

# 拡張せる Kötter の方程式に関する二、三の考察

正員 山 口 柏 樹\*

## A FEW CONSIDERATIONS ON THE MODIFIED KÖTTER'S EQUATION

By Hakuju Yamaguchi, C.E. Member

**Synopsis** : In the present paper, the fundamental properties of the modified Kötter's equation and its boundary condition governing the plasticity theory of soils whose failure criterion is assumed to obey Coulomb-Mohr's formula are studied in case when especially the body force is considered.

The necessary conditions imposed on the correct slip lines, and general reflection on the solution of equation are developed together with the discussions of the validity of Hencky's first theorem in our case. As the results, it is clarified that above theorem generally can be only applied under some restriction herein-obtained.

要旨 本論文においては、Coulomb-Mohrの破壊条件に従う土のような、塑性材料を律する拡張された、Kötterの方程式とその境界条件の基本的性質について、特に自重を無視できない場合について二、三の考察を行なつた。

正しい送り線に課せられる条件、方程式の解についての一般的省察を行い、あわせて Hencky の第一定理がどの程度妥当であるかを吟味し、その結果該定理はある制限された場合に限り適用し得るものであることを述べ、その条件を求めた。

### 1. 序 論

土の塑性理論の歴史は、Coulomb, Rankine に遡らずとも相当に古く、Boussinesq はすでに粒状物質の応力一ひずみ関係を導入しているし<sup>1)</sup>、Kötter-Massau の式が提出されたのは、金属塑性論で知られている Hencky の式よりも以前のことである。近時土性論の発達と共に、例えば、星埜教授の塑性理論<sup>2)</sup>のような注目すべき研究が行われ、他方実験的にも数多くの研究が見られるが、限界塑性状態で、土中の各点の応力を理論的に求めようとすれば、なお上述の Kötter の方程式<sup>3)</sup>は有力な手段の一つであろう。この方程式をめぐるその後の発展が余りいぢるしくないのは、厳密解が得難いこと、また実用的解法との間にそれ程の差がないことによるのであろう。実際土質力学に、この式を応用した例はそれ程多くない。わずかに Reissner<sup>4)</sup>、Jáky<sup>5)</sup>、Ohde<sup>6)</sup> などの論文を見るのみで、しかもこれらは皆、厳密な送り線を追求していない欠点がある。

金属塑性論では、境界値問題の例解として多くのものが見出されているのは、送り線の性質を詳細に調べることにより果されたと云えるから、土の塑性論においても類同な吟味をなすことは、問題点を明らかにする上からも興味があるものと思われる。

以上の見地から、本論文では、Kötter の方程式を、粘着力も含んだ一般の場合に拡張した式について、送り線の基本的性質を考察し、送り線が正しくあるべき条件を述べ、さらに従来多用された近似送り線による解を批判する基礎として、Hencky の定理が自重をもつ摩擦性塑性材料にどの程度適用し得るかを吟味し、これが一般に適用を許されないこと、および適用可能なる場合の送り線間に満たさるべき条件を調べた。

### 2. 基礎 仮 定

本論文においては、問題を平面ひずみに限るとする。土中の微小要素に働く応力の平衡式は

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = r \dots \dots \dots (2.1)$$

ここで有効直応力  $\sigma_x, \sigma_y$  とせん断応力  $\tau$  と  $x-y$  座標の向きは 図-2 に示される。  $r$  は飽和してれば、水中重量をとるがゆえに、境界条件にはあるとしても静水圧は考えなくてよい。

塑性破壊（または降伏）の条件は、Coulomb-Mohr 式

$$S = C + \sigma \tan \phi \dots \dots \dots (2.2)$$

を仮定する。  $S$  は破壊面に沿うせん断強度で、  $C$  (粘着力)、  $\phi$  (せん断抵抗角) は土中で一定とする。  $\sigma$  はもちろん有効圧である。

(2.2) は土中のある連続的領域（塑性域）で成立つが、その領域の形は一般に境界条件から規定される。

(2.2) を応力成分で書けば

\* 中央大学助教授，工学部土木工学教室

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + C \cot \phi\right)^2 \sin^2 \phi \dots \dots \dots (2.3)$$

従来も Coulomb-Mohr の式に代る多くの破壊条件式が提案された。例えば Mises の条件式で降伏円半径が平均圧力の関数とするもの<sup>7)</sup>、または星塾教授の理論におけるものなどはいずれも中間主応力の効果まで考慮に入れている点が、上式に比べて合理的ではあるが、境界値問題に用いるのは複雑に過ぎ、特に特性曲線との結び付きが困難であるため、半無限土中の立坑の問題などに应用されているに過ぎない。

(2.1), (2.2) と境界での応力条件から、応力成分を求められれば問題は静定である。部分的にも変位またはその増分値が境界で指定されれば、不静定となり取扱いは困難となる。金属塑性論では、等方、非圧縮性(または同値な Geiringer 式<sup>8)</sup>) を考えて原理的に処理し得るが、それでも逆解法をのぞいて、正攻法による成功例は皆無のようである。土の場合にはまず速度式が知れていない。

従って、当面議論は静定平面ひずみ問題に局限する。

静定であれば、塑性ひずみ増分の制限がないから、降伏に達した部分 ( $\tau = S$ ) では塑性流動が起こり、未降伏域の弾性ひずみを無視でき、金属と同じく土を剛塑性材と考えるとよい。すなわち連続的塑性域内の弾性変形に比べ塑性変形分が十分大きい場合に限り、(2.2) の適用が許される。これは境界条件によることで、土圧に関して Terzaghi<sup>9)</sup> も注意した点であり、不静定問題でも当然同様の制限が要ると思われる。

従来の破壊条件には、時間的要素(粘性)が入っていない。圧密に関しては粘弾性考察がしばしば行われているが、塑性的破壊に粘性を加味するのは今後の問題である。

3. 粘着土に対する Kötter の方程式

砂質土の限界塑性状態での応力平衡式は、初めて Kötter が導いた。これは周知の通り、二本のりり線に沿って成立つ釣合関係式である。りり線が二階の双曲型偏微分方程式の実なる特性曲線であることに注目して、粘着力のある場合に拡張したのは Hill<sup>10)</sup> であるが、これはりり線で囲まれた要素に関する表示式ではない。Jáky<sup>5)</sup> は土面安定の議論に際し、別の立場から一本だけりり線についての関係式を導いた。筆者<sup>11)</sup> も前に、座標変換により、りり線要素について数コの釣合式を求めたが、簡単にその経過を示す。

(2.2) の限界状態では、土中の一点の応力は 図-1 の Mohr 円で示される。図で RQ は Mohr の限界線、 $\sigma_1, \sigma_2$  は主応力、 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$  は平均圧力、 $\sigma_s, \tau_s$  はりり面上の応力成分、 $p$  は同面上の共役応力である。 $\tau_s = C + \sigma_m \tan \phi$  は (2.2) にほかならない。

図-1

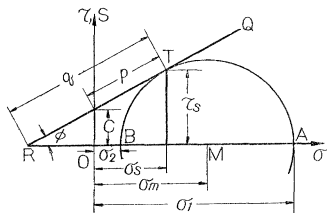


図-2

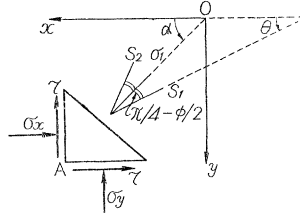


図-2 の微小三角形の応力成分の釣合式を、図の  $S_1, S_2$  方向に変換する。 $S_1, S_2$  は大きい主応力  $\sigma_1$  を挟んで  $\pi/4 - \phi/2$  で交叉し、その向きは常に  $S_1, S_2$  の順に右手系をなすものとする。 $x$  の正方向から左廻りに測る  $S_1$  の方向角を  $\theta$  とすると (2.2) を用いることにより、容易に判明するように

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_m \{1 - \sin \phi \sin(2\theta - \phi)\} - C \cos \phi \sin(2\theta - \phi) \\ \sigma_y &= \sigma_m \{1 + \sin \phi \sin(2\theta - \phi)\} + C \cos \phi \sin(2\theta - \phi) \\ \tau &= (\sigma_m \sin \phi + C \cos \phi) \cos(2\theta - \phi) \end{aligned} \right\}$$

であるから、(2.1) に入れると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} - \sin \phi \left\{ \sin(2\theta - \phi) \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} - \cos(2\theta - \phi) \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} \right\} \\ - 2 \sin \phi (\sigma_m + C \cot \phi) \left\{ \cos(2\theta - \phi) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin(2\theta - \phi) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} + \sin \phi \left\{ \sin(2\theta - \phi) \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} + \cos(2\theta - \phi) \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} \right\} \\ + 2 \sin \phi (\sigma_m + C \cot \phi) \left\{ \cos(2\theta - \phi) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin(2\theta - \phi) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} = r \end{aligned}$$

となる。さらに

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\cos \phi} \left\{ \cos(\theta - \phi) \frac{\partial}{\partial S_1} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial S_2} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\cos \phi} \left\{ \sin(\phi - \theta) \frac{\partial}{\partial S_1} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial S_2} \right\}$$

を用いると上式は

$$\left. \begin{aligned} L_1 \cos \theta - L_2 \sin(\theta - \phi) &= 0, \quad L_1 \sin \theta + L_2 \cos(\theta - \phi) = r \cos \phi \\ \text{ただし} \quad L_1 &= \cos \phi \frac{\partial \sigma_m}{\partial S_1} - 2 \sin \phi (\sigma_m + C \cot \phi) \frac{\partial \theta}{\partial S_1} \\ L_2 &= \cos \phi \frac{\partial \sigma_m}{\partial S_2} + 2 \sin \phi (\sigma_m + C \cot \phi) \frac{\partial \theta}{\partial S_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\bullet \bullet \quad L_1 = r \sin(\theta - \phi), \quad L_2 = r \cos \theta \dots \dots \dots (3.2)$$

図一1 に示す記号を用いると上式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial S_1} - 2q \tan \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_1} &= r \sin(\theta - \phi) \\ \frac{\partial q}{\partial S_2} + 2q \tan \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_2} &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_s}{\partial S_1} - 2\tau_s \tan \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_1} &= r \sin \phi \sin(\theta - \phi) \\ \frac{\partial \tau_s}{\partial S_2} + 2\tau_s \tan \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_2} &= r \sin \phi \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial S_1} - 2 \left( p \tan \phi + \frac{C}{\cos \phi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial S_1} &= r \sin(\theta - \phi) \\ \frac{\partial p}{\partial S_2} + 2 \left( p \tan \phi + \frac{C}{\cos \phi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial S_2} &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.5)$$

のように表わせる。各式で  $\partial/\partial S$  の代りに  $d/dS$  としてよいことは明らかである。これらはいずれも迂り線に沿う応力平衡式で、 $C=0$  の場合に拡張された Kötter の方程式と呼べるべきものである。(3.5) で  $C=0$  とおけば本来の Kötter 式となり、 $\phi, \tau=0$  とすれば Hencky<sup>12)</sup> の式に帰着する。これは

$$\frac{d \sigma_m}{dS_1} - 2c \frac{d \theta}{dS_1} = 0, \quad \frac{d \sigma_m}{dS_2} + 2c \frac{d \theta}{dS_2} = 0$$

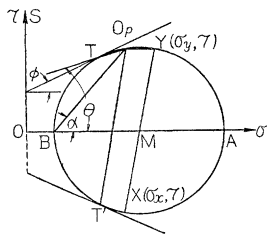
で、これより Hencky の定理

$$\theta_B - \theta_A = \theta_C - \theta_D \dots \dots \dots (3.6)$$

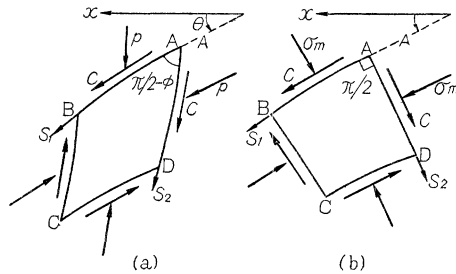
が得られる (図一4)。

塑性域内では  $S_1, S_2$  迂り線は互いに  $\pi/2 - \phi$  で交叉する曲線族で、斜交曲線網目をつくり、その面上の応力は摩擦、粘着力の両方共限界状態にある (図一3.4 参照)。

図一3



図一4



#### 4. 境界条件

図一5 で EF は境界線素、EF, GF は迂り線素で、 $\angle EFG = \pi/2 \pm \phi$  に応じて、迂り線の名称および C の向きは (a), (b) に示すごとくなる。力の釣合式から

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{p}{\cos \phi} \{ \sin^2 \nu + \cos^2(\phi + \nu) \} - \frac{2c}{\cos \phi} \sin \nu \cos(\phi + \nu) \\ \tau &= \frac{p}{2 \cos \phi} \{ \sin 2\nu - \sin 2(\phi + \nu) \}, -\frac{c}{\cos \phi} \cos(2\nu + \phi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.1)$$

が (a) の場合の境界応力を与える。逆に  $\sigma, \tau$  が指定されれば上式から境界での  $p, \nu$  が求まる。(b) に対しては  $\phi, c$  の符号を代えればよい。

境界面が自由面 (静水圧のある場合も含めて) なら  $\tau, \sigma=0$  より複号同順 (上は (a), 下は (b) に対応) として  $\nu = \pi/4 \mp \phi/2, \quad p = \pm c \dots \dots \dots (4.2)$

ただし、 $c=0$  の場合には同時に  $p$  が 0 となるので、(4.1) から一般に  $\nu$  は確定しない。この際の実取扱い方は後述の例 5. で述べる。

EG が剛体壁で、そこでの摩擦に関する粗度  $\delta$  が指定されている場合もしばしば現われる(例: 壁面土圧, 支持力など)。この時  $\tau$  は  $\sigma$  にもとづく摩擦力 ( $\sigma \tan \delta$ ) と付着力 ( $a$ ) の和が、 $\tau = \sigma \tan \delta + a$  と書ける。これに(4.1) を入れ、 $p, c$  が独立に変わり得ることを考えて、 $p$  および  $p$  を含まぬ項を 0 に等値して (a) の場合に応じて

$$\left. \begin{aligned} 2 \tan \delta \{ \sin^2 \nu + \cos^2(\nu + \phi) \} &= \sin 2\nu - \sin 2(\nu + \phi) \dots i) \\ a &= c \frac{\sin^2 \nu - \cos^2(\phi + \nu)}{\sin^2 \nu + \cos^2(\phi + \nu)} \dots ii) \end{aligned} \right\} \dots (4.3)$$

が得られる(ただし  $\delta$  の測り方は (a), (b) で異なる。図-5 参照)。 $c, \phi$  の符号を代えれば (b) に対する式となる。i) より  $\nu$  が、ii) より付着力が判るが  $a < c$  は明らかである。なお i) を解いて

$$\sin^2 \nu = \frac{\sin(\phi + \delta) \sin \phi}{1 - \cos 2\phi} \{ \cos \delta - \sqrt{\cos^2 \delta - \cos^2 \phi} \} \dots (4.4)$$

のように  $\nu$  が求められる。これより  $\delta < \phi$  であるべきである。(b) の場合は根号の前が+となる。

剛体壁のせん断応力の方向が、上と反対の場合(通常  $\delta < 0$  の場合と称される)は、前後者を脚符+, -で区別すると

$$\nu_+ + \nu_- = \pi/2 \mp \phi \dots (4.5)$$

の関係が存する。ここで複号の上は (a), 下は (b) に対応する。

表-1  $\nu_+$  の値

$\phi$	$\delta$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
10°	(a)	40°	54°55'	80°	—	—	—	—	—	—
	(b)	50°	30° 5'	0°	—	—	—	—	—	—
20°	(a)	35°	—	44°50'	52° 5'	70°	—	—	—	—
	(b)	55°	—	35°10'	22°55'	0°	—	—	—	—
30°	(a)	30°	—	35°10'	—	41°35'	47°25'	60°	—	—
	(b)	60°	—	44°50'	—	28°15'	17°35'	0°	—	—
40°	(a)	25°	—	28°25'	—	31°15'	—	35°30'	39°10'	50°
	(b)	65°	—	51°35'	—	38°45'	—	24°30'	15°50'	0°

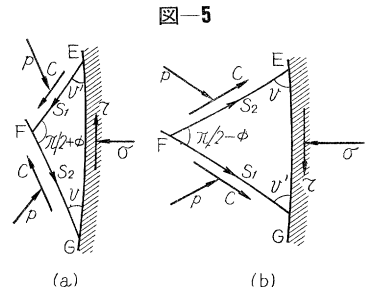
5. 基礎方程式の考察

土の塑性論の解析に極座標を用いることがしばしば行われて来た (Kármán<sup>13)</sup>, Jáky\*, Ohde<sup>6)</sup>, Hansen<sup>14)</sup> など)。この際一般に  $\sigma_m \propto r$  (動径) が仮定されているが、 $c \neq 0$  の場合には、このことはアプリアーには主張できないように思われる。また  $\theta$  の方程式も複雑な非線型式で、その解析解を得るのは容易でない。

他方 Kötter の式の解法も簡単でない。それは迂り線の位置があらかじめ知れていないことに起因する。従つて(3.2)~(3.5) で応力 ( $\sigma_m, p, q, \tau_s$ ) と  $\theta$  の一方を消去しても、ほとんど意味がない(消去演算も實際上困難)。

しかし、Kötter の方程式は、特性曲線に沿う関係式だから、金属の平面ひずみ論と同様な差分的数値解法が可能である。もちろんこの差分法は一般に応力と迂り線を同時(連立的)に求めていかねばならないから、金属の場合のように簡単には遂行できない。在来土質力学で、迂り線を差分式により組み立てて求める試みはほとんどなされていない。むしろ金属における相似問題の迂り線場を多少修正した近似迂り線場で議論することが多かつた。金属の場合、迂り線場の特性が Hencky, Prandtl の定理で支配される直交曲線網 (Hencky-Prandtl net) であるので具体的解が得易いのであるが、 $r, \phi \neq 0$  である土では 6. で述べるように、一般的には Hencky の定理が成立しない。この点が迂り線場の直接的決定を困難ならしめ、同時に前述の修正迂り線場の誤差の因となることが多い。 $r=0$  と見なせるのは、室内実験(例えば押し試験)や切削問題には許されるが、多くの実際問題では重力の影響が決定的である。また  $\phi=0$  の仮定は飽和粘土の急速な破壊に限って近似的に用いられるのみである。このように、土と金属の対比は簡単ではないから、土の場合に Hencky の定理のような便利な性質は見出されていない。

\* Ohde<sup>7)</sup> によれば Jáky も前に Hansen と同様の結果を求めているという。



しかし自明のこととして次の事柄は主張できる (図-4 (a) 参照)。以下 [ABCD] によつて、頂点交角が  $\pi/2 \pm \phi$  であるような微小なる斜交曲線四辺形を意味するものとする。

「[ABCD] の頂点応力  $p_c$  を例えば  $p_A$  と表わす場合、(3.5) を用いて  $A \rightarrow B \rightarrow C$  の径路で求めたものと、 $A \rightarrow D \rightarrow C$  の径路で求めたものとは、[ABCD] が正しい迂り線で構成されている限り一致せねばならない (I)」。

二径路の代りに一周して  $p$  の値が元に戻るといつても良い。これはベクトルの回転が  $0$  と類同であつて、要素四辺形の代りに塑性域内の有限面分を考えても、その周囲が正しい迂り線で形成される限り成立つ基本的性質である。(I) は Hencky の定理の物理的解釈であつて、その幾何的表現が (3.6) であると解すべきものである。

(I) の対偶として

「[ABCD] で  $p_A$  から出発して、 $A \rightarrow B \rightarrow C$ ,  $A \rightarrow D \rightarrow C$  の二径路で求めた  $p_c$  の値が一致しない場合は、四辺形は正しい迂り線で構成されていない (II)」。

この性質は迂り線の正否を判定する規準の一つである。他の規準も考えられる。正しい迂り線により塑性場全部の応力が知れれば、その境界全域上の内、外応力と重力とは、剛体的 (併進、回転三成分で) に釣合わねばならない。すなわち近似迂り線で求めた応力は、釣合式をことごとくは満足せぬ筈であり、これより迂り線の正否を大局的に判断できよう。

(I) の逆が成り立つとは考えられない。なにせ [ABCD] の各辺が正しい迂り線と一致せぬ時、各辺に沿つて Kötter の式は適用されないから、応力を計算する手続き自身が論理的に無理であり、そのようにして求めた応力値が仮に一致したとしても、これは無意味である。同様に剛体的釣合が満たされたとしても、境界線が正しい迂り線となるとは限らない (次例参照)。

不正な迂り線にもとづく応力の不一致 (II) を解析することは、近似迂り線で求める応力値に入ってくる誤差の性質を調べる問題にも関連する。誤差の構造については、ある程度の解析ができるが、これと前述の剛体的釣合の程度との関連性については筆者には未だよく分らない。

(例 1) 半無限砂質土中の塑性解は Mohr 円でも容易に調べられるが、(I) の性質を応用してもよい。図-6 (a) は主働状態で、迂り線を直線と仮定すれば (3.5) は

$$\begin{aligned} dp/dS_1 &= r \sin(\theta - \phi), \quad dp/dS_2 = r \cos \theta \\ \text{粘着力を考えぬから、地表面 } (S_1, S_2 = 0) \text{ で } p &= 0 \\ \therefore \left. \begin{aligned} p_1 &= r \overline{AC} \sin(\theta - \phi) = \frac{r z \cos i \sin(\theta - \phi)}{\sin(\theta - i)} \\ p_2 &= r \overline{BC} \cos \theta = \frac{r z \cos i \cos \theta}{\cos(i + \phi - \theta)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{ i) } \end{aligned}$$

ここに、 $i$  は傾斜角で、 $z$  は  $c$  点の鉛直深さである。 $p_1 = p_2$  であるべきゆえ (I)、上式から  $\theta$  は  $\sin(\theta - \phi) \cos(\phi - \theta + i) = \cos \theta \sin(\theta - i) \dots \dots \dots \text{ ii)}$  を満たさねばならない。逆に ii) より決る  $\theta$  は、可能な直線迂り線場を与える。ii) は書き代えて

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi \cos(2\theta - i - \phi) &= \sin i \\ \therefore 2\theta &= \phi + i + \text{Cos}^{-1}(\sin i / \sin \phi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{ .iii) }$$

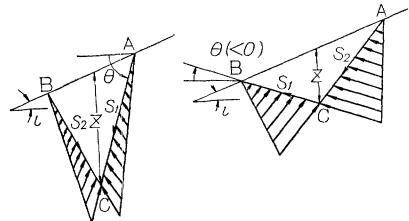
となり、これより直接  $\theta$  が求まる ( $\text{Cos}^{-1}$  は主値を表わす)。iii) より明らかに  $i < \phi$  で、この時  $i < \theta < \pi/4 + \phi/2$ 。受働の場合は  $\text{Cos}^{-1}$  の前が負号をとり、 $-(\pi/4 - \phi/2) < \theta < i$  である (図-6 (b) 参照)。

$c=0$  の場合、境界での迂り線方向は、本例と異なる曲線地表面の場合でも (この時はもちろん  $AC, BC$  は曲線となる) 同一原理で処理できる。ただし、 $AC, BC$  は微小線素とせねばならない。また変化せる分布サーチャージがある時も同様である。直線地表面、一定載荷重の場合には Mohr 円の方法が簡単であるが、上述のごとき一般の場合は Kötter の方法によつてのみ取扱いが可能となるわけである。なお部分的直線地表面  $AB$  であつても、ここで決つた  $\triangle ABC$  内部の塑性域はやはり可能であることが、本法によれば結論できることに注意すべきである。

(例 2) 前例で  $\phi=0$  だが  $c \neq 0$  である時、迂り線は傾斜地表面に対し  $\pi/4$  で交わる (4. 参照)。この時は迂り線は金属とは異なり直線とはなり得ない。受働の場合を考えると (3.5) より

$$\frac{dp}{d\theta} = 2c + r \sin \theta \frac{dS_1}{d\theta}, \quad \frac{dp}{d\theta} = -2c + r \cos \theta \frac{dS_2}{d\theta} \dots \dots \dots \text{ i) }$$

図-6



$S_2=0$  (および  $S_1=S_1$ ) で  $p=p_0, \theta=\pi/4, S_2=S_2$  (および  $S_1=0$ ) で  $p, \theta$  だから i) より

$$\left. \begin{aligned} p_0-p &= 2c(\theta_0-\theta) + r \int_0^{S_1} \sin \theta dS_1 \\ p-p_0 &= -2c(\theta-\theta_0) + r \int_0^{S_2} \cos \theta dS_2 \end{aligned} \right\}$$

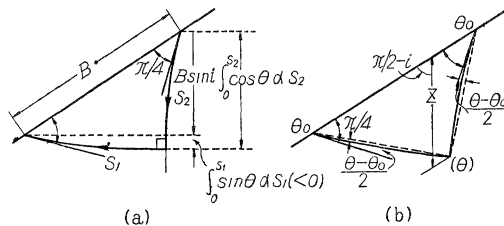
$$\therefore 4c(\theta-\theta_0) = r \int_0^{S_2} \cos \theta dS_2 + r \int_0^{S_1} \sin \theta dS_1 = r B \sin i \dots\dots\dots \text{ii)}$$

が得られる (図-7 (a)). ii) の右辺は正ゆえ、 $\theta > \theta_0$  でその差は  $B$  すなわち  $z$  が大きくなる程大となるので  $S_1$  迂り線は上に、 $S_2$  迂り線は上に、迂り線は右に凹の形となる。 $z$  が過大でない限り  $\theta-\theta_0$  は小さく、迂り線は円弧で近似してよい。この時 (b) より

$$B = z \cos i \left\{ \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta-\theta_0}{2}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta-\theta_0}{2}\right) \right\} \doteq z \cos i \{2 + (\theta-\theta_0)^2\}$$

$$\therefore 4c(\theta-\theta_0) \doteq r z \cos i \sin i \{2 + (\theta-\theta_0)^2\} \dots\dots\dots \text{iii)}$$

図-7



他方、本例も Mohr 円で処理できて、これによると、

$$c \sin 2(\theta-\theta_0) = r z \sin i \cos i$$

$$\therefore 4c(\theta-\theta_0) \doteq r z \cos i \sin i \left\{ 2 + \frac{3}{4}(\theta-\theta_0)^2 \right\} \dots\dots\dots \text{iv)}$$

が与えられる。iii) または、これによつて  $z$  に応ずる  $\theta$  が計算できよう。iii) iv) の相違は円弧と近似したことにもとづくが、その差は小さいから、逆に  $z$  が過大でない限り迂り線は、円弧と考えて十分差支えない。

本例に関しても、前例の末で述べた事柄は主張できる。

次に基本式の解の構成について述べよう。あらかじめ迂り線が已知であるとして (3.5) の積分を行い、一点の応力を求めるには、該点を過ぎる二本の迂り線のいずれか一方を用いればよいので、仮に第二式を考える。

$$\frac{dp}{d\theta} + \left( 2p \tan \phi + \frac{c}{\cos \phi} \right) = r \cos \theta \frac{dS_2}{d\theta} \dots\dots\dots (5.1)$$

で、 $dS_2/d\theta$  は  $\theta$  の已知関数で、この解を  $p=p_1+p_2$  と分離できる。ただし  $p_1, p_2$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{d\theta} + 2\left(p_1 \tan \phi + \frac{c}{\cos \phi}\right) &= 0 \dots\dots\dots \text{i)} \\ \frac{dp_2}{d\theta} + 2p_2 \tan \phi &= r \cos \theta \frac{dS_2}{d\theta} \dots\dots\dots \text{ii)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.2)$$

を満たすものとする。すなわち  $p$  は (5.1) の斉次一般解 ( $p_1$ ) と、 $c=0$  とした式 of 非斉次特解 ( $p_2$ ) の和で構成される。 $p_1$  を求めるには、積分常数を定める端末条件として、迂り線の始終点の位置と、始点における  $p_1(0), \theta(0)$  が与えられれば十分である。しかし多くの場合、迂り線の終点の位置が予知されぬことが問題であり、例外的に壁面土圧でその粗度が一定である時は、終点(壁上)では常に  $\theta$  が已知とできる (4. 参照) から、土圧におよぼす粘着力、サーチャージ等の効果は簡単に知ることができる。明らかに

$$p_1 = \left\{ p_1(0) + \frac{c}{\sin \phi} \right\} e^{-2(\theta-\theta(0)) \tan \phi} - \frac{c}{\sin \phi} \dots\dots\dots (5.3)$$

他方  $p_2$  は  $p_2(0)=0$  でよいが、迂り線の途中の形 ( $\cos \theta \cdot dS_2/d\theta$ ) が知れねばならない。

$$p_2 = r e^{-2\theta \tan \phi} \int_{\theta(0)}^{\theta} e^{2\theta \tan \phi} \cos \theta \frac{dS_2}{d\theta} d\theta \dots\dots\dots (5.4)$$

で、 $p_2$  は陽に  $c$  は含まないが、迂り線の形自身が  $c$  により変わるから、もちろん  $p_2$  は  $c$  に無関係ではあり得ない。

6. Hencky の定理の適用性

5. で述べたごとく、金属塑性論で Hencky の定理のはたす役割は極めて大きい。これは正しい迂り線を組み立

てる上に、大きな指針を与えるから、 $r, \phi \neq 0$  の一般な場合に本定理が妥当であるか否かを調べることは基本的な事柄である。

まず、 $c, \phi \neq 0$  の時の基本式 (3.4) を差分表示式に改める。図-3 で、微小線素  $\widehat{AB}$  に沿つて (3.4) を線積分すると、 $dS/d\theta = R_1 \doteq (R_1)_{\text{mean}} = \widehat{AB}/(\theta_B - \theta_A)$  ( $R_1$  は  $S_1$  迂り線の曲率半径) として

$$\tau_B = \frac{\bar{r} \widehat{AB}}{\theta_B - \theta_A} \left[ -\frac{2\mu \sin(\theta_B - \phi) + \cos(\theta_B - \phi)}{1 + 4\mu^2} + e^{2\mu(\theta_B - \theta_A)} \frac{2\mu \sin(\theta_A - \phi) + \cos(\theta_A - \phi)}{1 + 4\mu^2} \right] + \tau_A e^{2\mu(\theta_B - \theta_A)}$$

ただし  $\mu = \tan \phi$ ,  $\bar{r} = r \sin \phi$  と略記した。

一般に円弧置換による誤差は極めて小さく偏角差の 3 乗以下であるので、上式の指数、三角関数を 2 次の項まで展開したもので改める。すなわち  $\theta_B - \theta_A$  が 1 次の微小量と考へて

$$\begin{aligned} \frac{\sin}{\cos} \left\{ (\theta_B - \phi) \right\} &= \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \frac{\sin}{\cos} \left\{ (\theta_m - \phi) \right\} \pm \varepsilon \frac{\cos}{\sin} \left\{ (\theta_m - \phi) \right\} + O(\varepsilon^3) \\ \frac{\sin}{\cos} \left\{ (\theta_A - \phi) \right\} &= \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \frac{\sin}{\cos} \left\{ (\theta_m - \phi) \right\} \mp \varepsilon \frac{\cos}{\sin} \left\{ (\theta_m - \phi) \right\} + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

ただし

$$\varepsilon = (\theta_B - \theta_A)/2, \quad \theta_m = (\theta_A + \theta_B)/2$$

および

$$e^{2\mu(\theta_B - \theta_A)} = 1 + 4\mu\varepsilon + 8\mu^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

を用いて  $\tau_B$  の式を計算すると

$$\tau_B = \tau_A \{ 1 + 2\mu(\theta_B - \theta_A) + 2\mu^2(\theta_B - \theta_A)^2 \} + \bar{r} \widehat{AB} \{ 1 + \mu(\theta_B - \theta_A) \} \sin(\theta_m - \phi) + O(\varepsilon^3)$$

となる。ただし  $dS$  または  $\widehat{AB}$  も 1 次の無限小と考へている。これは明らかに (3.4) を差分式

$$(\tau_B - \tau_A) - \mu(\tau_B + \tau_A)(\theta_B - \theta_A) = \bar{r} \widehat{AB} \sin(\theta_m - \phi)$$

のごとく改めたことにほかならない。すなわち (3.4) の差分表示式は

$$\left. \begin{aligned} \tau_B - \tau_A - (\tau_B + \tau_A)(\theta_B - \theta_A) \tan \phi &= r dS_1 \sin \phi \sin \left( \frac{\theta_B + \theta_A}{2} - \phi \right) \dots \text{i)} \\ \tau_C - \tau_D - (\tau_C + \tau_D)(\theta_C - \theta_D) \tan \phi &= r dS_1' \sin \phi \sin \left( \frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \phi \right) \dots \text{ii)} \\ \tau_D - \tau_A + (\tau_D + \tau_A)(\theta_D - \theta_A) \tan \phi &= r dS_2 \sin \phi \cos \frac{\theta_D + \theta_A}{2} \dots \text{iii)} \\ \tau_C - \tau_B + (\tau_C + \tau_B)(\theta_C - \theta_B) \tan \phi &= r dS_2' \sin \phi \cos \frac{\theta_C + \theta_B}{2} \dots \text{iv)} \end{aligned} \right\} \dots \text{(6.1)}$$

で与えられる。ここに

$$\widehat{AB} = dS_1, \quad \widehat{DC} = dS_1', \quad \widehat{AD} = dS_2, \quad \widehat{BC} = dS_2' \dots \text{(6.2)}$$

上式で差分化による誤差は  $(\theta_i - \theta_j)^3$  を越えぬことは明らかで、 $R = \infty$  (直線迂り線) を除いては、 $(ds)^3$  の程度である。

応力の特異点では同族の迂り線が集まり、 $\theta_i - \theta_j$  が微小とならない。この時は (6.1) は得られないが、 $dS/d\theta \rightarrow 0$  であるので (3.4) で見掛け上  $r=0$  とした場合の積分を考えればよい。これは完全微分形だから改めて差分化せずとも積分可能である。

前式 i), iv) および ii), iii) からそれぞれ  $\tau_B, \tau_D$  を消去し

$$\tau_C = \tau_A \frac{(1 - \overline{\theta_C - \theta_B \mu})(1 + \overline{\theta_B - \theta_A \mu})}{(1 + \overline{\theta_C - \theta_B \mu})(1 - \overline{\theta_B - \theta_A \mu})} + r \sin \phi \frac{(1 - \overline{\theta_C - \theta_B \mu}) dS_1 \sin \left( \frac{\theta_B + \theta_A}{2} - \phi \right) + (1 - \overline{\theta_B - \theta_A \mu}) dS_2' \cos \frac{\theta_C + \theta_B}{2}}{(1 + \overline{\theta_C - \theta_B \mu})(1 - \overline{\theta_B - \theta_A \mu})} \dots \text{v)}$$

$$\tau_C = \tau_A \frac{(1 - \overline{\theta_D - \theta_A \mu})(1 + \overline{\theta_C - \theta_D \mu})}{(1 + \overline{\theta_D - \theta_A \mu})(1 - \overline{\theta_C - \theta_D \mu})} + r \sin \phi \frac{(1 + \overline{\theta_D - \theta_A \mu}) dS_1' \sin \left( \frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \phi \right) + (1 + \overline{\theta_C - \theta_D \mu}) dS_2 \cos \frac{\theta_A + \theta_D}{2}}{(1 + \overline{\theta_D - \theta_A \mu})(1 - \overline{\theta_C - \theta_D \mu})} \dots \text{vi)}$$

v), vi) の左辺は相等的いはずであるが、右辺の  $\tau_A, r \sin \phi$  の係数は常数でないから、右辺を等置することに

よつて  $\tau_A, r \sin \phi$  の係数を相等しいとすることはできない。すなわち係数を  $A, B$  で表わすと

$$\tau_A A_1(\tau_A, \bar{r}) + \bar{r} B_1(\tau_A, \bar{r}) \equiv \tau_A A_2(\tau_A, \bar{r}) + \bar{r} B_2(\tau_A, \bar{r})$$

から,  $A_1(\tau_A, 0) = A_2(\tau_A, 0), B_1(0, \bar{r}) = B_2(0, \bar{r})$  は云えるが,  $A_1(\tau_A, \bar{r}) = A_2(\tau_A, \bar{r})$  などは一般に主張し得ない。

しかし, 仮に Hencky の定理が成立つとすると (3.6) を用いて, (v), (vi) の  $\tau_A$  の係数が恒等的に等しくなり, 従つてこの時  $r \sin \phi$  の係数が等しくならねばならない。

逆に  $r \sin \phi$  の係数が等しければ, (3.6) が容易に導かれる。以上より,  $r, c, \phi \neq 0$  の一般な場合, 迂り線が Hencky Net であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} & dS_1(1 - \mu d\theta_2) \sin\left(\frac{\theta_A + \theta_B}{2} - \phi\right) + dS_2'(1 - \mu d\theta_1) \cos\frac{\theta_C + \theta_B}{2} \\ & = dS_1'(1 + \mu d\theta_2) \sin\left(\frac{\theta_C + \theta_D}{2} - \phi\right) + dS_2(1 + \mu d\theta_1) \cos\frac{\theta_D + \theta_A}{2} \dots\dots\dots (6.3) \end{aligned}$$

ただし

$$\theta_B - \theta_A = \theta_C - \theta_D = d\theta_1, \theta_D - \theta_A = \theta_C - \theta_B = d\theta_2$$

$\phi = 0$  であれば (6.3) は

$$dS_1 \cdot \sin\frac{\theta_A + \theta_B}{2} + dS_2' \cos\frac{\theta_C + \theta_B}{2} = dS_1' \sin\frac{\theta_C + \theta_D}{2} + dS_2 \cos\frac{\theta_D + \theta_A}{2} \dots\dots\dots (6.4)$$

となるが, 上式両辺はいずれもベクトル  $AC$  の鉛直斜影長にほかならないから, これは幾何学的恒等式である。換言すれば (6.3) は  $\phi \neq 0$  の時にのみ迂り線間に課せられる新しい条件式である。また  $\phi = 0$  であれば (v), (vi) の  $\tau_A$  の係数は当然等しかるべく, 従つて Hencky の定理が妥当である。これは  $\phi \neq 0$  であつても  $r = 0$  であれば同様。  $c = 0$  であれば,  $\tau$  の代りに  $p$  を用いれば上の議論はそのまま成り立つ\*。

以上総合すると, 種々のケースに応ずる Hencky の定理の適用性は表-2 のごとくなる。

表-2 Hencky の定理の正否一覧

	$r$	$c$	$\phi$	定理の正否	材 料
①	0	$\neq 0$	0	正	金属, 飽和粘土 (室内実験)
②	0	0	$\neq 0$	正	砂 (仮想的)
③	0	$\neq 0$	$\neq 0$	正	土 (仮想的)
④	$\neq 0$	$\neq 0$	0	正	飽和粘土 (急速破壊)
⑤	$\neq 0$	0	$\neq 0$	否	砂, 砂質土
⑥	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	否	一般なる土

(例 1) 表-2 ④の場合は, 放射線と同心円弧から成る扇状部分が可能な迂り線場となることを示す。実際(図-4)で  $BA, CD$  の支点を  $O$  (これは応力の特異点)とし,  $OA = R, AB = CD = dr$ , また  $AB, CD$  の偏角を  $\theta_1, \theta_2$  とすると,  $A \rightarrow B \rightarrow C$  および  $A \rightarrow D \rightarrow C$  の径路で求めた  $p_C$  はいずれも

$$p_C = p_A - 2c(\theta_2 - \theta_1) + rR(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + r dr \sin \theta$$

となる。これらは  $S_1, S_2$  迂り線に応じ

$$\frac{dp}{dr} = r \sin \theta, \quad \frac{dp}{rd\theta} + \frac{2c}{r} = r \cos \theta$$

を積分すれば得られる。

(例 2) 対数螺旋と動径による擬扇形域では

$$d\theta_1 = 0, dS_1 = dr, dS_2 = rd\theta/\cos \phi, dS_1' = dr + drd\theta \cdot \mu, dS_2' = (rd\theta + drd\theta)/\cos \phi$$

であるから, これは (6.3) を満足しないことが容易に判る。すなわち  $r, c, \phi \neq 0$  の時擬扇形域は正しい迂り線域とはなり得ない。

### 7. 結 論

本論文では土のような, 摩擦性強度を持ち, 自重を無視できない塑性材料の理論的な問題につき, 二, 三の基本的考察を試みた。序論等でも強調せるごとく, 土圧, 支持力, 安定などの主要問題は, ここに述べた Kötter の一般式を用いてより合理的に議論し得る筈であり, 導かれた差分式は, 実際計算の上にも有効な手段を与えるものと考えられる。しかし今後処理すべき問題もはなはだ多い。例えば不静定問題の原則または速度の基礎問題<sup>13)</sup>, 差分式の実際的解法<sup>14)</sup>, 応力場の不連続性等々。紙数の関係上これらの議論は次の機会にゆずることとしたい。

\* ここで述べたことをより形式的に導くこともできる。すなわち (6.1) を  $\tau$  に関する 4 元連立一次方程式としてその根の存在の可否を調べればよい。



本文ならびに関連した問題の研究については、最上教授の絶えざる御指導と御討論を頂いている。ここに先生に対し深く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 最上武雄：土質力学（岩波全書），p.111，昭和 27 年
- 2) 星 埜 和：土の塑性理論とその三軸試験への適用，土木学会論文集，昭和 29 年
- 3) P. Kötter: *Über das Problem der Erddruckbestimmung*, Verhandl. Phys. Ges. Berlin. (1888)
- 4) H. Reissner: *Zum Erddruckproblem*. Proc. 1 st. I.C.A.M. (1924)
- 5) J. Jáky: *Stability of Earth Slopes*. Proc. I.C.S.M. Vol II, (1936)
- 6) J. Ohde: *Zur Theorie des Erdrucks unter besondere Berücksichtigung der Erddruck Verteilung*. Die Bautechnik. Vol.16, (1938)
- 7) 伊藤富雄：円形立抗の周囲における弾塑性応力状態，土木学会論文集，昭和 32 年
- 8) H. Geiringer: *Advances in Applied Mechanics*. Vol.III, p.244 (1953)
- 9) K. Terzaghi: *General Wedge Theories of Earth Pressure*. Trans. A.S.C.E. (1943)
- 10) R. Hill: *The Mathematical Theorie of Plasticity*. p.100 (1950)
- 11) 最上，盛辺，山口，土質力学（共立社応用力学講座）p 52，昭和 32 年
- 12) H. Hencky: *Über einige statisch bestimmte Falle des Gleichgewichts im plastischen Körpern*. Z.A.M.M. (1923)  
 ” *Zur Theorie plastischen Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Neben-  
 spannungen*. Z.A.M.M. (1924)
- 13) v. Kármán: *Über elastischen Grenzzustände*. Proc. 2nd. I.C.A.M. (1926)
- 14) B. Hansen: *A General Plasticity Theory for Clay*. Géotechnique. Vol.3, (1954)
- 15) 山口柏樹：塑性流動における速度場の二、三の問題，土木学会年次講演会（昭和 33 年）にて講演
- 16) 山口柏樹：土の塑性論におけるとり線の幾何学，応力連合講演会（昭和 33 年）にて講演

(昭. 33 5. 19)