3.3) 式の関係 $Q_{up} = \left\{ \int_0^{t_d} r(t) dt / K_0 \right\}^{1/p}$ ならびに (7.2) 式によつて、

$$q_{up,i} = Q_{up} = C_c L_0 r_m = C_c L_0 R_{td} / t_d \dots\dots\dots (7.32)$$

となる。ここに C_c は、

$$0 < C_c = \beta t_d / (t_{pc,i} - \epsilon t_d) \leq 1$$

であつて、降雨あるいは流域の特性によつてあまり変動せず、米国における実測例では 0.5~1 程度の値である¹³⁾。さらに (7.2) 式を用いて R_{td} を $t_{pc,i}$ に変換すると、単位面積当りの単位図のピーク $q'_{up,i}$ はつぎのように表わされる。

$$q'_{up,i} = C_c \{ B_c / (t_{pc,i} - \epsilon t_d) \}^{1/5} / t_d \dots\dots\dots (7.33)$$

ここで (7.6) 式を用いて $t_{pc,i}$ を $T_{g,i}$ に変換し、 β および β' を 1/2 とおくと、

$$q'_{up,i} = C_c \{ B_c / (2 T_{g,i} - \epsilon t_d) \}^{1/5} / t_d \dots\dots\dots (7.34)$$

となる。(7.33) および (7.34) の両式で、 $t_{pc,i}$ および $T_{g,i}$ は B_c の増加につれて増大するから、 $\{ \}^{1/5}$ の変動はわずかであるが、一般に B_c の増加とともに少し減少する。それは (7.2) 式からわかるように、この項が実は総雨量 R_{td} と等価であり、流域内平均総雨量が流域面積を増すほど減少するという経験的事実があるからである。いずれにしてもこの項の変動はあまり大きくないし、また C_c もあまり変動しないから¹³⁾、結局 $q'_{up,i}$ は継続時間 t_d に支配され、その増加につれて減少すると考えてよい。

Taylor および Schwarz¹³⁾ は多くの実測記録から、

$$q'_{up,i} = C e^{m t_p} \dots\dots\dots (7.35)$$

なる関係を与え、 C は流下距離の減少関数、 m は負符号をとる流下距離と勾配の関数としている。こうして $q'_{up,i}$ の変動の支配的要素が t_d であつて、その増加につれて $q'_{up,i}$ が減少すると述べているが、上述の考察はこれを水理学的に実証したものといえよう。なお、(7.34) 式では $q'_{up,i}$ が t_d の双曲線型関数で表わされているが、実際におこる t_d の範囲では、(7.34) 式の関数が (7.35) 式の指数関数とよく似ていることを付記しておく。

Snyder¹⁰⁾ は大流域に対するものとして、

$$q'_{up,i} = 640 C_p / T_{g,i} \dots\dots\dots (7.36)$$

を提案し、 C_p を 0.56~0.69 の常数としている。上式で $640 C_p$ は、(7.33)、(7.34) 式の $C_c \{ \}^{1/5}$ あるいは $C_c R_{td}$ に相当するものと考えられ、 $T_{g,i}$ を支配的要素としているが、いままでの考察によつて $T_{g,i}$ の代りに t_d を用うべきことはいうまでもない。大流域の場合 (7.8) 式からわかるように、 $T_{g,i}$ は t_d に応じてほぼ一次的に増減し、また米国では $T_{g,i}$ がほぼ t_d と等しい値をとるから¹³⁾、実用上は Snyder の (7.36) 式は意義があるが、水理学的立場からは $T_{g,i}$ の代りに t_d を用いた方が正しいはずである。

単位図の上昇時間は、(7.29) と (7.2) の両式から $\beta'' = 1/2$, $\epsilon = 0.4$ とおいて、近似的につぎのように表わされる。

$$t_{g,i} = (B_c / 2 R_{td}^5) + 0.2 t_d + 0.5 t_u \dots\dots\dots (7.37)$$

いま、一つの流域を考慮し、 $t_u = \eta t_d$ とすると、降雨条件 i, j に対する単位上昇時間の差は、

$$t_{g,i} - t_{g,j} = (B_c / 2) (1/R_{td_i}^5 - 1/R_{td_j}^5) + (0.2 + 0.5 \eta) (t_{d_i} - t_{d_j}) \dots\dots\dots (7.38)$$

となる。一般に t_u は $T_{g,i}$ を基準としてきめておけるようであり、また上述のように米国では $T_{g,i}$ が t_d にほぼ等しいとしているから、 η は $0 < \eta < 1$ の範囲内にあり、 $1/2 \sim 1/4$ がよいとされている値である。この (7.38) 式からわかるように、降雨条件による単位図上昇時間の変動は、総雨量と降雨継続時間に支配され、降雨量が少な

く継続時間が長い場合には、上昇時間が増加してピークを後退させねばならないことになる。

つぎに単位面積当りの単位図のピークの関係は、降雨条件 i, j に対して C_c の変動を無視すると¹³⁾、(7.33)式から

$$\frac{q'_{up \cdot i}}{q'_{up \cdot j}} = \left(\frac{t_{pc \cdot i} - \epsilon t_{d_j}}{t_{pc \cdot i} - \epsilon t_{d_i}} \right)^{1/\delta} \frac{t_{d_j}}{t_{d_i}} = \frac{R_{td_i}}{R_{td_j}} \frac{t_{d_j}}{t_{d_i}} \dots \dots \dots (7.39)$$

となり、Talbot 型公式 $R_{td} = at_d / (b + t_d)$ を採用すると、つぎの関係がえられる。

$$q'_{up \cdot i} / q'_{up \cdot j} = (b + t_{d_j}) / (b + t_{d_i}) \dots \dots \dots (7.40)$$

したがって、単位面積あたりの単位図のピークは、降雨継続時間の増加とともに減少するが、その変動はわずかであることがわかる。

(4) 流域の大小と単位図要素との関係

わが国のような小流域の場合と米国のような大流域の場合とは、流出機構を異にし、単位図の重要な要素である上昇時間とピークの選定に異なつた立場を必要とすることは、前節までに詳述したとおりであるが、これらを取りまとめるとつぎのようである。

1. 単位図要素に影響する降雨特性としては、小流域では降雨ピーク付近の平均強度が支配的であるのに対し、大流域では総雨量および降雨継続時間、ことに後者が支配的である。このことは、単位図要素に関するわが国と米国における従来の経験的事実の相違を実証している。
2. 単位図上昇時間としては、小流域および大流域のいずれでも、最大流量の遅れの時間を基準として差支えないが、両者における最大流量の遅れの時間の意義が異なつていることを注意しなければならない。単位図のピークは小流域と大流域とでいちじるしい相違があり、前者では対象降雨の最大流量よりもかなり小さい値をとるべきであるが、後者ではほぼ等しい程度にとる必要がある。わが国では単位降雨の総量として、対象降雨のそれよりかなり小さい値をとつているのに対し、米国では 1 in といつた大きい値をとつているのは、こうした事情によるものと思われる。
3. 降雨条件の変動による単位図要素の変化は、大流域よりも小流域の方がいちじるしく、ことに小流域における単位図ピークの変化が顕著である。従来の単位図法がそのまま米国で広く用いられているのに反して、わが国では種々の困難を伴つている理由は、こうしたことによつて諒解されるはずである。
4. 本章で述べた単位図要素の決定式は、実用上においても有効であろう。ことに降雨条件の変動による単位図要素の変化を与える諸式は、流出記録の少ないところで単位図法を適用する際に好都合と思われる。なお、これらの関係式が総合単位図の研究に対して、重要な指針を与えることはいうまでもない。

8. 単位図法の適用誤差

単位図法は線型仮説にもとづいているから、これを本質的に非線型特性を有する流出問題に適用すると、当然誤差を生じることになる。本章では単位降雨にもとづく単位図によつて、流出解析を行つたときに生じる誤差を検討するが、その結果は単位図法適用上の限界を明らかにし、さらに総合単位図への一つの示唆を与えよう。

(1) 最大流量に関する単位図法誤差

前2章で流出のピークを適合させるような単位降雨および単位図要素を与えたが、これらの関係式には降雨条件が含まれているから、ある降雨状態に対しては満足な結果を与えても、一般にはそうはいかないであろう。

そこで、平均強度 $r_{m \cdot u}$ および継続時間 $t_{d \cdot u}$ の降雨*に対して妥当な単位降雨(r_u, t_u)から求められた単位図を、平均強度 r_m 、継続時間 t_d なる一般の降雨に用いた場合の最大流量およびその遅れの時間の誤差について、小流域と大流域とにわけて考察しよう。

(a) 小流域の場合 ($t_u < t_c, t_d > t_c$)。6.(1) で述べたように、単位降雨および対象降雨からの $(\alpha_{tp})_m$ はそれぞれ (6.1) 式および (6.2) 式で与えられ、 $(\alpha_{tp})_{m \cdot u} = (\alpha_{tp})_{m \cdot n}$ を満足するような単位降雨 (r_u, t_u) を用いると、単位図法によつて対象降雨からの流出ピークを合致させることができる。しかしこうして求められた r_u, t_u は、一定の流域においても、伝播時間内のある特定の平均降雨強度 $r_{m \cdot u}$ に対してのみ妥当であつて、すべての降雨に対して妥当とはいえないから、ここに当然誤差が考えられてくる。

いま、伝播時間の相対誤差 r_t として、伝播速度の比をとつて、

$$r_t = \frac{(\alpha_{tp})_{m \cdot u}}{(\alpha_{tp})_{m \cdot n}} = \frac{B_c p (r_u t_u)^\delta}{p^\delta r_m^\delta (B_c + \epsilon r_u^\delta t_u^{\delta+1})} \dots \dots \dots (8.1)$$

* 前2章で求めた単位降雨および単位図要素の関係式に含まれる降雨の記号 r_{mp}, r_m および t_d を統一して、 $r_{m \cdot u}$ および $t_{d \cdot u}$ と表わすことにする。

とすれば、 $r_t=1$ のときは誤差は0で、 r_t が1よりずれるにつれて、誤差が増大することを意味する。

さて、単位降雨の r_u 、 t_u は特定の平均降雨強度 $r_{m\cdot u}$ について妥当なものであり、その関係は (6.5) 式によつて、

$$r_u = (p^b B_c r_{m\cdot u}^\epsilon)^{1/5} / \{t_u (B_c p - \epsilon p^b t_u r_{m\cdot u}^\epsilon)^{1/5}\}$$

で与えられるから、これを (8.1) 式に入れると、

$$r_t = (r_{m\cdot u} / r_m)^\epsilon = \kappa^\epsilon, \text{ ただし } \kappa = r_{m\cdot u} / r_m \dots\dots\dots (8.2)$$

となる。ここに、Manning の抵抗法則によれば $\epsilon=0.4$ である。上式から伝播時間の相対誤差 r_t は、単位図の基礎として選んだ平均降雨強度 $r_{m\cdot u}$ と対象降雨の平均強度 r_m の比の 0.4 乗程度であることがわかる。

つぎに流量に関する係数 α_q は、伝播に関する係数 α_t との間に (4.5) 式の関係があるから、 $(\alpha_q)_m$ に関する相対誤差 r_q も r_t と同様にしてつぎのようによくなる。

$$r_q = (\alpha_q)_m \cdot u / (\alpha_q)_m \cdot n = (r_{m\cdot u} / r_m)^\epsilon = \kappa^\epsilon. \dots\dots\dots (8.3)$$

そこで伝播時間 (流量) に関する誤差 $\sigma_{t(q)}$ として、

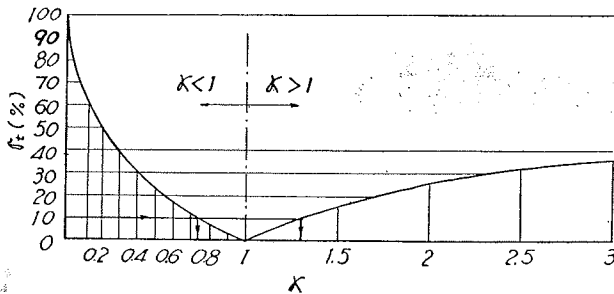
$$\left. \begin{aligned} \kappa < 1; \sigma_{t(q)} &= 1 - r_{t(q)} = 1 - \kappa^\epsilon, \\ \kappa > 1; \sigma_{t(q)} &= 1 - 1/r_{t(q)} = 1 - 1/\kappa^\epsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8.4)$$

と表わすことにする。これは、たとえば $r_{t(q)}=0.9$ のとき誤差 $\sigma_{t(q)}$ が 10% であることを意味する。図-8.1 は $\epsilon=0.4$ とおいて (8.4) 式の関係を図示したものであるが、たとえば $\sigma_{t(q)}=10\%$ 以内にある r_m の範囲を求めるには、この図を用いてつぎのようにすればよい。すなわち、矢印で示したように、 $\sigma_{t(q)}=10\%$ の点から水平直線をひき、 $\kappa < 1$ および $\kappa > 1$ のそれぞれの曲線と交わる点から下した鉛直線によつて、 κ の上限値 1.3 と下限値 0.75 が求められ、これから $\sigma_{t(q)}=10\%$ 以内となるような r_m の範囲が求められる。

以上は伝播時間と流量の係数 α_t 、 α_q について誤差を考えたが、伝播時間に関する誤差は、最大流量の発生時刻

図-8.1 σ_t と κ との関係

Fig. 8.1 Relation between σ_t and κ



に対しては適当な指標ではない。その理由は、最大流量の発生条件として $r(\tau_p) = r(t_p)$ の関係があつて、対象降雨の平均強度 r_m が $r_{m\cdot u}$ に等しくない場合の最大流量の伝播時間 $(t_p - \tau_p)$ の誤差を考えると、 τ_p が固定したものでないからである。

$r(\tau_p)$ および $r(t_p)$ の付近における降雨分布曲線の変化がほぼ等しいと考えると、 $r(\tau_p) = r(t_p)$ の条件によつて、 $|t_{p\cdot u} - t_{p\cdot n}| \approx |\tau_{p\cdot u} - \tau_{p\cdot n}|$ としてよいから、最大流量の発生時刻の差は伝播時間の差のほぼ 1/2 となる

(図-8.2 参照)。したがつて単位図法による最大流量の発生時刻 $t_{p\cdot u}$ と実際のそれの $t_{p\cdot n}$ との差を ϕ とすると、つぎようになる。

$$\phi = t_{p\cdot u} - t_{p\cdot n} = \pm \frac{1}{2} |(t_{p\cdot u} - \tau_{p\cdot u}) - (t_{p\cdot n} - \tau_{p\cdot n})|, \dots\dots\dots (8.5)$$

ここに、複号は $\kappa < 1$ のとき +、 $\kappa > 1$ のとき - とする。

さらに、 r_t は伝播速度の比であるから、

$$(t_{p\cdot u} - \tau_{p\cdot u}) / (t_{p\cdot n} - \tau_{p\cdot n}) = 1/r_t$$

の関係があり、これを (8.5) 式に入れると、

$$\phi = \frac{1}{2} (t_{p\cdot n} - \tau_{p\cdot n}) (1/r_t - 1) = \frac{1}{2} (t_{p\cdot u} - \tau_{p\cdot u}) (1 - r_t) \dots\dots\dots (8.6)$$

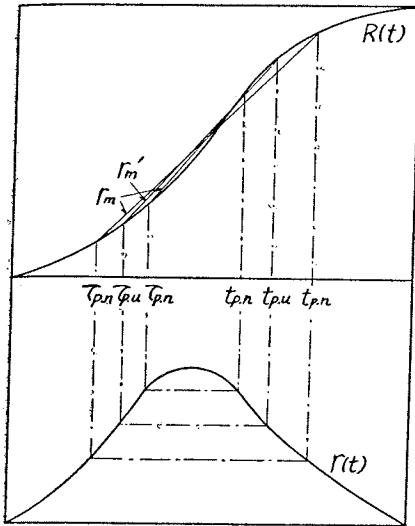
となる。この ϕ を無次元化するために、あらかじめ定まつている $t_{p\cdot u} - \tau_{p\cdot u} = K_0 L_0^b / r_{m\cdot u}^\epsilon$ で割ると、最大流量の発生時刻の誤差表現として、

$$\psi = (r_{m\cdot u}^\epsilon / K_0 L_0^b) \phi = (1 - r_t) / 2 \dots\dots\dots (8.7)$$

がえられる。したがつて、 $r_t=1$ のときに $\psi=0$ となり、また ψ を一定とするとき、 K_0 、 L_0 の増加が ϕ を増加させることがわかる。なお、最大流量の発生時刻に関する誤差表現として $t_{p\cdot u} / t_{p\cdot n}$ をとらなかつたのは、最大流量発生時刻の差が同一のときにも、 $t_{p\cdot u} / t_{p\cdot n}$ の値が降雨ピークの時間的位置によつて異なつてくるという難点があるからである。

図-8.2 降雨累加曲線と雨水擾乱の出発および到達時刻との関係

Fig. 8.2 Relation between rainfall mass curve and starting and reaching times of rainfall disturbance



つぎに、最大流量の誤差について考えよう。平均強度 r_m の降雨による最大流量 $Q_{n,p}$ は、(5.8) 式から、

$$Q_{n,p} = \left\{ (\alpha_{qp})_{m,n} / K_0^{1/p} \right\} \int_{\tau_{p,n}}^{t_{p,n}} r(t) dt$$

と表わされる。一方、平均強度 $r_{m,u}$ の降雨に適合させた単位降雨 (r_u, t_u) を用いた単位図法による最大流量 $Q_{u,p}$ は、(5.9) 式によつて、

$$Q_{u,p} = \frac{(\alpha_{qp})_{m,u}}{K_0^{1/p}} \left\{ m_1 \int_{\tau_{p,u}}^{t_{p,u}} r_u dt + \sum_{i=2}^i m_i \int_0^{t_u} r_u dt + m_{i+1} \int_{t_{p-t_u, i}}^{t_{p,u}} r_u dt \right\} = \left\{ (\alpha_{qp})_{m,u} / K_0^{1/p} \right\} \int_{\tau_{p,u}}^{t_{p,u}} r(t) dt$$

となる。したがつて、単位図法による最大流量と実際のそれとの相対誤差 r_Q は、

$$r_Q = \frac{Q_{u,p}}{Q_{n,p}} = \frac{(\alpha_{qp})_{m,u}}{(\alpha_{qp})_{m,n}} \frac{\int_{\tau_{p,u}}^{t_{p,u}} r(t) dt}{\int_{\tau_{p,n}}^{t_{p,n}} r(t) dt} = \kappa \varepsilon \frac{(t_{p,u} - \tau_{p,u})}{(t_{p,n} - \tau_{p,n})} \frac{r_m'}{r_m} \quad \dots (8.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \quad r_m' &= \int_{\tau_{p,u}}^{t_{p,u}} r(t) dt / \int_{\tau_{p,u}}^{t_{p,u}} dt, \\ r_m &= \int_{\tau_{p,n}}^{t_{p,n}} r(t) dt / \int_{\tau_{p,n}}^{t_{p,n}} dt. \end{aligned} \right\}$$

ところがさきに述べたところから、最大流量の伝播時間 ($t_{p,u} - \tau_{p,u}$) は $r_{m,u}$ によつて定まつているものであり、 $r_m = r_{m,u}$ のときには ($t_{p,u} - \tau_{p,u}$) = ($t_{p,n} - \tau_{p,n}$) であるから $r_Q = 1$ 、すなわち単位図法による最大流量の誤差が 0 となるのは当然である。

さて、最大流量を発生する τ_p と t_p の間には、 $r(\tau_p) = r(t_p)$ の条件があるから、 $r(t)$ が一定でないかぎり、($t_p - \tau_p$) の増加につれて $r(\tau_p)$ および $r(t_p)$ が減少し、($t_p - \tau_p$) が減少するとき $r(\tau_p)$ および $r(t_p)$ が増加する。したがつて、

$$\left. \begin{aligned} r_m > r_{m,u} &\rightarrow t_{p,n} - \tau_{p,n} < t_{p,u} - \tau_{p,u} \rightarrow r_m > r_m' \rightarrow r_Q < 1, \\ r_m < r_{m,u} &\rightarrow t_{p,n} - \tau_{p,n} > t_{p,u} - \tau_{p,u} \rightarrow r_m < r_m' \rightarrow r_Q > 1 \end{aligned} \right\} \dots (8.9)$$

の関係があることがわかる。このことは、単位図法による最大流量が実際のそれに較べて、 $\kappa < 1$ のときは小さく、 $\kappa > 1$ のときは大きいことを意味する。

(8.8) 式のままではわかりにくいので、さらに以下のように変形しよう。すなわち、最大流量の発生時刻の誤差を考えたときの仮定 $|t_{p,u} - t_{p,n}| = |\tau_{p,u} - \tau_{p,n}|$ を用い、図-8.2 における $t_{p,u}$ と $t_{p,n}$ の間および $\tau_{p,u}$ と $\tau_{p,n}$ の間で降雨強度がそれぞれ一定値 $r(t_{p,n})$ および $r(\tau_{p,n})$ であると近似し、最大流量の発生条件から $r(\tau_{p,n}) = r(t_{p,n})$ が成立することを考慮すると、

$$r_m' = \frac{r_m(t_{p,n} - \tau_{p,n})}{t_{p,u} - \tau_{p,u}} \pm \frac{2r(t_{p,n})|t_{p,u} - t_{p,n}|}{t_{p,u} - \tau_{p,u}} \quad \dots (8.10)$$

がえられる。ここに、複号は $\kappa < 1$ のとき+、 $\kappa > 1$ のとき-とする。したがつて、(8.8) 式から

$$r_Q = \frac{r_m'}{r_m} \frac{t_{p,n} - \tau_{p,n}}{t_{p,u} - \tau_{p,u}} + \frac{2r(t_{p,n})}{r_m} \frac{t_{p,u} - t_{p,n}}{t_{p,u} - \tau_{p,u}} = r_t + 2\nu\psi = r_t + \nu(1 - r_t), \quad \text{ただし } \nu = r(t_{p,n})/r_m \leq 1 \quad \dots (8.11)$$

となる。これから容易に $|1 - r_Q| \leq |1 - r_t|$ の関係が導かれるから、最大流量の相対誤差の 1 からのずれは、伝播に関するものより小さいことがわかる。しかし実際には誤差の性格と絶対量とが問題になるから、単位図法の欠点で最大流量の合致度より伝播時間のそれにあるとは断定するわけにいかない。たとえば $r_t = 0.9$ 、 $\nu = 0.5$ の場合を考えると、(8.11) 式から当然 $r_Q = 0.95$ となるが、(8.6) 式から最大流量の発生時刻の差は、

$$\phi = \frac{1}{2}(t_{p,n} - \tau_{p,n})(1/0.9 - 1) = \frac{1}{18}(t_{p,n} - \tau_{p,n})$$

となり、また最大流量そのものの差は、

$$Q_{u,p} - Q_{n,p} = Q_{n,p}(r_Q - 1) = -0.05 Q_{n,p}$$

となる。実際の出水現象におけるオーダーを考へて、 $t_{p,n} - \tau_{p,n} = 9$ hr、 $Q_{n,p} = 2000$ m³/s とすれば、

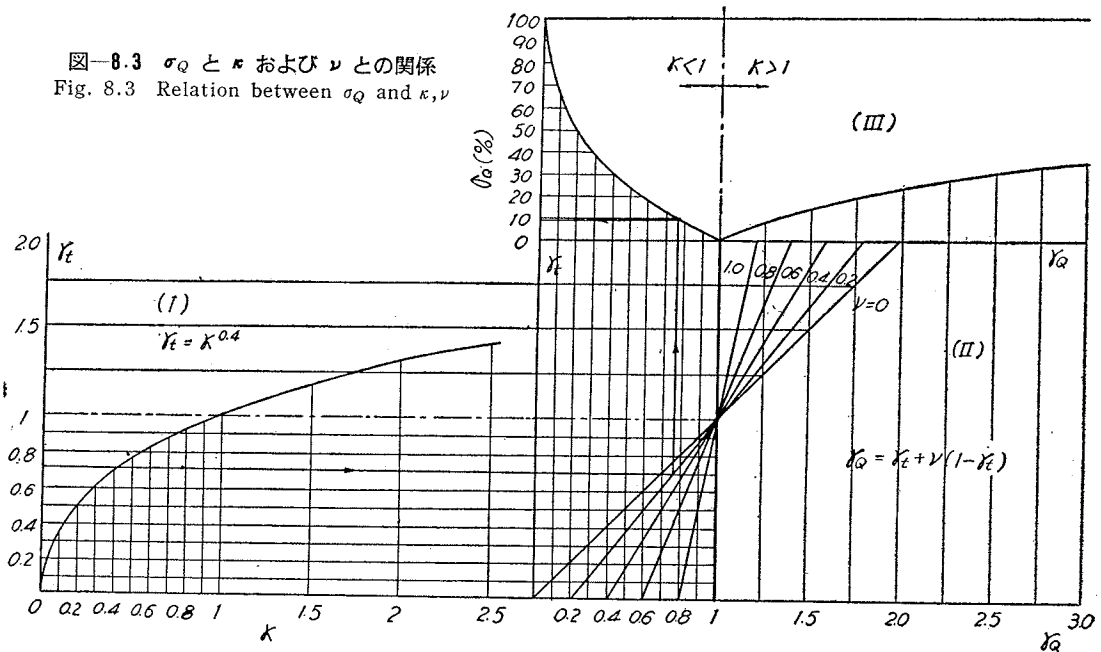
$$\phi = 0.5 \text{ hr}, \quad Q_{u,p} - Q_{n,p} = -100 \text{ m}^3/\text{s}$$

となつて、この場合最大流量の発生時刻の誤差よりも最大流量そのものの誤差が問題になるであろう。このように誤差論的には伝播時間の方が問題になるはずであるが、出水解析という実際上の立場からは、最大流量の合致度を注目することで必要がある。

さて、降雨強度が一定のときは $r_m = r(t_{p,n})$ 、すなわち $\nu = 1$ となり、(8.6) 式によつて最大流量の発生時刻は変化するが、最大流量そのものの誤差は0となる。しかし一般には ν は1よりかなり小さいから、安全側を考えると、(8.11) 式の右辺第2項を無視してつぎのようにできよう。

$$r_Q \approx r_t \dots \dots \dots (8.12)$$

図-8.3 σ_Q と κ および ν との関係
Fig. 8.3 Relation between σ_Q and κ, ν



ν は降雨の時間的変動を示すパラメーターであつて、変動が少ないほど ν は1に近づくから、 r_Q もまた1に近づく。すなわち、単位図法の精度は降雨曲線が扁平になるにつれて増加することがわかる。

いま、最大流量の誤差 σ_Q として、

$$\left. \begin{aligned} r_Q < 1; \sigma_Q = 1 - r_Q = (1 - \nu)(1 - r_t), \\ r_Q > 1; \sigma_Q = 1 - 1/r_Q = 1 - 1/\{r_t + \nu(1 - r_t)\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8.13)$$

と表わすことにする。この意味は $\sigma_{t(Q)}$ の場合と同様であつて、 r_t と κ の間に (8.2) 式の関係があるから、(8.13) 式を図示すれば 図-8.3 のようになる。図においてIは (8.2) 式から、IIは ν をパラメーターとして(8.11) 式から、さらに IIIは (8.13) 式から画いたものである。この図から最大流量に関する誤差を求めるには、まず矢印の線で示したように κ から r_t を求め、ついで ν をパラメーターとして r_Q 、最後に σ_Q をうるようにすればよい。逆に r_Q をある % 以下ときめた場合に、単位図法適用可能な r_m の上限値および下限値を求めるには、さきの矢印の線を逆にたどればよい。

以上の関係を、さらに解析的に表現しよう。まず (8.13) 式の上式から $r_t = 1 - \sigma_Q / (1 - \nu)$ であるから、 r_m の上限値 r_m' は、

$$r_m' = r_{m,u} \{1 - \sigma_Q / (1 - \nu)\}^{1/\epsilon} \dots \dots \dots (8.14)$$

として与えられる。また (8.13) 式の下式から $r_t = \{1 - \nu(1 - \sigma_Q)\} / \{1 - \nu(1 - \sigma_Q)\}$ であるから、 r_m の下限値 r_m'' はつぎのようになる。

$$r_m'' = r_{m,u} \{1 - \nu(1 - \sigma_Q) / [1 - \nu(1 - \sigma_Q)]\}^{1/\epsilon} \dots \dots \dots (8.15)$$

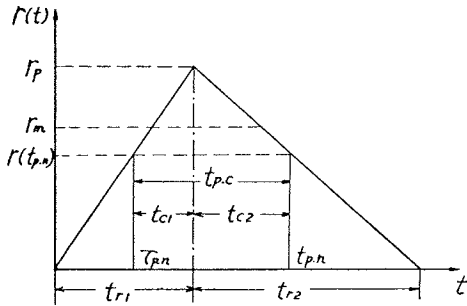
いま、一例として $\sigma_Q = 10\%$ 、 $\nu = 0.5$ とすれば、 $\epsilon = 0.4$ であるから、

$$r_m' = 1.75 r_{m,u} \quad r_m'' = 0.35 r_{m,u}$$

となる。したがつてこの条件下では、単位図法の基礎として選んだ降雨強度 $r_{m,u}$ の 0.35~1.75 倍の範囲の r_m の降雨に対して、単位図法を適用してよいことになる。

さて、 $\nu=r(t_{p,n})/r_m$ のままでは、 ν の意味がわかりにくいので、降雨曲線を 図-8.4 のように三角形で近似してみよう。この近似は乱暴なようであるが、 ν の意味を考えるにはこれで十分であり、 t_{pc} は最大流量の伝播に要する時間、 r_p は最大降雨強度である。この場合は 図-8.4 から明らかのように、

図-8.4 ν の意味を説明する三角形降雨曲線
Fig. 8.4 Triangular model distribution of rainfall illustrating the meaning of ν



$$r_m = \{r_p + r(t_{p,n})\} / 2, \dots\dots\dots(8.16)$$

$$r(t_{p,n}) = r_p t_{p,n} / t_{r1} = r_p (t_{r1} - t_{c1}) / t_{r1} \dots\dots\dots(8.17)$$

となる。さらに相似の条件から
 $t_{r1} + t_{r2} = t_d, \quad t_{c1} = t_{r1} t_{pc} / t_d$
となり、これを (8.17) 式に代入すると、
 $r(t_{p,n}) = r_p (1 - t_{pc} / t_d)$

したがって、これと (8.16) 式とから、つぎのように ν が t_{pc} と t_d とによつて表現される。

$$\nu = r(t_{p,n}) / r_m = 2(t_d - t_{pc}) / (2t_d - t_{pc}) \dots\dots\dots(8.18)$$

ところが t_d は降雨記録から直ちに求められ、 t_{pc} は 2.(2)(c) に述べた最大流量発生条件を基礎とした簡易推算法によればよい。こうして t_d, t_{pc} がわかると、各降雨について

ν および r_m が定まり、(8.11) 式によつて単位図法の適用誤差 σ_Q の値が求められる。また逆に与えられた σ_Q の値に対応する降雨強度 r_m の適用範囲が、図-8.3 あるいは (8.14), (8.15) 式から求められる。

要するに一流域における単位図法の適用限界を考えるとときでも、降雨強度のみでなく、その時間的分布を考慮することが必要になる。したがって、わが国のような小流域における単位図法の適用限界の問題には、流域特性 B_c 、降雨の平均強度 r_m およびその時間的変動を示すパラメーター ν の三つの因子が含まれることになり、小流域における単位図法の適用を困難かつ複雑にする理由が明らかになったといえよう。

(b) 大流域の場合 ($t_u < t_c, t_d < t_c$) 6.(2) で述べたように、単位降雨および対象降雨からの $(\alpha_{tp})_m$ はそれぞれ (6.1) 式および (6.12) 式で与えられ、伝播時間の相対誤差 r_t は、

$$r_t = \frac{(\alpha_{tp})_{m \cdot u}}{(\alpha_{tp})_{m \cdot n}} = \left(\frac{B_c + \epsilon r_m \delta t_d^{\delta+1}}{B_c + \epsilon r_u \delta t_u^{\delta+1}} \right) \left(\frac{r_u t_u}{r_m t_d} \right)^\delta \dots\dots\dots(8.19)$$

となる。ところが r_u, t_u はある特定の降雨の平均強度 $r_{m \cdot u}$ と継続時間 $t_{d \cdot u}$ に対して妥当なものであつて、その関係は (6.14) 式から $r_u t_u = r_{m \cdot u} t_{d \cdot u}$ となるから、これを (8.19) 式に代入し、かつ $B_c \gg \epsilon r_m \delta t_d^{\delta+1}, B_c \gg \epsilon r_u \delta t_u^{\delta+1}$ なることを考慮すると、結局つぎの関係がえられる。

$$r_t = (r_{m \cdot u} t_{d \cdot u} / r_m t_d)^\delta = (R_u / R_{td})^\delta = \mu^\delta \dots\dots\dots(8.20)$$

ここに、 R_u は単位降雨の総量、 R_{td} は対象降雨の総量であり、その両者の比が μ である。したがつてまた、流量の係数 $(\alpha_{qp})_m$ の相対誤差 r_q も、次式で与えられる。

$$r_q = (\alpha_{qp})_{m \cdot u} / (\alpha_{qp})_{m \cdot n} = \mu^\delta \dots\dots\dots(8.21)$$

これらから最大流量の伝播時間*および流量の係数に関する相対誤差 r_t, r_q は、ともに $\mu = R_u / R_{td}$ のほぼ 2/3 乗であることがわかる。そこで $\delta = 2/3$ として、

$$\left. \begin{aligned} \mu < 1; \quad \sigma_{t(q)} &= 1 - r_{t(q)} = 1 - \mu^{2/3}, \\ \mu > 1; \quad \sigma_{t(q)} &= 1 - 1/r_{t(q)} = 1 - 1/\mu^{2/3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8.22)$$

を与えておけば、最大流量の伝播時間（発生時刻）および流量の係数の誤差を表わすことができる。図-8.5 は (8.22) 式の関係を図示したものであつて、前項の場合と同様にして、たとえば $\sigma_{t(q)} = 10\%$ に対する μ の上限値は 1.2、下限値は 0.85 となり、これから R_{td} の適用範囲が求められる。

つぎに最大流量については、 $Q_{p,n} = \{(\alpha_{qp})_m / K_0^{1/p}\} \int_0^{t_d} r(t) dt$ であるから、その相対誤差 r_Q は前項の場合と同様にして、

$$r_Q = \frac{Q_{u \cdot p}}{Q_{n \cdot p}} = \frac{(\alpha_{qp})_{m \cdot u}}{(\alpha_{qp})_{m \cdot n}} \frac{\int_0^{t_d} r(t) dt}{\int_0^{t_d} r(t) dt} = \mu^\delta \dots\dots\dots(8.23)$$

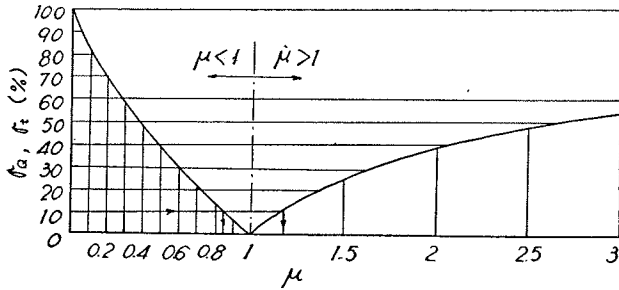
となる。したがつて、誤差 σ_Q としては、 $\mu = 2/3$ とおいて、

$$\left. \begin{aligned} \mu < 1: \quad \sigma_Q &= 1 - r_Q = 1 - \mu^{2/3}, \\ \mu > 1: \quad \sigma_Q &= 1 - 1/r_Q = 1 - 1/\mu^{2/3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.24)$$

と表わせばよい。これを図示すれば、 $\sigma_Q = \sigma_{t(q)}$ であるから 図-8.5 のようであつて、これから誤差 σ_Q に対応す

* この場合は小流域の場合と異なつて常に $\tau_p = 0$ であるから、伝播時間についての r_t を、最大流量の発生時刻についてのものとして差支えない。

図-8.5 σ_t および σ_Q と μ との関係
Fig. 8.5 Relation between σ_t, σ_Q and μ

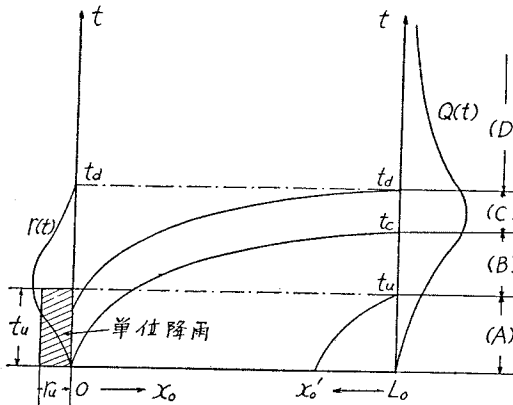


前節では流出量曲線のピーク付近の単位図法誤差について考察したが、その成果を流出過程の全体にあてはめることができないのは、流出機構すなわち α_t の表示が時間区分によつて異なることから当然といえよう。それでここでは、単位図法によつて最大流量を合致させることができた単位降雨 (r_u, t_u) からの単位図を、流出過程の全体にわたつて適用した場合の誤差について、考察を進めることにする。

(a) 小流域の場合 ($t_u < t_c, t_d > t_c$)。この場合の流出機構を模型的に画くと 図-8.6 のとおりであつて、前節(a)で述べたことは $t_c \leq t \leq t_d$ の区間についてあてはまり、ピークがこの区間にくることはいうまでもない。

図-8.6 $t_u < t_c, t_d > t_c$ の場合の流出機構

Fig. 8.6 Runoff mechanism in the case of $t_u < t_c$ and $t_d > t_c$



α_t の表示の差異によつて流出機構を分類すると、

- (A) $0 \leq t < t_u$, (B) $t_u \leq t < t_c$,
- (C) $t_c \leq t < t_d$, (D) $t_d \leq t$

とすることができるから、以下にそれぞれの区分の誤差について述べよう。

(A) $0 \leq t < t_u$: B_c 中の L_0 を下流端から上流端に向つて、測つた距離 x'_0 でおきかえたものを B_c' とすると、(5.6) 式から、

$$(\alpha_t)_{m \cdot u} = p^p B_c'^e r_u^e, \quad (\alpha_t)_{m \cdot n} = p^p B_c'^e r_m^e, \\ \therefore r_t = (\alpha_t)_{m \cdot u} / (\alpha_t)_{m \cdot n} = (r_u / r_m)^e$$

となる。これに r_u として (6.6) 式の関係を入れると、

$$r_t = (p^{p^2} B_c^e p / t_u^e) (r_m \cdot u^p / r_m)^e \dots \dots \dots (8.25)$$

となる。いま、単位図法による流量および実際の流量をそれぞれ Q_u, Q_n とすれば、

$$Q_u = \frac{(\alpha_q)_{m \cdot u}}{K_0^{1/p}} \int_0^{t_u} r(t) dt \int_0^t r_u dt = \frac{(\alpha_q)_{m \cdot u}}{K_0^{1/p}} \int_0^t r_m' dt,$$

$$Q_n = \frac{(\alpha_q)_{m \cdot n}}{K_0^{1/p}} \int_0^t r_m dt$$

となる。したがつて、つぎの関係がえられる。

$$r_Q = Q_u / Q_n = r_t r_m' / r_m,$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \quad r_m' &= \int_0^{t_u} r(t) dt / \int_0^{t_u} dt, \quad r_m = \int_0^t r(t) dt / \int_0^t dt. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8.26)$$

とくに t_u があまり大きくなければ、 $r_m' \approx r_m$ と近似できるから、 $p=0.6$ とおいて、

$$r_Q \approx r_t = (0.6^{0.36} B_c^{0.24} / t_u^{0.4}) (r_m \cdot u^{0.6} / r_m)^{0.4} \dots \dots \dots (8.27)$$

としてよい。さらに小流域では上式右辺の第1括弧はほぼ1であるから、 r_Q の大略の値としては、

$$r_Q = (r_m \cdot u^{0.6} / r_m)^{0.4} \dots \dots \dots (8.28)$$

と表わしてよいであろう。

(B) $t_u \leq t < t_c$: (5.7) と (5.6) の両式から、

$$(\alpha_t)_{m \cdot u} = B_c' (r_u t_u)^e \{ B_c' + \epsilon r_u^e t_u^{e+1} \}, \quad (\alpha_t)_{m \cdot n} = p^p B_c'^e r_m^e$$

となる。この比をとり、 r_u として (6.6) 式を入れると、

$$r_t = (\alpha_t)_{m \cdot u} / (\alpha_t)_{m \cdot n} = (B_c / B_c')^e (r_m \cdot u / r_m)^e \dots \dots \dots (8.29)$$

る μ の上、下限値、すなわち R_{td} の適用範囲が求められる。

以上の考察からわかるように、大流域における単位図法適用限界については、総雨量だけを考えればよく、前項の小流域の場合といちじるしく異なつてゐる。このことは、大流域における単位図法の適用が、小流域におけるものに較べて、いかに有効であるかを明示するものである。

(2) 流出量曲線全体に関する単位図法誤差

となる。また

$$Q_u \doteq \left\{ (\alpha_q)_{m \cdot u} / K_0^{1/p} \right\} \left\{ \sum_{i=0}^i m_i \int_0^{t_u} r_u dt + m_{i+1} \int_0^{t-it_u} r_u dt \right\}$$

$$\doteq \left\{ (\alpha_q)_{m \cdot u} / K_0^{1/p} \right\} \int_0^t r_m dt,$$

$$Q_n \doteq \left\{ (\alpha_q)_{m \cdot n} / K_0^{1/p} \right\} \int_0^t r_m dt,$$

ここに、番号 i は $it_u < t < (i+1)t_u$ を満足するものであり、

$$m_i = \left[\int_0^{t_u} r(t) dt \right]_i / \int_0^{t_u} r_u dt, \quad r_m = \int_0^t r(t) dt / \int_0^t dt$$

である。したがって、 $\epsilon = 0.4$ とおくと、

$$r_Q = Q_u / Q_n = r_t = (B_c / B_c')^{0.4} (r_{m \cdot u} / r_m)^{0.4} \dots \dots \dots (8.30)$$

となる。ところが $B_c > B_c'$ であり、また一般に $r_{m \cdot u} > r_m$ であるから、単位図法による流量は実際の流量よりも大きくなり、その相対誤差は B_c' が小さいほど、すなわち t が t_u に近いほど大きく、また B_c' が B_c に近づくほど、すなわち t が t_c に近いほど小さくなってくる。

(C) $t_c \leq t < t_d$: この区間における $(\alpha_t)_m$ の表示は、前節 (a) で取り扱つたものと同様であるから、

$$r_t = (r_{m \cdot u} / r_m)^\epsilon, \quad \text{ただし } r_m = \int_\tau^t r(t) dt / \int_\tau^t dt \dots \dots \dots (8.31)$$

である。また r_Q については、同一時間 t についての相対誤差であるから、つぎのように表わされる。

$$r_Q = \frac{(\alpha_q)_{m \cdot u} \int_\tau^t r(t) dt / \int_{\tau_n}^t r(t) dt}{(\alpha_q)_{m \cdot n} \int_{\tau_n}^t r(t) dt} = r_t \frac{\int_{\tau_u}^t r(t) dt / \int_{\tau_n}^t r(t) dt}{\int_{\tau_n}^t r(t) dt} \dots \dots \dots (8.32)$$

ここに、 τ_u は単位降雨の伝播の出発時刻であつて、 $t - \tau_u = t_{p \cdot u} - \tau_{p \cdot u}$ であり、また τ_n は対象降雨の伝播の出発時刻であるから、

$$r_t \leq 1 \text{ に応じて、} \int_{\tau_u}^t r(t) dt / \int_{\tau_n}^t r(t) dt \geq 1$$

となる。したがって、 $|1 - r_Q| \leq |1 - r_t|$ であつて、流量に関する相対誤差の 1 からのずれは一般に伝播時間のそれより小さいが、 $\tau_u \doteq \tau_n$ であるから、 $\epsilon = 0.4$ とおいて、

$$r_Q \doteq r_t = (r_{m \cdot u} / r_m)^{0.4} \dots \dots \dots (8.33)$$

とすれば安全側である。

(D) $t_d \leq t$: (5.7) 式から、

$$(\alpha_t)_{m \cdot u} = B_c (r_u t_u)^\delta / \{ B_c + \epsilon r_u^\delta t_u^{\delta+1} \},$$

$$(\alpha_t)_{m \cdot n} = B_c \{ r_m (t_d - \tau) \}^\delta / \{ B_c + \epsilon r_m^\delta (t_d - \tau)^{\delta+1} \}$$

となる。ここに、 $r_m = \int_\tau^{t_d} r(t) dt / \int_\tau^{t_d} dt$ であり、 τ は伝播の出発時刻であつて、 $t_d - \tau > t_u$ の条件を満足するものである。 $t_d - \tau \leq t_u$ 区間の τ から出発するものは、 t_u が小さいから問題とするにあたらないわけである。上の二つの式の比をとり、(6.6) 式の r_u を入れると、

$$r_t = \frac{p^\delta}{B_c^{1-\epsilon}} \frac{B_c + \epsilon r_m^\delta (t_d - \tau)^{\delta+1}}{(t_d - \tau)^\delta} \frac{r_{m \cdot u}^\epsilon}{r_m^\delta} = \frac{p^\delta B_c^\epsilon}{(t_d - \tau)^\delta} \frac{r_{m \cdot u}^\epsilon}{r_m^\delta} \dots \dots \dots (8.34)$$

となる。つぎに

$$Q_u \doteq \left\{ (\alpha_q)_{m \cdot u} / K_0^{1/p} \right\} \int_\tau^{t_d} r(t) dt,$$

$$Q_n = \left\{ (\alpha_q)_{m \cdot n} / K_0^{1/p} \right\} \int_\tau^{t_d} r(t) dt$$

であるから、 $p = 0.6$ 、 $\epsilon = 0.4$ とおいて、次式がえられる。

$$r_Q = Q_u / Q_n \doteq r_t \doteq \{ 0.6^{0.6} B_c^{0.4} / (t_d - \tau)^{2/3} \} (r_{m \cdot u}^{0.4} / r_m^{2/3}) \dots \dots \dots (8.35)$$

これから τ の増加、すなわち流出量曲線の後部の方で誤差が増加することがわかるが、誤差の絶対量はかなり小さいから、問題とするほどのことはない。なお、 $B_c^{0.4}$ は 10 以内であるから、 r_Q を近似的に次式で表わしても、大きい誤りはないであろう。

$$r_Q = r_{m \cdot u}^{0.4} / r_m^{2/3} = (r_{m \cdot u} / r_m^{5/3})^{0.4} \dots \dots \dots (8.36)$$

以上を要するに、各時間区分について単位図法による流量と実際のそれとの相対誤差 r_Q を求めたが、これらは流出量曲線のピークを単位図法で合致させた単位降雨 (r_u , t_u) からの単位図を用いた場合のもので、いずれも 1 からのずれがそれほど大きくないことがわかる。またピーク付近の区間 (C) に較べて、(A)、(B) および (D)

の区間の流量は当然小さいから、 r_Q の1からのずれが少々大きくても、誤差の絶対量はそれほど大きくならない。したがって、単位降雨および単位図の要素としては、ピークを合致させるものに着目し、これを流出過程全体に適用しても、大した差支えはないであろう。

(b) 大流域の場合 ($t_u < t_c, t_d < t_c$) この場合の流出機構を模型的に画くと 図-8.7 のとおりであつて、 α_t の表示の差異によつて、流出機構をつぎのように分類することができる。

- (A) $0 \leq t < t_u$, (B) $t_u \leq t < t_d$,
- (C) $t_d \leq t < t_c$, (D) $t_c \leq t$

(A) $0 \leq t < t_u$: (5.6) 式から、

$$(\alpha_t)_{m \cdot u} = p^{\delta} B_c' \epsilon r_u^{\epsilon}, \quad (\alpha_t)_{m \cdot n} = p^{\delta} B_c' \epsilon r_m^{\epsilon}$$

となるが、 r_u, t_u は流量のピークを合致させるように定められたもので、(6.14) 式の関係があるから、結局

$$r_t = (\alpha_t)_{m \cdot u} / (\alpha_t)_{m \cdot n} = (t_d \cdot u / t_u)^{\epsilon} (r_m \cdot u / r_m)^{\epsilon} \dots \dots \dots (8.37)$$

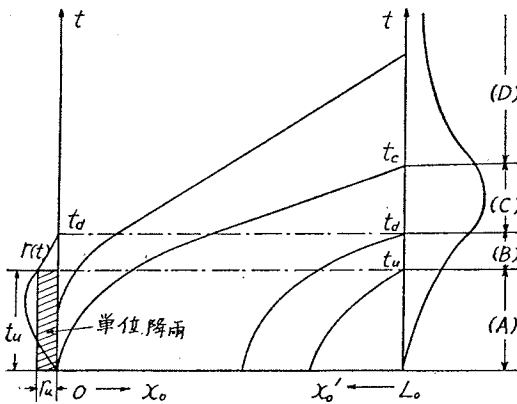
となる。一方、流量の相対誤差 r_Q は、前項 (A) と同様にして、つぎのように表わされる。

$$r_Q = r_t (r_m' / r_m) = (t_d \cdot u / t_u)^{0.4} (r_m \cdot u / r_m)^{0.4} (r_m' / r_m), \quad \left. \begin{array}{l} \text{ここに,} \\ r_m' = \int_0^{t_u} r(t) dt / \int_0^{t_u} u dt, \quad r_m = \int_0^t r(t) dt / \int_0^t dt. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (8.38)$$

(B) $t_u \leq t < t_d$: (5.7) と (5.6) の両式から

$$(\alpha_t)_{m \cdot u} = B_c' (r_u t_u)^{\delta} / \{B_c' + \epsilon r_u^{\delta} t_u^{\delta+1}\}, \quad (\alpha_t)_{m \cdot n} = p^{\delta} B_c' \epsilon r_m^{\epsilon}$$

図-8.7 $t_u < t_c, t_d < t_c$ の場合の流出機構
Fig. 8.7 Runoff mechanism in the case of $t_u < t_c$ and $t_d < t_c$



となり、さらに (6.14) 式を考慮すると、

$$r_t = \frac{B_c'^{1-\epsilon}}{p^{\delta} r_m^{\epsilon}} \frac{(r_m \cdot u t_d \cdot u)^{\delta}}{B_c' + \epsilon t_u (r_m \cdot u t_d \cdot u)^{\delta}} = \frac{t_d \cdot u^{\epsilon}}{p^{\delta} B_c' \epsilon} \frac{r_m \cdot u^{\delta}}{r_m^{\epsilon}} \dots \dots \dots (8.39)$$

となる。大流域では一般に $t_d \cdot u^{\delta} \approx p^{\delta} B_c' \epsilon$ と近似できるから、 r_Q は前項 (B) と同様にして、つぎのように表わされる。

$$r_Q \approx r_t \approx r_m \cdot u^{2/3} / r_m^{0.4}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{ただし,} \\ r_m = \int_0^t r(t) dt / \int_0^t dt \end{array} \right\} \dots \dots \dots (8.40)$$

(C) $t_d \leq t < t_c$: この区間の α_t の表示は、前節 (b)

で取り扱つたと同様であるから、

$$r_Q = r_t = (r_m \cdot u t_d \cdot u / r_m t_d)^{2/3}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{ただし,} \\ r_m = \int_0^{t_d} r(t) dt / \int_0^{t_d} dt \end{array} \right\} \dots \dots \dots (8.41)$$

となる。

(D) $t_c \leq t$: (5.7) 式から伝播の出発時刻 τ に応じて、

$$t_d - \tau \geq t_u \text{ のとき, } (\alpha_t)_{m \cdot u} = B_c (r_u t_u)^{\delta} / \{B_c + \epsilon r_u^{\delta} t_u^{\delta+1}\}, \\ t_d - \tau < t_u \text{ のとき, } (\alpha_t)_{m \cdot u} = B_c \{r_u (t_u - \tau)\}^{\delta} / \{B_c + \epsilon r_u^{\delta} (t_u - \tau)^{\delta+1}\}$$

となり、さらに

$$(\alpha_t)_{m \cdot n} = B_c \{r_m (t_d - \tau)\}^{\delta} / \{B_c + \epsilon r_m^{\delta} (t_d - \tau)^{\delta+1}\}$$

となる。これらと (6.14) 式を用い、 $B_c \gg \epsilon r_u^{\delta} t_u^{\delta+1}, \epsilon r_u^{\delta} (t_u - \tau)^{\delta+1}, \epsilon r_m^{\delta} (t_d - \tau)^{\delta+1}$ なることを考慮すると、前項 (D) と同様にして、つぎようになる。

$$t_d - \tau \geq t_u; \quad r_Q \approx r_t \approx \{r_m \cdot u t_d \cdot u / r_m (t_d - \tau)\}^{2/3}, \\ t_d - \tau < t_u; \quad r_Q \approx r_t \approx \{r_m \cdot u t_d \cdot u (t_u - \tau) / r_m t_u (t_d - \tau)\}^{2/3}. \quad \left. \dots \dots \dots (8.42) \right\}$$

以上を要するに、流出量曲線のピークを単位図法で合致させた単位降雨 (r_u, t_u) からの単位図を用いた場合について、単位図法による流量と実際のそれとの相対誤差 r_Q を各時間区分ごとに求めたが、いずれも r_Q の1からのずれはそれほど大きくない。また r_Q が同一のときは、流量が大きいほど誤差の絶対量が大きくなるはずである。したがって、最大流量を合致させた単位降雨、すなわち (6.14) 式で与えられる r_u, t_u を用いて流出過程全体を取り扱つても差支えを生じないであろう。

(3) 流域の大小と単位図法誤差との関係

前2節で述べたように、小流域と大流域とで誤差表現が異なってくるから、それぞれ添字 s, l をつけて、比較することにする。まず最大流量については、(8.11) と (8.28) の両式から、

$$r_{Q,s} = r_t + \nu(1 - r_t) \doteq r_t = (r_{m,u}/r_m)^{0.4},$$

$$r_{Q,l} = r_t = (R_u/R_{td})^{2/3}$$

と表わされる。したがって相対誤差は、小流域では単位降雨選定の基礎とした降雨強度 $r_{m,u}$ と最大流量を生じる対象降雨の平均強度 r_m との比の関数であり、また大流域では単位降雨の総量と対象降雨の総量との比の関数である。洪水を対象とする場合、一般に

$$r_{m,u}/r_m \text{ の変動} > R_u/R_{td} \text{ の変動}$$

である。これは、洪水を発生する降雨の総量は一流域でそれほど変わるものでなく、降雨の時間強度はそのピーク付近に限つてもいちじるしく変動するからである。したがって、単位図法による最大流量の誤差は、小流域における方が大流域におけるよりも大きいことがわかる。

つぎに流出量曲線全体についての流量の相対誤差 r_Q には、前節 (a) および (b) の諸式からわかるように、平均降雨強度のほか、小流域では流域特性、大流域では降雨継続時間が関与する。またいずれの場合にも $r_{m,u}$ と r_m の比が入ってくるが、この比の1からのずれは、小流域と大流域のそれぞれに対する $r_{m,u}$ と r_m の定義からわかるように、前者の方が後者より大きいはずである。したがって、流出量曲線全体に関する誤差も、最大流量の場合と同様に、小流域における方が大流域におけるものよりもかなり大きくなるであろう。

9. む す び

単位図法が今日においても山間地流出を知る最も有効な手段であることから、その適用上の諸問題を解明するために、古くから多くの研究が行われ、かなりの成果を収めてきたようである。ところが山間地流域における雨水挙動の極度の複雑さから、これらの研究のほとんどすべてが流出現象を外側からながめるという立場をとつていて、経験への依存度が非常に強いから、工学的な意味での貢献は十分認められても、研究成果に普遍性を欠いている点に難点があつた。わが国と米国における単位図法適用に際しての経験的事実の相違が十分理解できなかったのも、従来の研究の立場からは当然といえよう。

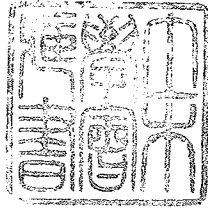
本研究においては、雨水の挙動を全く水理学的な立場から処理し、単位図法の内蔵する力学的な意義から出発して、単位降雨あるいは単位図の内部的な機構を明らかにしてから論議を進めたので、えられた成果は本質的に普遍性をもっているといつて差支えない。

単位図を先験的に作成するいわゆる総合単位図の問題あるいは誤差概念を必然的ともなう単位図法の適用限界の問題などは、従来からその解決が切望されているが、いまだ満足すべき解答が与えられていないようである。これらの問題を解決するには、まず単位図法のもつ意義を明確に把握しなければならないが、水理学的に一貫した考察を進めた本研究の成果は、こうした要求にも一つの解答を与えるものと期待している。

参 考 文 献

- 1) B. D. Richard; Flood Estimation and Control, 1950, pp. 1~122.
- 2) R. T. Zoch; On the Relation between Rainfall and Streamflow, Monthly Weather Rev., Vol. 62, 1932, pp. 315~322 and Vol. 64, 1934, pp. 105~121.
- 3) H. Jeffreys; The Flow of Water in an Inclined Channel of Rectangular Section, Phil. Mag., Ser. 6, Vol. 49, No. 293, 1925.
- 4) R.E. Horton, H.R. Leach and R. Van Vliet; Laminar Sheetflow, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 15, 1934, pp. 393~404
- 5) 岩垣雄一; 雨水流による地面浸食機構に関する基礎的研究, 学位論文, 昭 30.9, pp. 1~32
- 6) V. J. Palmer; Retardance Coefficients for Low Flow in Channels lined with Vegetation, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 27, 1946, pp. 187~197.
- 7) 末石富太郎; 特性曲線法による出水解析について, 土木学会論文集, 第29号, 昭 31.2, pp. 74~87.
- 8) 岩垣雄一, 高棹琢馬; 降雨および流域特性が流出関係に及ぼす効果について, 京大防災研究所創立5周年記念論文集, 昭 31.11, pp. 191~200.
- 9) 岩垣雄一; 特性曲線法による流出の解析について, 土木学会第12回年次学術講演会講演概要, 昭 32.6.
- 10) F. F. Snyder; Synthetic Unit Hydrographs, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 19, 1938, pp.447~454.
- 11) 中安米蔵; 雨量より洪水量の推定に就て, 建設省直轄工事第四回技術研究報告, 昭 26.3, pp. 159~194.
- 12) 立神弘洋; 洪水流出の新解析法, 昭 30.3, pp. 26~29.
- 13) A. B. Taylor and H. E. Schwarz; Unit-Hydrograph Lag and Peak Flow related to Basin Characteristics, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 33, 1952, pp. 235~246.

- 14) 石原藤次郎, 田中要三, 金丸昭治; わが国における単位図の特性について, 土木学会誌, 第41巻, 第3号, 昭31.3, pp. 18~23.
- 15) 石原藤次郎, 金丸昭治; 降雨条件の変動による単位図の変化について, 土木学会論文集, 第32号, 昭31.3, pp. 50~56.



昭和34年3月1日印刷

昭和34年3月5日発行

土木学会論文集第60号・別冊(3-3)

定価 150 円 (〒 10 円)

著者 京都市左京区吉田本町 京都大学土木教室 石原藤次郎・高棹琢馬
 編集者 東京都新宿区四谷一丁目 社団法人土木学会 国分正胤
 印刷者 東京都港区赤坂溜池5 株式会社技報堂 大沼正吉

発行所 社団法人 土木学会

東京都新宿区四谷一丁目 電話 (35) 5130・5138・5139 振替東京 16828 番