

カンテレーバ-矩形板の曲げについて

正員 能 町 純 雄*

ON BENDING OF A RECTANGULAR CANTILEVER PLATE

By Dr. Eng., Sumio Nomachi, C.E. Member

Synopsis : In this paper the bending of the rectangular cantilever plate, that is the plate with three free edges and one clamped edge, is considered. The function denoting the deflection of the plate is, by virtue of the finite double Fourier transforms, written in a double series with respect to sine and cosine. Some numerical examples concerning a square plate whose ν is 0.3 and whose deflection takes symmetrical form, are presented.

要旨 平板のタワミ関数に対する有限な二重フーリエ変換を、基本微分方程式についての Green 公式から誘導しその逆変換を求めて、カンテレーバ-矩形板、すなわち一辺が固定され他の三辺とこの辺によつて作られる二隅点すべて自由である矩形板の曲げを解いたものである。数値計算例は対称な変形のみについて行なつたが、板のポアソン比は 0.3 とした。

1. はし が き

固定辺と完全自由辺が相隣り合っているような矩形平板は、境界条件を満足させるのが困難なためにその解法は面倒である。ことに板のポアソン比が零でない場合は、その困難は倍加するようである。この種の問題の一つとし、三辺固定、他の一辺が完全自由な矩形板の曲げがあるが、これについては若干の解析的研究¹⁾が試みられている。しかし構造物の最も基本的な要素の一つと考えられるカンテレーバ-矩形板についてはまだ厳密な解法が試みられていないように思われる。

2. 二つの公式

(a) 有限な二重 $\sin \cos$ 変換と逆変換 いま W_{xy} を $(0 < x < a)$, $(0 < y < b)$ なる矩形領域で Dirichlet の条件を満足する関数とすれば、有限な二重 $\sin \cos$ 変換は

$$S_m C_n [W_{xy}] = \int_0^a \int_0^b W_{xy} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot dx dy \dots \dots \dots (1)$$

$$m, n = 1, 2, 3, 4, \dots \dots \dots$$

のように定義される。そしてこの領域のすべての点で W_{xy} が連続であれば次のような逆変換公式が成立する。

$$W_{xy} = \frac{2}{ab} \sum_m \left\{ \int_0^b S_m [W_{xy}] dy + 2 \sum_n S_m C_n [W_{xy}] \cos \frac{n\pi}{b} y \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \dots \dots \dots (2)$$

(b) 重調和微分式の Green 公式²⁾ 前記の W の重調和微分式に対する Green の公式は次のように書くことができる。

$$\int_0^a \int_0^b \{ (\Delta^2 W) \cdot u - (\Delta^2 u) \cdot W \} dx dy = R(W \cdot u) \dots \dots \dots (3)$$

ただし

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$R(W \cdot u) = \left. \begin{aligned} & \int_0^b \left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right] u \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=a} dy \\ & + \int_0^b \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right] W \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=a} dy \\ & + \int_0^a \left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right] u \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=b} dx \\ & + \int_0^a \left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right] W \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=b} dx \\ & - 2(1-\nu) \left[\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} W \right]_0^a \right]_0^b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

* 工学博士，室蘭工業大学教授，土木工学教室

3. カンテレーバ-矩形板のタワミ

タワミを W , 板の曲げ剛度を $N(=Eh^3/12(1-\nu^2))$, E : 弾性係数, h : 厚さ, ν : ポアソン比, 荷重の分布を $q \cdot f_{xy}$ とすれば, 等方性平板の曲げの基本微分方程式は

$$N \cdot \Delta^2 W = q \cdot f_{xy} \dots \dots \dots (5)$$

である。またこのときの境界条件は

$x=0$ で

$$W=0 \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$x=a$ で

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (8)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (9)$$

$y=0, y=b$ で

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0 \dots \dots \dots (11)$$

($a, 0$), (a, b) の両放端端点で, 完全自由な場合には

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

また ($a, 0$), (a, b) にそれぞれ P_1, P_2 なる点荷重が載っているときは

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = + \frac{P_1}{2N(1-\nu)} (a, 0), = - \frac{P_2}{2N(1-\nu)} (a, b) \dots \dots \dots (13)$$

さて Green の公式 (3) 中 $u = \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y$ と代入し, 左辺に (5) の関係を採用すれば

$$n=0; \frac{q}{N} \int_0^b S_m[f_{xy}] dy - \pi^4 \frac{m^4}{a^4} \int_0^b S_m[W] dy = R(W \cdot u) \dots \dots \dots (14)$$

$$n \neq 0; \frac{q}{N} S_m C_n[f_{xy}] - \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \cdot S_m C_n[W] = R(W \cdot u) \dots \dots \dots (15)$$

上式右辺は, 境界条件 (6), (8), (11) を代入し, かつ

$$S_m \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=b} \right] = -(-1)^m \frac{a}{m\pi} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{ab} + \frac{a}{m\pi} C_m \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} \right],$$

$$S_m \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} \right] = -(-1)^m \frac{a}{m\pi} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{a0} + \frac{a}{m\pi} C_m \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} \right],$$

$$C_n [W_{x=a}] = \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 \left\{ (-1)^n \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{ab} - \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{a0} \right\} - \left(\frac{b}{n\pi} \right)^2 C_n \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} \right]$$

の関係を考慮すれば

$n=0$ に対して

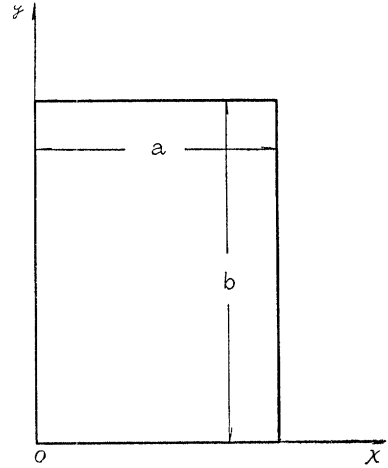
$$R(W \cdot u) = \frac{m\pi}{aN} \int_0^b (M_x)_{x=0} dy + (-1)^m \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \int_0^b (W)_{x=a} dy + \nu (-1)^m \frac{m\pi}{a} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{ab} - \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{a0} \right\} + \nu \frac{m\pi}{a} \left\{ C_m \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} \right] - C_m \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} \right] \right\}, \dots \dots \dots (16)$$

$n \neq 0$ に対して

$$R(W \cdot u) = \frac{m\pi}{aN} C_n [(M_x)_{x=0}] - (-1)^m \frac{ab^2 \pi}{mn^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \left\{ (-1)^n \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{ab} - \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{a0} \right\} + \frac{b^2 \pi}{n^2} \left(\frac{m^3}{a^3} + (2-\nu) \frac{mn^2}{ab^2} \right) C_n \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} \right] (-1)^m + \frac{a\pi}{m} \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right) \left\{ (-1)^m C_m \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} \right] - C_m \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} \right] \right\} \dots \dots \dots (17)$$

上式 (14), (15) から $\int_0^b S_m[W] dy$ および $S_m C_n[W]$ を求めて公式 (2) によつて逆変換をつくり

図-1



$$\begin{aligned}
 & \frac{2a^2}{bN} \int_0^b (M_x)_{x=0} dy = -A_0, \quad \frac{2}{b} \int_0^b (W)_{x=a} dy = A_0', \\
 & C_n [(M_x)_{x=0}] = \frac{bN}{4a^2} A_n, \quad C_n \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} \right] = \frac{b}{4} A_n', \\
 & C_m \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} \right] = \frac{b}{4a^2} (B_m' - B_m), \quad C_m \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} \right] = \frac{b}{4a^2} (-B_m' - B_m), \\
 & \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{ab} = \frac{1}{4b} (D - D'), \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{a0} = \frac{1}{4b} (D + D'), \\
 & \alpha_n = \frac{b}{a} n, \quad \beta_m = \frac{a}{b} m, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \\
 & \sum_m \frac{\sin m \pi \xi}{(m \pi)^3} = \frac{1}{12} (2\xi - 3\xi^2 + \xi^3), \\
 & \sum_m \frac{(-1)^m \sin m \pi \xi}{m \pi} = -\frac{\xi}{2}, \\
 & \sum_m \sum_n \frac{(-1)^m (1 - (-1)^n)}{m n^2 \pi^3} \sin m \pi \xi \cdot \cos n \pi \eta = -\frac{\xi(1-2\eta)}{8}, \\
 & \sum_m \sum_n \frac{(-1)^m (1 + (-1)^n)}{m n^2 \pi^3} \sin m \pi \xi \cdot \cos n \pi \eta = -\frac{\xi(1-6\eta+6\eta^2)}{24}, \\
 & \sum_m \frac{m \sin m \pi \xi}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} = -\frac{\pi}{4 \alpha_n^2} H_{n \cdot \xi} \\
 & \sum_m \frac{(-1)^m m \{m^2 + (2-\nu)\alpha_n^2\}}{\alpha_n^2 (m^2 + \alpha_n^2)^2} \sin m \pi \xi = -\frac{\pi}{4 \alpha_n^2} \{2 G_{n \cdot 1-\xi} + (1-\nu) H_{n \cdot 1-\xi}\} \\
 & \quad m=1, 2, 3, 4, \dots \dots \dots \\
 & H_{n \cdot \xi} = \frac{\alpha_n \pi \{ \xi sh \pi \alpha_n (2-\xi) - (2-\xi) sh \pi \alpha_n \xi \}}{ch 2 \pi \alpha_n - 1} \\
 & G_{n \cdot \xi} = \frac{ch \pi \alpha_n (2-\xi) - ch \pi \alpha_n \xi}{ch 2 \pi \alpha_n - 1} \\
 & \sum_n \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \frac{n^2 + \nu \beta_m^2}{\beta_m^2 (n^2 + \beta_m^2)^2} \cos n \pi \eta = \frac{\pi}{4 \beta_m^2} \begin{cases} (1+\nu) S_{m \cdot \eta}^{(1)} - (1-\nu) T_{m \cdot \eta}^{(1)}, \\ (1+\nu) S_{m \cdot \eta}^{(2)} - (1-\nu) T_{m \cdot \eta}^{(2)} - \frac{\nu}{\beta_m \pi} \end{cases} \\
 & \quad n=1, 2, 3, 4, \dots \dots \dots \\
 & \left. \begin{aligned} S_{m \cdot \eta}^{(1)} \} &= \frac{sh \pi \beta (1-\eta) \mp sh \pi \beta m \eta}{ch \pi \beta m \pm 1}, \\ S_{m \cdot \eta}^{(2)} \} & \\ T_{m \cdot \eta}^{(1)} \} &= \frac{\pi \beta m \{ \eta ch \pi \beta m (1-\eta) \mp (1-\eta) ch \pi \beta m \eta \}}{ch \pi \beta m \pm 1}, \\ T_{m \cdot \eta}^{(2)} \} & \end{aligned} \right\} \\
 & \frac{2}{ab} \int_0^b S_m [f_{xy}] dy = R_m^{(1)}, \quad \frac{4}{ab} S_m C_n [f_{xy}] = R_m^{(2)},
 \end{aligned}$$

とにおいて整理すれば、タワミの解式は

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{A_0}{12} (2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) - \frac{A_0' \xi}{2} + \sum_n \frac{A_n}{4 \alpha_n^2 \pi^2} H_{n \cdot \xi} \cos n \pi \eta \\
 & + \sum_n \frac{A_n'}{4 \alpha_n^2 \pi^2} \{ 2 G_{n \cdot 1-\xi} + (1-\nu) H_{n \cdot 1-\xi} \} \cos n \pi \eta \\
 & + \sum_m \frac{B_m'}{4 \beta_m^2 \pi^2} \{ (1+\nu) S_{m \cdot \eta}^{(1)} - (1-\nu) T_{m \cdot \eta}^{(1)} \} \sin m \pi \xi \\
 & + \sum_m \frac{B_m}{4 \beta_m^2 \pi^2} \{ (1+\nu) S_{m \cdot \eta}^{(2)} - (1-\nu) T_{m \cdot \eta}^{(2)} \} \sin m \pi \xi \\
 & + \frac{D}{24} \xi (1-6\eta+6\eta^2) + \frac{\nu D}{12} (\xi - \xi^3) + \frac{D'}{8} \xi (1-2\eta) \\
 & + \frac{qa^4}{N \pi^4} \sum_m \frac{R_m^{(1)}}{m^4} \sin m \pi \xi + \frac{qa^4}{N \pi^4} \sum_m \sum_n \frac{R_{mn}}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \sin m \pi \xi \cdot \cos n \pi \eta
 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (18)$$

上式から x 方向の曲げモーメント M_x , y 方向の曲げモーメント M_y , ねじりモーメント M_{xy} を計算すれば

$$\begin{aligned}
 M_x = & -N \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\
 = & -N \left[\frac{A_0 (\xi - 1)}{2a^2} + \sum_n \frac{A_n}{4a^2} \{ -2 G_{n \cdot \xi} + (1-\nu) H_{n \cdot \xi} \} \cos n \pi \eta \right. \\
 & \left. + \sum_n \frac{A_n (1-\nu^2)}{4a^2} H_{n \cdot 1-\xi} \cos n \pi \eta + \sum_m \frac{(1-\nu^2)}{4b^2} \{ B_m' (T_{m \cdot \eta}^{(1)} - S_{m \cdot \eta}^{(1)}) \} \dots \dots \dots (19) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + B_m(T_{m \cdot \eta}^{(2)} - S_{m \cdot \eta}^{(2)}) \sin m \pi \xi + \frac{q a^2}{N \pi^2} \sum_m \left\{ \frac{R_m^{(1)}}{m^2} \right. \\
 & \left. + \sum_n \frac{R_{mn}^{(2)}(m^2 + \nu \alpha_n^2)}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \cos n \pi \xi \right\} \sin m \pi \xi \Bigg], \\
 M_y = & -N \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\
 = & -N \left[\frac{\nu A_0}{2 a^2} (\xi - 1) + \sum_n \frac{A_n}{4 a^2} \{-2 \nu G_{n \cdot \xi} - (1 - \nu) H_{n \cdot \xi}\} \cos n \pi \eta \right. \\
 & + \sum_n \frac{A_n'}{4 a^2} \{2(1 - \nu^2) G_{n \cdot 1 - \xi} + (1 - \nu)^2 H_{n \cdot 1 - \xi}\} \cos n \pi \eta \\
 & + \sum_m \frac{B_m'}{4 b^2} \{(3 + \nu)(1 - \nu) S_{m \cdot \eta}^{(1)} - (1 - \nu)^2 T_{m \cdot \eta}^{(1)}\} \sin m \pi \xi \\
 & + \sum_m \frac{B_m}{4 b^2} \{(3 + \nu)(1 - \nu) S_{m \cdot \eta}^{(2)} - (1 - \nu)^2 T_{m \cdot \eta}^{(2)}\} \sin m \pi \xi \\
 & \left. + \frac{D(1 - \nu^2)}{2 b^2} \xi - \frac{q a^2}{N \pi^2} \sum_m \left\{ \nu \frac{R_m^{(1)}}{m^2} + \sum_n \frac{R_{mn}^{(2)}(\nu m^2 + \alpha_n^2)}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \cos n \pi \eta \right\} \sin m \pi \xi \right], \dots \dots \dots (20) \\
 M_{xy} = & -(1 - \nu) N \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\
 = & -(1 - \nu) N \left[\sum_n \frac{A_n}{4 a^2} (U_{n \cdot \xi} - V_{n \cdot \xi}) \sin n \pi \eta - \sum_n \frac{A_n'}{4 a^2} \{(1 + \nu) V_{n \cdot 1 - \xi} \right. \\
 & + (1 - \nu) U_{n \cdot 1 - \xi}\} \sin n \pi \eta + \sum_m \frac{B_m'}{4 b^2} \{-2 Q_{m \cdot \eta}^{(2)} + (1 - \nu) P_{m \cdot \eta}^{(2)}\} \cos m \pi \xi \\
 & + \sum_m \frac{B_m}{4 b^2} \{-2 Q_{m \cdot \eta}^{(1)} + (1 - \nu) P_{m \cdot \eta}^{(1)}\} \cos m \pi \xi + \frac{D(2 \eta - 1)}{4 a b} \\
 & \left. - \frac{D'}{4 a b} - \frac{q a^2}{N \pi^2} \sum_m \sum_n \frac{R_{mn}^{(2)} m \alpha_n}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \cos m \pi \xi \sin n \pi \eta \right] \dots \dots \dots (21)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 V_{n \cdot \xi} & = \frac{sh \pi \alpha_n (2 - \xi) + sh \pi \alpha_n \xi}{ch 2 \pi \alpha_n - 1}, \\
 U_{n \cdot \xi} & = \frac{\alpha_n \pi \{\xi ch \pi \alpha_n (2 - \xi) + (2 - \xi) ch \pi \alpha_n \xi\}}{ch 2 \pi \alpha_n - 1}, \\
 \left. \begin{aligned} Q_{m \cdot \eta}^{(1)} \\ Q_{m \cdot \eta}^{(2)} \end{aligned} \right\} & = \frac{ch \pi \beta_m (1 - \eta) \pm ch \pi \beta_m \eta}{ch \pi \beta_m \pm 1}, \\
 \left. \begin{aligned} P_{m \cdot \eta}^{(1)} \\ P_{m \cdot \eta}^{(2)} \end{aligned} \right\} & = \frac{\pi \beta_m \{\eta sh \pi \beta_m (1 - \eta) \pm (1 - \eta) sh \pi \beta_m \eta\}}{ch \pi \beta_m \pm 1},
 \end{aligned}$$

4. 境界値方程式

(18) 式中 $(A_0, A_n), (A_0', A_n'), B_m, B_m', D, D'$ は未知数で、それぞれ境界条件 (7), (9), (10) および (12) によつて決定されるが、計算の便宜のため各未知数に対する方程式は、中心線 $y = b/2$ に関する対称性と逆対称性にかけてのおおの独立に計算することとする。

(a) $y = b/2$ に関して対称的な場合 この場合は (18) 式中 $n = 0, 2, 4, 6, \dots, m = 1, 2, 3, 4, \dots$ となり $B_m' = D' = 0$, ゆえに境界条件 (7), (9) から

$$\frac{A_0}{6} - \frac{A_0'}{2} + \sum_m \frac{\nu B_m}{\pi^2 \beta_m^2} + \frac{q a^4}{N \pi^3} \sum_m \frac{R_m^{(1)}}{m^3} - \frac{\nu D a^2}{12 b^2} = 0 \quad (n=0), \dots \dots \dots (22)$$

$$\frac{1}{2} A_0 + 2(1 - \nu) \frac{a^3}{b^3} \sum_m (-1)^m B_m - \frac{q a^4}{N \pi} \sum_m \frac{R_m^{(1)} (-1)^m}{m} + (1 - \nu) D \frac{a^2}{b^2} = 0 \quad (n=0), \dots \dots (23)$$

$$A_n E_n - A_n' F_n + \frac{8 a}{\pi b} \sum_m \frac{B_m \alpha_n (n^2 + \nu \beta_m^2)}{(n^2 + \beta_m^2)^2} + \frac{4 a D}{b \pi n} = - \frac{4 q a^4}{N \pi^2} \sum_m \frac{R_{mn}^{(2)} \alpha_n m}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \quad (n \neq 0), \dots (24)$$

$$\begin{aligned}
 A_n F_n + A_n' C_n + \frac{8 a^3}{\pi b^3} (1 - \nu) \sum_m \left\{ - \frac{2 n^2}{\alpha_n (n^2 + \beta_m^2)} + \frac{(1 - \nu) n^2 \beta_m^2}{\alpha_n (n^2 + \beta_m^2)^2} \right\} B_m (-1)^m \\
 = - \frac{16(1 - \nu)}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \sum_m \frac{B_m (-1)^m}{\alpha_n} + \frac{4 q a^4}{N \pi^2} \sum_m \frac{R_{mn}^{(2)} (-1)^m \{m^3 + (2 - \nu) m \alpha_n^2\}}{\alpha_n (m^2 + \alpha_n^2)^2} \quad (n \neq 0), \dots (25)
 \end{aligned}$$

上式中

$$E_n = \frac{sh 2 \pi \alpha_n - 2 \pi \alpha_n}{ch 2 \pi \alpha_n - 1}, \quad F_n = \frac{2\{(1 + \nu) sh \pi \alpha_n + (1 - \nu) \alpha_n \pi ch \pi \alpha_n\}}{ch \pi \alpha_n - 1}, \dots \dots \dots (26)$$

$$C_n = \frac{(3+\nu)(1-\nu)sh\ 2\pi\alpha_n + (1-\nu)^2 2\pi\alpha_n}{ch\ 2\pi\alpha_n - 1} \dots\dots\dots (27)$$

境界条件 (10) から

$$\begin{aligned} B_m K_m - \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_n A_n \frac{m(\alpha_n^2 + \nu m^2)}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} - \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_n A_n' (-1)^m \left\{ \frac{(1-\nu^2)m}{m^2 + \alpha_n^2} \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)^2 m \alpha_n^2}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \right\} - \frac{4\nu b^2}{m\pi a^2} A_0 + (1-\nu^2) (-1)^m \frac{4D}{m\pi} \\ = \frac{4qa^2 b^2}{N\pi^2} \frac{R_m^{(1)}}{m^2} + \frac{4qa^2 b^2}{N\pi^2} \sum_n \frac{R_{mn}^{(2)}(\alpha_n^2 + \nu m^2)}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

上式中

$$K_m = \frac{(3+\nu)(1-\nu)sh\ \pi\beta_m - (1-\nu)^2 \pi\beta_m}{ch\ \pi\beta_m - 1}$$

さて残りの条件式 (12) および (13) から

$$\sum_m B_m (-1)^m = -\frac{D}{2} \cdot \frac{b}{a} \dots\dots\dots (29)$$

$$\sum_m B_m (-1)^m = -\frac{Db}{2a} + \frac{b^2}{2N(1-\nu)} P, \dots\dots\dots (30)$$

上式 (29) は放端隅が自由な場合で (30) は相等しい点荷重 P が作用している場合である。この関係を (23), (25) 式に代入して $\sum_m B_m (-1)^m$ を消去すれば

$$\frac{A_0}{2} - \frac{qa^4}{N\pi} \sum_n \frac{R_m^{(1)} (-1)^m}{m} = \begin{cases} 0, \\ -\frac{Pa^3}{bN} \end{cases} \dots\dots\dots (31)$$

$$\begin{aligned} A_n F_n + A_n' C_n - \frac{8a^2}{\pi b} \sum_m B_m (-1)^m \left\{ \frac{2n(1-\nu)}{n^2 + \beta_m^2} - \frac{(1-\nu)^2 n\beta_m^2}{(n^2 + \beta_m^2)^2} \right\} \\ - \frac{8aD}{bn\pi} (1-\nu) + \frac{4qa^4}{N\pi^2} \sum_m \frac{R_{mn}^{(2)} (-1)^m \{m^3 + (2-\nu)m\alpha_n^2\}}{\alpha_n(m^2 + \alpha_n^2)^2} = \begin{cases} 0, \\ -\frac{8Pa^2}{n\pi N} \end{cases} \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

従つて境界値方程式 (22), (31), (24), (32) および (28) を用いて, $A_0, A_n, A_0', A_n', B_m$ の値を計算することができる。このように式の変形を行なつたのは (25) 式をそのまま用いる場合に比べ計算の労力がいちじるしく軽減されるためである。 D は (29) あるいは (30) 式によつて決定される。

(b) 中心線 $y=b/2$ に関して逆対称的な場合 この場合には (18) 式中 $n=1, 2, 5, \dots, m=1, 2, 3, 4, \dots$, となる $A_0=A_0'=B_m=D=0$, ゆえにこれに境界条件 (7), (9) および (10) を適用すれば, 前の場合と全く同様の計算によつて

$$\begin{aligned} A_n E_n - A_n' F_n + \frac{8a^2}{\pi b^2} \sum_n \frac{B_m' n(n^2 + \nu\beta_m^2)}{(n^2 + \beta_m^2)^2} + \frac{4aD'}{\pi bn} \\ = -\frac{4qa^4}{N\pi^2} \sum_m \frac{m\alpha_n R_{mn}^{(2)}}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n F_n + A_n' C_n - \frac{8a^2}{\pi b^2} \sum_m B_m' (-1)^m \left\{ \frac{2n(1-\nu)}{n^2 + \beta_m^2} - \frac{(1-\nu)n\beta_m^2}{(n^2 + \beta_m^2)^2} \right\} \\ + \frac{4qa^4}{N\pi^2} \sum_m \frac{R_{mn}^{(2)} (-1)^m \{m^3 + (2-\nu)m\alpha_n^2\}}{\alpha_n(m^2 + \alpha_n^2)^2} - \frac{8aD'}{n\pi b} (1-\nu) = \begin{cases} 0 \\ -\frac{8P'a^2}{n\pi N} \end{cases} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

上式中 $8Pa^2/n\pi$ は放端隅に点荷重があるときを示している。 E_n, F_n は(26)式に C_n は (27) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} B_m' K_m' - \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_n A_n \frac{m(\alpha_n^2 + \nu m^2)}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} - \frac{4b^2}{\pi a^2} \sum_n A_n' (-1)^m \left\{ \frac{(1-\nu^2)m}{m^2 + \alpha_n^2} \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)^2 m \alpha_n^2}{(m^2 + \alpha_n^2)^2} \right\} = \frac{4qa^2 b^2}{N\pi^2} \sum_n \frac{R_{mn}^{(2)}(\alpha_n^2 + \nu m^2)}{(m^2 + \alpha_n^2)^2}, \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

ただし

$$K_m' = \frac{(3+\nu)(1-\nu)sh\ \pi\beta_m + (1-\nu)^2 \pi\beta_m}{ch\ \pi\beta_m + 1},$$

$n=1, 3, 5, \dots, m=1, 2, 3, 4, \dots$

D' は隅点における条件式 (12), (13) から

$$\left. \begin{aligned} \Sigma B_m'(-1)^m &= -\frac{D'}{2} \frac{b}{a}, \\ \Sigma B_m'(-1)^m &= -\frac{D'b}{2a} + \frac{b^2}{2N(1-\nu)} P' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

上の第二式は放端両隅に大き等しく相反する向きの点荷重 P' が作用する場合である。これ等の (33), (34), (35) および (36) 式から A_n, A_n', B_m' , および D' が求められる。

5. 境界未知数の計算

境界未知数 A_n, A_n', B_m および A_n, A_n', B_m' を含むそれぞれ二組の三方程式は、次の形にかくことができる。

$$A_n E_n - A_n' F_n + \sum_m B_m \phi_{mn}^{(1)} = L_n^{(1)} \dots\dots\dots (a)$$

$$A_n F_n + A_n' C_n + \sum_m B_m \phi_{mn}^{(2)} = L_n^{(2)} \dots\dots\dots (b)$$

$$B_m + \sum_n A_n \psi_{mn}^{(1)} + \sum_n A_n' \psi_{mn}^{(2)} = L_m^{(3)} \dots\dots\dots (c)$$

上式 (a), (b) から A_n, A_n' を求めれば

$$A_n = \sum_m B_m \Omega_{mn}^{(1)} + L_n^{(4)} \dots\dots\dots (d)$$

$$A_n' = \sum_m B_m \Omega_{mn}^{(2)} + L_n^{(5)} \dots\dots\dots (e)$$

ただし

$$\Omega_{mn}^{(1)} = -\frac{F_n \phi_{mn}^{(2)} + C_n \phi_{mn}^{(1)}}{E_n C_n + F_n^2}, \quad L_n^{(4)} = \frac{C_n L_n^{(1)} + F_n L_n^{(2)}}{E_n C_n + F_n^2},$$

$$\Omega_{mn}^{(2)} = -\frac{E_n \phi_{mn}^{(2)} - F_n \phi_{mn}^{(1)}}{E_n C_n + F_n^2}, \quad L_n^{(5)} = \frac{E_n L_n^{(2)} - F_n L_n^{(1)}}{E_n C_n + F_n^2}.$$

従つて (d), (e) を (c) に代入すれば

$$B_m = L_m - \sum_r \psi_{mr} B_r \dots\dots\dots (37)$$

上式中

$$\psi_{mr} = -\sum_n (\psi_{mn}^{(1)} \Omega_{rn}^{(1)} + \psi_{mn}^{(2)} \Omega_{rn}^{(2)}),$$

$$L_m = L_m^{(3)} - \sum_n L_n^{(4)} \psi_{mn}^{(1)} - \sum_n L_n^{(5)} \psi_{mn}^{(2)},$$

(37) から B_m を求めるには、逐次代入法による井口鹿象博士の方法³⁾が便利である。

6. 数値計算例

数値計算例として正方形のカンテレーバ-平板を選んだ。その荷重状態は

- (a) 一對の相等しい点荷重が両放端隅に作用した場合
- (b) 放端辺の中央に点荷重が作用した場合
- (c) 放端辺上に満載等分布線荷重が作用した場合

の三つの場合について計算した。この場合荷重が $y=b/2$ の中心線に对称であるから境界値方程式は (22), (31), (24), (32), (28), (29) を用いるのであるが (b), (c) の荷重状態に対しては

$$-N \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = \text{放端辺上の荷重}$$

から求める方程式を (31), (32) の代りに用いなければならない。計算にあつては、 m について 1 から 16 項まで、 n については 0 から 16 項までをとつた。 ν は 0.3 である。これらの計算による曲げモーメントとタワミの値は、図-2 から 4 に示すとおりである。図中ハツチした辺は固定辺を、そうしていない辺は完全に自由な辺を示す。また×印は点荷重、ダブルラインは線荷重を現わしている。

数値計算の結果をみると固定辺自由辺との交点付近で反力モーメントの分布は、H. Koiter 氏が示しているように、急激に 0 に接近する傾向を表わしている。もちろん項数を限りなく増して計算すれば、この隅点で $\nu \neq 0$ に対して M_x の値は 0 となるのである。また両放端隅に等しい点荷重が作用しているとき、放端辺の中央において M_y の値が M_x の最大の 50% 近くに達することは注意しなければならない。なお三つの場合を通して M_x の値がほぼ近似していることは Saint-Venant の法則を裏書きしている。

7. むすび

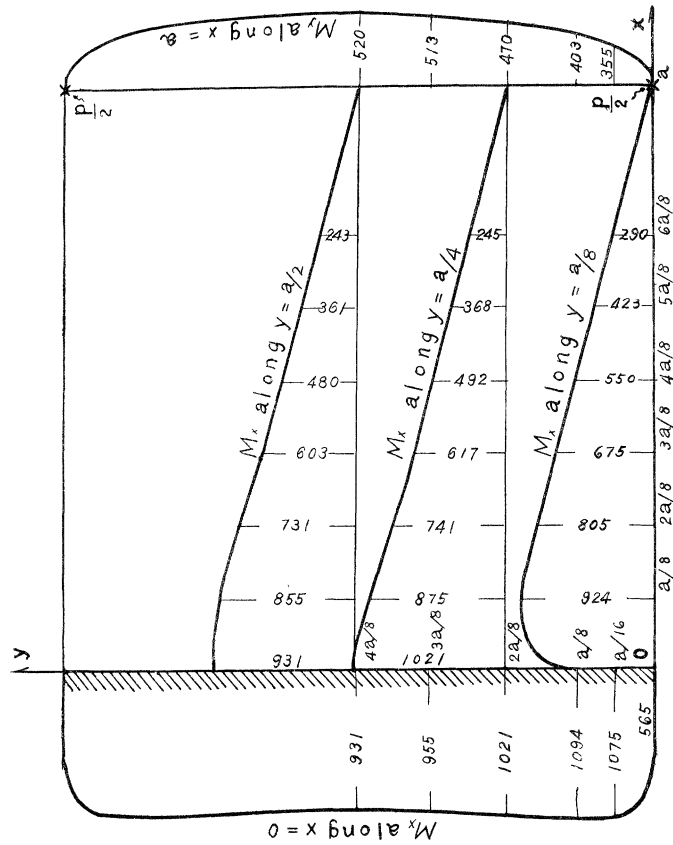
以上、難解とされているカンテレーバ-矩形板について、有限な二重 sin cos 変換による解法を示したが、これ

図-2 カンテレバー-正方形板の両放端隅にそれぞれ点荷重 $P/2$ が作用した場合

(a)

M_x および M_y 線図

(単位: $-P \times 10^{-3}$)



(b)

等沈下曲線図

$\frac{Pa^2}{N} \times 10^{-3}$
(単位: $\frac{Pa^2}{N} \times 10^{-3}$)

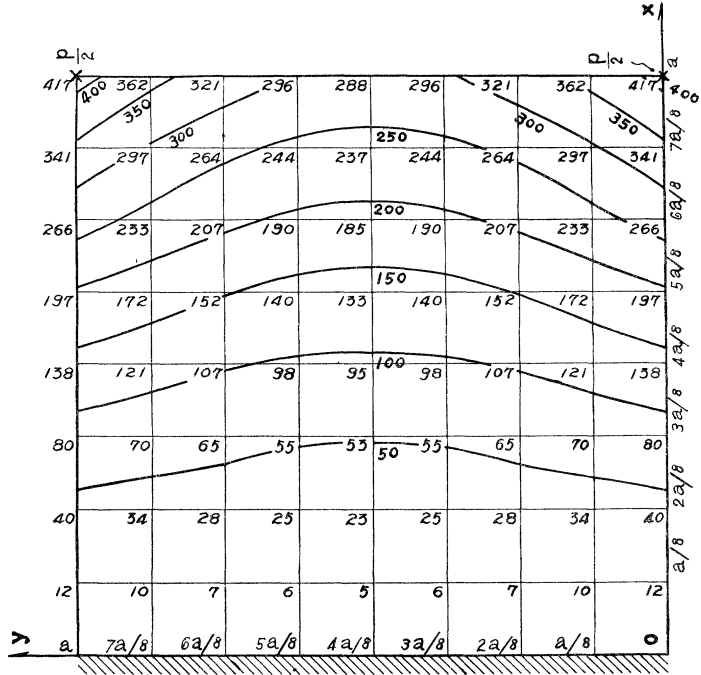
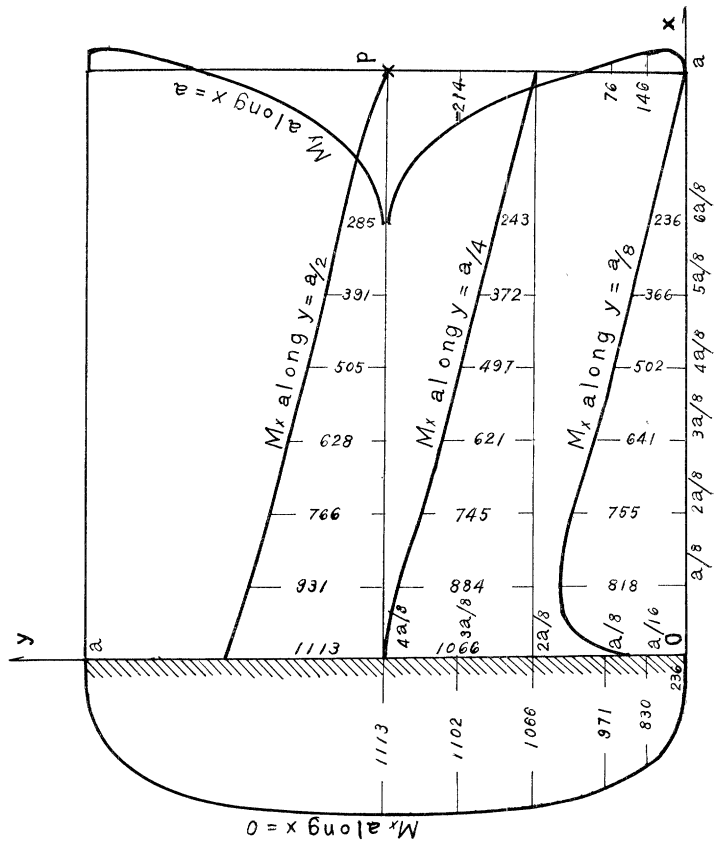


図-3 カンテレバー正方形板の放端辺の中心に点荷重 P が作用した場合

(a)
 M_x および M_y 線図
 (単位: $-P \times 10^{-3}$)



(b)
 等沈下曲線図
 (単位: $\frac{Pe^2}{N} \times 10^{-3}$)

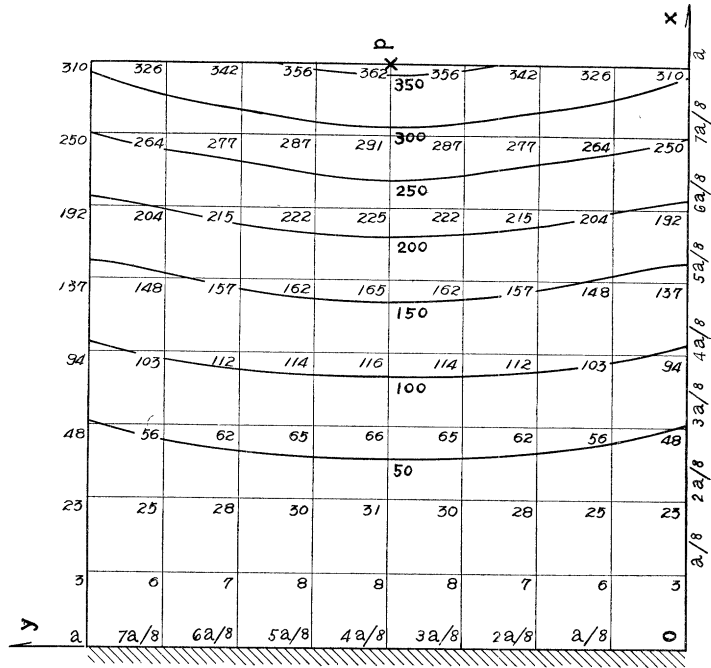
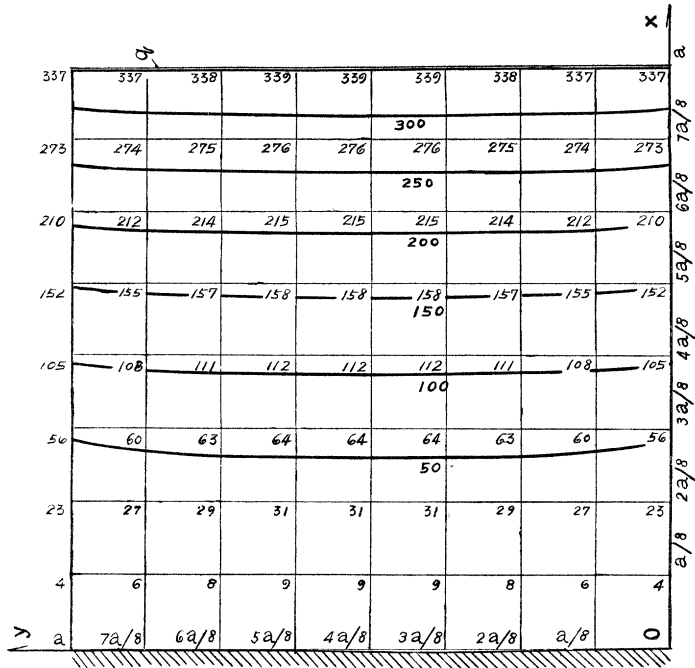
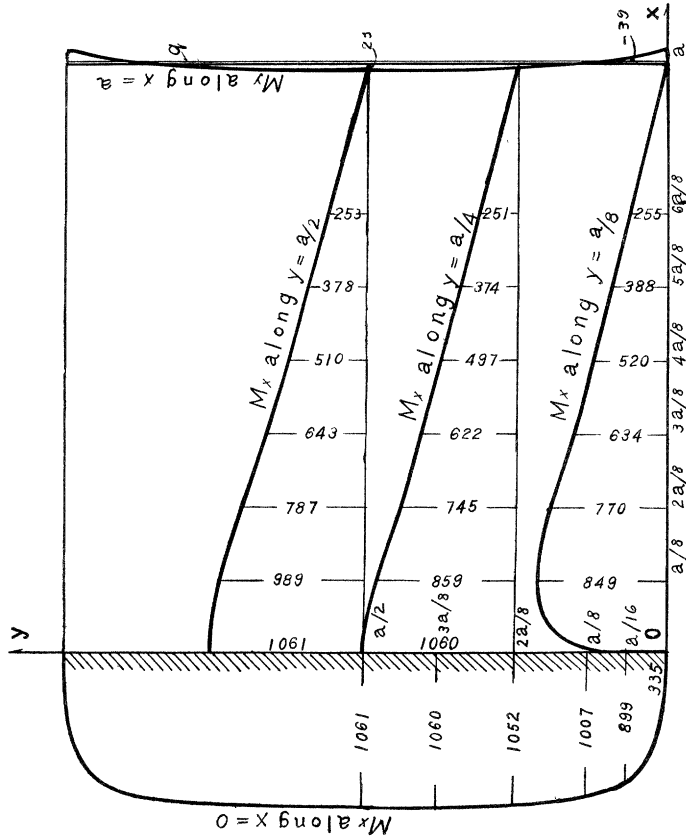


図-4 カンテレーバー-正方形板の放端辺に満載等分布線荷重 q が作用した場合

(b) 等沈下曲線図
(単位: $\frac{qa^3}{N} \times 10^{-3}$)



(a) M_x および M_y 線図
(単位: $-qa^2 \times 10^{-6}$)



以外の組合わせの二重変換では、境界値方程式から境界未知数を求める場合、井口博士の方法による級数の収斂がわるく実用にならないようであつた。また、この解法は他の複雑な境界条件を有する矩形板に対しても有な方法であると思われる。なお数値計算にあつて土木工学科学生諸君の援助を受けた。ここに謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) K. Yamada : On Bending Stress in a Rectangular Flat Plate with Three Clamped Edges and One Free Edge, Proceeding of the 3rd National Congress of App. Mech., p.35-38 (1954)
岡元北海：特殊の境界条件を有する平板の解法，土木試験所報告，昭和 27 年 1 月
 - 2) 犬井鉄郎：応用偏微分方程式論 p.188 (1951)
 - 3) S. Iguchi: Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten, S. 43, Berlin (1933)
(昭. 33. 5. 26)
-