

土 木 学 会 論 文 集

第 59 号・別冊 (3-1)

幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界 特性との関連に関する理論的研究

正 員 岩 佐 義 朗

TRANSACTIONS
OF THE
JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
No. 59, EXTRA PAPERS (3-1)

THEORETICAL STUDY OF HYDRAULIC BEHAVIOURS
OF BOUNDARY CHARACTERISTICS TO CHANNEL
TRANSITIONS AND CONTROLS IN DIVERGENT OR
CONVERGENT CHANNEL

By Yoshiaki Iwasa, C.E. Member

November 1958

TOKYO, JAPAN

昭 和 33 年 11 月

土 木 学 会

H

1025

幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界 特性との関連に関する理論的研究*

正員 岩 佐 義 朗**

THEORETICAL STUDY OF HYDRAULIC BEHAVIOURS OF BOUNDARY CHARACTERISTICS TO CHANNEL TRANSITIONS AND CONTROLS IN DIVERGENT OR CONVERGENT CHANNEL

By Yoshiaki IWASA, C.E. Member

Synopsis : As one of the research projects of clear formulation in hydraulic characteristics of transitional behaviours from subcritical to supercritical or vice versa, this paper deals with the hydraulic behaviours of boundary characteristics in shape, roughness and bed slope to channel transitions and controls in divergent or convergent channel.

The open channel flow in divergent or convergent channel is changed in its flow regimes by the existence of singular points of water surface profile equation based on the one-dimensional procedure in gradually varied flows, and therefore the theoretical approach in analysis of transitional flows will be established by the application of the theory of singular point in ordinary differential equation and the topological method in non-linear mechanics.

The classification of singular points and hydraulic significance of transitional characteristics of flows passing through the singular point, and especially from a standpoint of practical application, those for the Chézy and Manning flows are presented.

The present procedure of analysis is applied not only to the flow in divergent or convergent channel but also to the flow with side in- or outflow and similar problems in hydraulics of open channel flows.

Finally, the application of the analysis described here to the discharge measurement of open channel flows is briefly discussed.

要 旨 本文は、開水路水流の遷移現象に関する水理学的特性をあきらかにする第一歩として、幅がゆるやかに変化する水路における開水路水流の遷移特性について、水路の断面形状、粗度あるいは水路床勾配というような境界特性との関連性から、理論的に考察を加えたものである。

幅の変化する水路における漸変流では、一次元解析法による水面形方程式にトポロジ的な特異点があられると、そこで流れは常流から射流へと、あるいは逆に射流から常流へという遷移現象をひき起こし、またしたがって、水面形状の様相はこのような遷移点の数学的な分類および水理学的な性質によつて決定されるから、その理論的解析をすすめるにあつては、非線型力学におけるトポロジ的な方法が応用される。

ここでは、この方法にしたがつて、遷移点の分類、遷移点によつてひき起こされる水流の遷移特性およびそれにとりあつた水面形状の追跡とそれらの水理学的意義をあきらかにするとともに、実用上の問題との関連性から Chézy あるいは Manning の流れにおける遷移現象の水理学的諸特性について考察をすすめることにした。

このような解析法は、単に本文で取り扱う遷移流の水面形状の追跡のみならず、同様な形式の基礎方程式をもつ多くの水理現象の解析にも、全く同じようにして応用することができる。

また最後に、流量測定法における遷移流の水理学的特性が示す役割についても、若干の考察を加えておいた。

* 昭和 32.11.10, 土木学会関西支部学術講演会にて一部発表。

** 京都大学助教授, 工学部土木工学教室。

目 次

1. 緒 言
2. 幅の変化する水路における水面形方程式の遷移点とその水理学的意義
3. 遷移点の近傍における水面形方程式の特性と境界特性との関係
 - (1) 遷移点の近傍における水面形方程式
 - (2) 遷移点のトポロジー的分類
 - (3) 遷移点において境界特性が遷移流におよぼす影響
4. 遷移点および遷移特性の水理学的意義
 - (1) 遷移点における等流水深曲線と限界水深曲線の幾何学的位置
 - (2) 遷移点における遷移水面曲線の水面勾配
 - (3) 遷移点における遷移特性の水理学的意義
 - (4) 遷移点の近傍における水面形方程式の符号
5. 広矩形断面水路における Chézy の流れの遷移特性
 - (1) 係数 a, b, c, d の符号特性
 - (2) 遷移点のトポロジー的分類
 - (3) 遷移点における遷移水面曲線の水面勾配と遷移特性
 - (4) 遷移点の近傍における水面形方程式の符号特性
 - (5) 遷移形式と遷移点の近傍における水面形状
6. 一般矩形断面水路における Chézy の流れの遷移特性
 - (1) a, b, c, d の特性
 - (2) 遷移点のトポロジー的分類
 - (3) 遷移特性の一般的性質
 - (4) 遷移点の近傍における水面形方程式の符号特性
 - (5) 鞍形点および結節点の近傍における水面形状と遷移水面形曲線
7. 一般矩形断面水路における Manning の流れの遷移特性
8. 遷移水路における水面形状と水面追跡法
9. 流量測定法に対する支配面の水理学的特性の応用
10. 結 語

1. 緒 言

水路の断面形状，粗度あるいは水路床勾配などといった境界特性が変化する開水路の遷移部を通過する水流，すなわち，遷移流は一つの等流状態から別の等流状態へと移行する過渡的な水面形状をもつ流れとして定義されるであろう。

開水路の水流が自由表面の存在によつて常流と射流 という二つの流れの状態にわけられるから，従来より水流の遷移現象は，周知のように，

- (1) 常流から常流への遷移，
- (2) 常流からいわゆる従来の意味における支配点を通つて射流への遷移，
- (3) 射流から常流への遷移，
- (4) 射流から射流への遷移，

という四つの形式に分類¹⁾されている。

一定の境界特性をもつた水路における水流では，その水面形状が限界点の近傍をのぞいては Bresse や Tolkmitt などの一般には擬似線型方程式によつてあらわされ，従来より多くの学者²⁾がその水理学的特性の解明に努めてきた。しかしながら，河川あるいは人工水路には常に遷移部が含まれているから，一定の流量に対して実際にあらわれる水面形状は，境界特性の変化にもなる遷移特性によつて示される局所的な水面形状をあわせてえられたものであると考えられよう。このような問題は従来より工学的実用問題との関連性において，一般には模型実験によつて解析がすすめられ，あるいは不等流における水面形状の追跡としての数値積分法あるいは図解法³⁾によつて研究されているが，特異点の近傍において数学的に誤つた水面形状を追跡することがある。

はじめに分類した遷移現象のうち，(2) および (3) の場合には，遷移点によつて流れの状態が変化するのであるから，跳水現象など水理学上いろいろ興味深い現象があらわれる。とくに (2) は急変流として取り扱われ，また (3) の場合には，遷移点は一定の流量に対して水深が一義的に決定される従来の意味における支配点であるから，水深と流量が簡単な関係であらわされる。このような性質が流量測定法の第一次近似関係として広く応用されていることは明らかであろう。しかしながら，支配点の近傍では，水面曲率の影響があらわれ，したがつて水面形は変動しやすく，漸変流における一次元水面形方程式ではその特性を明確にすることは困難である。

ここでは，はじめに定義した遷移流のもつ水理学的特性とその意義をあきらかにするため，まずその第一歩として，幅がゆるやかに変化する開水路における遷移点の水理学的特性と，水面形状との関連性および水面形追跡法

について理論的に考察をすすめることにした。この問題については、すでに本間博士⁴⁾が研究されているが、遷移特性に十分な議論をつくしておられない点もみうけられる。

幅の変化する開水路における水面形方程式の数学的特異点は、後に示す(1)式からわかるように、三つの場合におけられ、これらの特異点のなかで、水流の遷移現象に関係をもつものは限界水深点および(1)式の分母および分子がともに0となるトポロジの特異点である。しかしながら、限界水深点を通過しておこる水流の遷移現象は急変流として分類されているから、ここで取り扱う遷移点はトポロジの特異点であるとして考察をすすめる。したがって、遷移点の水理学的特性およびその意義を明らかにすることは、漸変流の水面形方程式においてそのトポロジの特異点の性質およびその近傍における積分曲線の水理学的な様相を解析すればよいことになる。このようにして、H. Poincaré 以来多くの学者が研究を重ねてきた非線型力学のトポロジ的方法を応用することができるわけである。

この理論を最初に開水路水流の水面形状の解析に応用したのは、P. Massé⁵⁾であるといわれている。彼はBresseの方程式において底勾配がゆるやかに変化する場合の水面形状の変化を取り扱った⁶⁾。また最近ではF. F. Escoffier⁷⁾が解析表示を少し変更して同様の研究を行い、水面形状の図解法に応用しているが、その水理学的特性についてはあきらかにしていない。

本文においては、まず第一に開水路水流の水面形方程式における遷移点、すなわち、トポロジの特異点の位置とその水理学的意義をあきらかにし、ついでこのような遷移点の分類とその水理学的特性について境界特性との関連性から考察をすすめて、遷移点による水流の遷移形式と水面形状の様相について解析を行う。またさらに、実用上の問題との関係から、ChézyあるいはManningの流れにおけるこれらの遷移特性をあきらかにするとともに、支配構造物などによる遷移流の水面形状の変化および水面形追跡法に考察を加え、流量測定法における遷移流の水理学的役割についても、若干の議論を行う。

ここで取り扱う方法は、単に幅の変化する水路の遷移流の解析に用いられるだけでなく、同様な形式^{8),9)}をもつ水流の水面形追跡を行う場合にも、全く同じようにして解析がすすめられることは明らかであろう。このようにして遷移流の水理学的意義とその特性が明らかにされ、水面形追跡法の基礎的概念が明確になったとき、はじめて開水路の合理的な水理設計が可能となるはずである。

2. 幅の変化する水路における水面形方程式の遷移点とその水理学的意義

水路床に座標軸の原点をおいて下流向きにx軸をとり、Qを流量、hを水深、Aを流水断面積、sを潤辺長、 τ を底面にそつて作用するせん断力、gを重力の加速度、 ρ を流体の密度、 θ を水路の傾斜角、 β を運動量補正係数とすると、運動量保存の原理にしたがつて、漸変流の一次元運動量方程式はつぎのようにあらわされる。

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left(\frac{\beta Q^2}{A} \right) - g \cos \theta \frac{dh}{dx} = g \sin \theta - \frac{\tau \cdot s}{\rho A}, \dots \dots \dots (1)$$

ここに、流体内における圧力分布は静水圧の法則にしたがつると仮定している。流れが限界状態にあるとき、あるいは境界特性が変化するときには流線の曲りによる影響があらわれるが、これらの場合でも、なお(1)式が第一次近似式として成立すると考えられている。

いま、簡単のために、水路の断面形状が矩形であると仮定し、また抵抗法則としてChézy型の表示を用いると、(1)式より水面形方程式はつぎのようにあらわされる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{g Q^2}{C^2 b^2 h^3} \left(1 + \frac{2h}{b} \right) + \frac{\beta Q^2}{b^3 h^2} \cdot \frac{db}{dx}}{g \cos \theta - \frac{\beta Q^2}{b^3 h^3}} = \frac{f_1(x, h)}{f_2(x, h)} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、bは水路幅、CはChézyの係数である。

ある境界特性をもつた水路に一定の流量が流れるとき、その水流に遷移点があられるものとする、これは(2)式のトポロジの特異点である。したがって、添字のcで特異点における値を示すことにすると、まず $f_2(x, h) = 0$ より

$$b_c^3 h_c^3 = (\beta Q^2 / g \cos \theta) \dots \dots \dots (3)$$

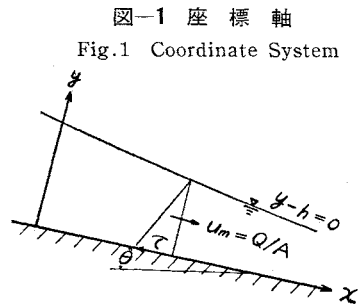


図-1 座標軸
Fig.1 Coordinate System

がえられる。これは明らかに限界水深を与える関係式である。(3) 式を $f_1(x, h) = 0$ に代入して、 (h_c/b_c) を求めると、

$$\frac{h_c}{b_c} = \frac{i - (g/\beta C_c^2)}{2(g/\beta C_c^2) - (db/dx)_c} \dots\dots\dots(4)$$

という関係がえられる。ここに、 i は水路床の勾配 $\tan \theta$ である。

いま、一定の流量に対する局所的な限界勾配

$$i_c = (g/\beta C_c^2) \{1 + 2(h_c/b_c)\} \dots\dots\dots(5)$$

を導入して (4) 式の $(g/\beta C_c^2)$ をあらわすと、 i_c, i, h_c, b_c および $(db/dx)_c$ の間にはつぎの関係があることがわかる。

$$\frac{h_c}{b_c} = - (i - i_c) / \left(\frac{db}{dx} \right)_c \dots\dots\dots(6)$$

この式は (2) 式によつてあらわされる水流の遷移点をもつ 水理学的意義を与える関係であつて、 h_c および b_c がともに正なるべきことを考えると、遷移点があられるためには、

(1) 幅の拡がる水路では、水路床勾配が限界勾配より小さく、また

(2) 幅の狭まる水路では、逆に水路床勾配が限界勾配より大きい、

ということである。

3. 遷移点の近傍における水面形方程式の特性と境界特性との関係

(1) 遷移点の近傍における水面形方程式

まず、漸変流の遷移点の近傍における水面形状の幾何学的な特性を明らかにするために、水面形方程式 (2) の遷移点の付近における変動量方程式を求めよう。

いま、断面形状が連続的に変化するものと仮定し、

$$x = x_c + x', \quad h = h_c + h', \dots\dots\dots$$

$$\text{ただし } x_c \gg x', \quad h_c \gg h', \dots\dots\dots$$

とおいて、座標軸の原点を (3) および (6) 式によつて与えられる遷移点へ移動させると、(2) 式の変動量方程式はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \frac{dh'}{dx} = & \frac{(i - i_c) \left[6i(i - i_c) + \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)_c (i_c - 3i) - \left\{ \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)_c - 2(i - i_c) \right\} h_c \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right)_c / \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)_c \right] x'}{ - 2 \left\{ \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)_c - 2(i - i_c) \right\} (i - i_c) x' } \\ & + \frac{\left[\frac{2h_c i_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \left\{ \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)_c - 2(i - i_c) \right\} + \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)_c (2i + i_c) - 4i(i - i_c) \right] h' + Q(x', h')}{ + 3 \left\{ \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)_c - 2(i - i_c) \right\} h' + P(x', h') } \end{aligned} \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 $P(x', h')$ および $Q(x', h')$ は変動量に関する二次およびそれ以上の高次項である。

いま、取扱いの便宜上から、 $x' = x, h' = h$ と書きあらため、また $\alpha = (i/i_c), \beta = (\partial b/\partial x)_c/i_c, m = 3h_c^2(\partial^2 b/\partial x^2)_c/b_c i_c^2$ という無次元量を導入すると、(7) 式はつぎのように書くことができる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{cx + dh + Q(x, h)}{ax + bh + P(x, h)}, \dots\dots\dots(8)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a &= -2i_c(\alpha - 1) \{ \beta - 2(\alpha - 1) \}, \\ b &= 3 \{ \beta - 2(\alpha - 1) \}, \\ c &= i_c^2 [(\alpha - 1) \{ 6\alpha(\alpha - 1) - \beta(3\alpha - 1) \} + (m/3) \{ \beta - 2(\alpha - 1) \}], \\ d &= i_c [(2h_c/C_c) (\partial C/\partial h)_c \{ \beta - 2(\alpha - 1) \} + \beta(2\alpha + 1) - 4\alpha(\alpha - 1)], \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

である。(7) あるいは (8) 式は、遷移点の近傍における遷移流の水理学的特性をあらわすものであつて、以下に考察を加える基礎方程式である。

(2) 遷移点のトポロジ的分類

微分方程式 (8) の特異点は、(8) 式の特性方程式の性質にしたがつて変化する特異点の近傍における解の幾何学的な性質から、以下に述べるように分類¹⁰⁾される。

いま、(8) 式の特性方程式

$$S^2 - (a+d)S + (ad-bc) = 0 \dots\dots\dots(10)$$

において、二根をそれぞれ、 S_1 および S_2 としよう。

(a) S_1 および S_2 が実数で、かつ異符号である場合には、特異点すなわち遷移点は鞍形点といわれ、(8) 式の積分曲線は 図-2 に示すような鞍形状をなしている。

(b) S_1 および S_2 が実数で、かつ同符号である場合には、遷移点は結節点といわれ、(8) 式の積分曲線は 図-3 に示すような形状をあらわし、遷移点ではすべての曲線が同一勾配をもっている。特性方程式が等根をもっている場合には、非線型力学では結節点から別の分類の特異点への遷移曲線をあらわすものと考えられている。

(c) S_1 および S_2 が共軛複素数である場合には、特異点は渦状点であつて、図-4 に示すように、渦巻状の積分曲線があらわれる。また特別の場合として、このような特異点が 図-5 に示すような渦心点となることもある。

図-2 鞍形点

Fig.2 Saddle Point

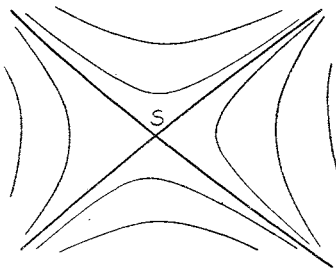


図-3 結節点

Fig.3 Nodal Point

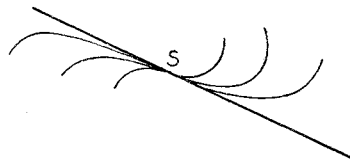


図-5 渦心点

Fig.5 Vortex Point

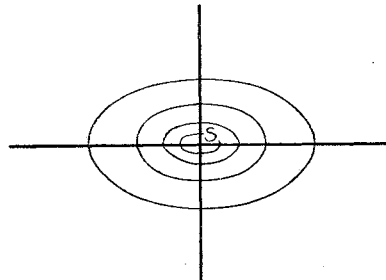
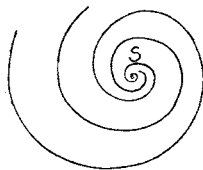


図-4 渦状点

Fig.4 Focal Point



(3) 遷移点において境界特性が遷移流におよぼす影響

前項では、遷移特性を一般的な表示によつてあらわしたが、ここでは、それらが境界特性によつてうける影響について考察をすすめよう。

遷移流が鞍形点あるいは結節点によつて流れの状態を変化するとき、特性方程式 (10) の判別式は負ではありえない。この関係を (10) 式の a, b, c, d の代りに境界特性を用いてあらわせば、つぎようになる。

$$D = -4i_c^2 \left[5\alpha^2 - 2 \left\{ 5 + \frac{2h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \right\} \alpha + \frac{11-4m}{4} - \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \left\{ \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c - 1 \right\} \right] \\ \times \left[\beta^2 - \frac{2(\alpha-1) \left[10\alpha^2 - \left\{ 15 + \frac{8h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \right\} \alpha + 2(1-m) - \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \left\{ 2 \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c - 3 \right\} \right]}{\left[5\alpha^2 - 2 \left\{ 5 + \frac{2h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \right\} \alpha + \frac{11-4m}{4} - \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \left\{ \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c - 1 \right\} \right]} \right] \beta \\ + \frac{4(\alpha-1)^2 \left[5\alpha^2 - \left\{ 5 + \frac{4h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \right\} \alpha - (1+m) - \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \left\{ \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c - 2 \right\} \right]}{\left[5\alpha^2 - 2 \left\{ 5 + \frac{2h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \right\} \alpha + \frac{11-4m}{4} - \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c \left\{ \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c - 1 \right\} \right]} \right] \geq 0 \dots\dots(11)$$

なお、渦状点に対する条件は、 $D < 0$ とすればよい。(11) 式は複雑な形のようにみえるが、抵抗法則として平均流速公式を適用すると、 $(h_c/C_c)(\partial C/\partial h)_c$ が簡単にあらわされるから、後節で示すように (11) 式は簡単に表示される。

また、遷移点が鞍形点と結節点のいずれであるかは、(10) 式の 2 実根の符号によつて決定される。すなわち、

$$\left\{ 5(\alpha-1)^2 - \frac{4h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c (\alpha-1) - m \right\} \left\{ \beta - 2(\alpha-1) \right\} \\ \times \left[\beta - \frac{(\alpha-1) \left\{ 10\alpha(\alpha-1) - \frac{8h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c (\alpha-1) - 2m \right\}}{\left\{ 5(\alpha-1)^2 - \frac{4h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c - m \right\}} \right] \geq 0 \dots\dots\dots (12)$$

ここに、上側および下側の不等号は、それぞれ結節点および鞍形点に対する条件を示している。

(11) および (12) 式より明らかなように、 C, α, β および m はそれぞれ水路粗度、無次元水路床勾配、無次元断面形状をあらわしたいわゆる境界特性であると考えられる。したがって、一定の流量に対して、境界特性が変化する水路内の遷移流のもつ遷移形式は、ここで述べた関係を用いて分類することができる。しかしながら、はこのような遷移形式の水利学的意義、あるいは与えられた境界条件によつて実際にあらわれる水面形状について明らかにされていない。これらについては以下の各節で考察をすすめよう。

4. 遷移点および遷移特性の水利学的意義

遷移特性の水利学的意義は、前節において分類した特異点の数学的性質を物理的に解釈することによつて明らかにされる。

図-2 より明らかなように、遷移点が鞍形点として分類される場合には、この点を通過する水面形曲線は 2 コだけであつて、この点の近傍を通る他のすべての水面形状は、遷移点を通過する 2 曲線によつてわけられる四つの領域のいずれかにあつて、他の領域に入ることはない。したがって、境界特性の与えられた開水路における遷移水面形曲線は、遷移点を通過する 2 曲線のいずれかであり、その他の積分曲線は上・下流においてせきや水門などの支配構造物によつて調節された水流の水面形曲線であることが予想されよう。この場合、遷移点にあらわれる二つの積分曲線のうち、いずれのものが遷移水面形曲線であるかについては後に考察をすすめる。

図-3 より明らかなように、結節点の近傍を通る積分曲線はかならず存在し、またそれらの曲線はすべて結節点を通過する。すなわち、遷移点が結節点として分類された場合には、水面形曲線がすべてこの点を通過するというのである。しかしながら、数学的に可能な積分曲線が以上に述べたようなものであつても、水理学上可能な水面形状は流れの条件によつて支配されるから、この点についても考えておく必要がある。いま一例として、与えられた境界条件にしたがつて追跡されてきた水面形曲線が結節点に到達する以前に限界水深曲線と交つたとすると、この点で水面勾配は無無限大となる。すなわち、遷移流は急変流であつて、上・下流側の水面形曲線が共軛関係に達したところで跳水現象がおこり、結節点は実質上遷移点とならない。しかしながら、境界条件によつては限界水深曲線と交らずに結節点に到達する場合もあり、このとき結節点は遷移点となる。

遷移点が渦状点であれば、図-4 より明らかなように、水面形曲線はこの点に螺旋状に近づくか、あるいは遠ざかるから、したがつて実際の水流にはこのような水面形状は存在しない。すなわち、渦状点は実質上の遷移点でなく、水流は局所的跳水現象によつて流れの状態を変える。

以上に述べたことからわかるように、遷移点における $f_1(x, h) = 0$ および $f_2(x, h) = 0$ という両曲線が遷移特性の水利学的意義におよぼす役割は重要であり、したがつてまず、これら両曲線の幾何学的位置と遷移点の分類との関係について考察をすすめよう。

(1) 遷移点における等流水深曲線と限界水深曲線の幾何学的位置

いま、 $f_1(x, h) = 0$ 曲線を等流水深曲線*と名づけ、この曲線が遷移点でもつ勾配を s_1 、また $f_2(x, h) = 0$ という限界水深曲線のものを s_2 とすると、これらが遷移点で有限確定値である場合には、(8) 式よりそれぞれ、

$$s_1 = -c/d \dots\dots\dots (13)$$

および

$$s_2 = -a/b \dots\dots\dots (14)$$

によつて与えられる。したがつて、 s_1 および s_2 の特性は a, b, c, d によつて一義的に決定される。いま、 s_1 と s_2 との差を求めると、(13) および (14) 式より

* Massé はこれを擬似等流曲線 (curve of quasi normal flow) と名づけ、また Escoffier は遷移曲線 (transition curve) といつているが、われわれの取り扱つている座標軸系では、この曲線上で水面形曲線と水路床とが平行になるのであるから、以下簡単に等流水深曲線といい、また遷移水面形曲線とは遷移点を通る水面形曲線を意味するものとする。

$$s_1 - s_2 = \frac{ad - bc}{bd} \dots\dots\dots(15)$$

である。とくに、 $(s_1 - s_2) < 0$ という場合には、遷移点で等流水深曲線と限界水深曲線とが交わることから、 s_1 および s_2 の符号にしたがつて、

- (a) $s_1, s_2 > 0, s_2 > s_1,$
- (b) $s_1 < 0, s_2 > 0,$
- (c) $s_1, s_2 < 0, |s_1| > |s_2|,$

という三通りの場合が考えられ、これらはいずれも等流水深曲線が限界水深曲線より上*から遷移点に達するという幾何学的位置をあらわしている。

また逆に、 $(s_1 - s_2) > 0$ では、同様の考察を加えると、

- (d) $s_1, s_2 > 0, s_1 > s_2,$
- (e) $s_1 > 0, s_2 < 0,$
- (f) $s_1, s_2 < 0, |s_2| > |s_1|,$

であつて、いずれも限界水深曲線が等流水深曲線より上から遷移点に達する場合をあらわしている。したがつて、

1. 遷移点が鞍形点であれば、 $ad - bc < 0$ であるから、 b と d とが同符号あるいは異符号により、それぞれ(a)~(c) あるいは (d)~(f) の場合になる。
2. 遷移点が結節点あるいは渦状点であれば、 $ad - bc > 0$ であるから、 b および d の符号の同あるいは異にしたがつて、それぞれ (d)~(f) あるいは (a)~(c) の場合に相当することがわかる。

以上においては、遷移点の種類とその意義および遷移点における等流水深曲線と限界水深曲線との幾何学的な相対位置について考察をすすめたのであるが、また支配点の定義も明らかにすることができよう。従来より、支配点あるいは支配断面は、一定の流量および境界特性に対し一義的に水深が決定される点と定義され、また流れが常流より射流へと消かに遷移する点と定義されることもあつた。しかしながら、鞍形点あるいは結節点の特性より明らかなように、これらの遷移点を通る水面曲線が存在すれば、流れの状態の遷移形式にかかわらず、常に水深が一義的に決定される。したがつて、支配点の定義としては、後者のものよりもむしろ前者の方が明らかに水理学的な表現をもっているといえよう。

(2) 遷移点を通過する水面形曲線のもつ水面勾配

遷移点は水面形方程式 (2) のトポロジックの特異点であるから、この点を通過する水面形曲線の水面勾配は通常の意味における不定形として与えられる。とくに、遷移点が支配点となるとき、この点は遷移水面形追跡に當つてその出発点となる場合が多いから、水面勾配 $(dh/dx)_c$ をあらかじめ知つておかねばならない。すなわち、微分学における不定形の極限演算法あるいは (8) 式の極限演算から、水面勾配は

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)_c = \frac{-(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2b} \dots\dots\dots(16)$$

で与えられるが、この2根のうち、いずれが遷移点における水面勾配を示すかについては明確な結論がえられておらず、むしろ過去における経験にもとづいて都合のよいものを採用しているのが、現在の水理計算の常用手段であるといえよう。遷移水面形曲線の水面勾配は後に考察をすすめるように、開水路水流の流れの状態によつて決定されるのであるが、ここでは遷移点を通過する水面形曲線の幾何学的特性について解析を加えよう。

いま、遷移点が鞍形点とすると、特性方程式 (10) は符号の異なつた2実根をもっているから、正根を S_2 、負根を S_1 とする。一次変換式

$$\left. \begin{aligned} x &= (S_2 - a)\xi + (S_1 - a)\eta, \\ h &= -c\xi - c\eta, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

を用いて、変動量方程式の標準形を作ると、原点の近傍においては、近似的に

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \left| \frac{S_2}{S_1} \right| \frac{\eta}{\xi} \dots\dots\dots(18)$$

によつてあらわされ、これを積分すると、

$$\eta = C \xi^{-|S_2/S_1|} \dots\dots\dots(19)$$

* 遷移点を原点とする変動量に関する $x-h$ 座標軸で、第三象限から第一象限へと通過する曲線は勾配が正であり、第二象限から第四象限へと通過するものが負であるとしている、以下同様。

となる。ここに、 C は積分常数である。(19) 式であらわされる積分曲線群のなかで、鞍形点を通るものの勾配は $(d\eta/d\xi)_c=0$, あるいは $=\infty$

である。したがって、(17) 式より鞍形点としての遷移点における水面勾配は、

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_1} = -\frac{c}{S_2-a} \dots\dots\dots (20), \text{ あるいは } \left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_2} = -\frac{c}{S_1-a} \dots\dots\dots (21)$$

である。あるいは、(9) 式の a, b, c, d を用いて上式をかきあらためると、

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_1} = \frac{-\{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}\}}{2b} \dots\dots\dots (22)$$

あるいは、

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_2} = \frac{-\{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}\}}{2b} \dots\dots\dots (23)$$

となり、(16) 式の結果と一致する。

つぎに、これらの水面勾配の符号特性について説明しよう。まず、 $(dh/dx)_{c_1}$ について考察をすすめると、(9) 式より、 b は幅の拡がる水路では正、または幅の狭まる水路では負であるから、 $(a-d)>0$ であれば、 $(dh/dx)_{c_1}$ は $b \leq 0$ に応じて正負の符号をもっている。また $(a-d)<0$ であれば、(22) 式の分子括弧内が正となるための条件として、 $bc>0$ がえられる。したがって、幅の変化のいかんにかかわらず $c \geq 0$ に対応して $(dh/dx)_{c_1} \leq 0$ となる。

(21) あるいは (23) 式によつて与えられる $(dh/dx)_{c_2}$ の符号特性は、(20) および (21) 式の積より簡単に決定される。すなわち、

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_1} \cdot \left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_2} = \frac{c^2}{(S_1-a)(S_2-a)} = -\frac{c}{b} \dots\dots\dots (24)$$

である。ところが b の符号は水路幅の変化によつて決定されるから、幅の拡がる水路では $c \leq 0$ にしたがって、これら二つの水面勾配は異または同符号をもち、また逆に幅の狭まる水路では $c \leq 0$ に対応して、同または異符号をもつことになる。

鞍形点を通る二つの水面形曲線の幾何学的位置の相対関係は、(22) 式と (23) 式の差

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_1} - \left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_2} = \frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{b} \dots\dots\dots (25)$$

より決定される。すなわち、水面勾配の符号にかかわらず、幅の拡がる水路では $(dh/dx)_{c_1}$ という水面勾配をもつ水面形曲線が $(dh/dx)_{c_2}$ をもつ曲線の上側より鞍形点に達して下側へと通過することになり、また逆に幅の狭まる水路では下側から上側へと通過することになる。

これら二つの水面形曲線のうち、いずれのものが遷移水面形曲線になるかは、水理学的条件、すなわち射流では上流側の条件によつて支配され、また常流では下流側の条件によつて支配されるという水面形追跡法の原則にしたがつて決定される。この場合、遷移水面形曲線でない方の水面曲線は、支配構造物による水位調節効果の影響が鞍形点を越えて上流あるいは下流におよぶかどうかを判別する場合に、重要な意義を与える曲線である。

遷移点が結節点であれば、特性方程式 (10) は同符号の 2 実根をもっている。いま、絶対値の大きい方を S_2 とすると、常に (S_2/S_1) は 1 より大きいから、(17) 式の一次変換式によつて標準形を作り、かつ $\xi-\eta$ 軸上の積分曲線を求めると、

$$\eta = C \xi^{(S_2/S_1)} \dots\dots\dots (26)$$

となる。この場合には $(S_2/S_1)>1$ であるから、原点において積分曲線の勾配は 0 となり、したがつてもとの座標軸系に変換すると、

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_c = \frac{-c}{S_2-a} \dots\dots\dots (27)$$

となる。それで S_2 を $S_2>S_1$ となるように選べば、(27) 式は形式的に (20) 式と全く同様であるから、結節点における水面勾配の特性は、すでに述べた鞍形点における場合と同じようにして決定されることがわかる。

(3) 遷移点における遷移特性の水理学的意義

遷移流の水理学的特性に関して最も重要な関係は、水流の遷移現象によつて流れの状態がどのように変化するかということである。遷移水面形曲線が限界水深曲線より上側にあれば流れは常流であり、また逆に下側にあれば流れは射流であるから、遷移点による流れの状態の変化を解析するには、この点におけるこれらの二曲線の幾何学的な相対位置関係を明らかにすればよい。

遷移点が鞍形点であり、かつ遷移水面形曲線の勾配が $(dh/dx)_{c_1}$ で与えられるとき、この点における遷移水面形曲線および限界水深曲線がもっている水面勾配の差は、(14) および (22) 式より

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_1} - s_2 = \frac{a+d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2b} = \frac{S_1}{b} \dots\dots\dots(28)$$

である。鞍形点においては、われわれは $S_1 < 0$ と定義しかたら、上式によつてあらわされる両曲線の位置関係は b の符号に関係することがわかる。すなわち、幅の広がる水路では、遷移水面形曲線が限界水深曲線の上側から鞍形点に達し下側に抜けることになり、したがつて、流れの状態は常流から射流へと遷移する。また逆に幅の狭まる水路では射流から常流への遷移現象があらわれる。

また一方、 $(dh/dx)_{c_2}$ が遷移水面形曲線の勾配であれば、 $(dh/dx)_{c_2}$ と s_2 との差は、

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_2} - s_2 = \frac{S_2}{b} \dots\dots\dots(29)$$

である。ここに $S_2 > 0$ であるから、前述の場合とは逆に幅の広がる水路においては射流から常流への遷移を、また幅の狭まる水路においては常流から射流への遷移を行うことがわかる。

遷移点が結節点である場合にも、遷移水面形曲線と限界水深曲線のもっている勾配の差は、(28) 式によつてあらわされる。しかしながら、 S_1 の符号は鞍形点における場合のように負であるとは限らない。 S_1 および S_2 が同符号であることから、特性方程式 (10) より

$$S_1 + S_2 = a + d$$

を考えあわせると、 S_1 の符号は $(a+d)$ の正負にしたがうことがわかる。一方において、(9) 式より遷移点の存在する全領域にわたり a は正である。したがつて、結節点による流れの遷移現象をつぎのように示すことができる。

(a) $d > 0$ 、あるいは d が負であつても $|d| < a$ のとき、 $a+d > 0$ であり、 $S_1 > 0$ なる。したがつて、(28) 式より明らかなように、鞍形点による遷移とは逆に、幅の広がる水路で射流から常流へと、また幅の狭まる水路で常流から射流へと遷移する。

(b) $d < 0$ 、かつ $|d| > a$ であれば、 S_1 は負であるから、遷移特性は鞍形点と全く同様であることがわかる。

(4) 遷移点の近傍における水面形方程式の符号

遷移流の遷移特性は、以上に述べたトポロジックの特異点の水理学的特性とその意義を解析して明らかにされるものであるが、遷移点の近傍における水面形状を詳細に検討するには、さらに水面形方程式 (2) の遷移点の近傍における符号を考えると都合がよい。この符号は (2) 式より明らかなように、 $f_1(x, h) = 0$ および $f_2(x, h) = 0$ との相対位置によつて決まる。Bresse の方程式では、水路床勾配が正であれば、分子および分母はそれぞれ等流水深および限界水深という実根をもつだけであるから、これら両水深曲線の内部領域が (dh/dx) の負領域となり、また水路床勾配が 0 あるいは負であれば、限界水深より上部領域が負領域である。しかしながら、ここで取り扱っている (2) 式に対しては、簡単に決定するわけにはいかない。

まず、限界水深曲線 $f_2(x, h) = 0$ の正負領域について考察をすすめよう。いま、 $x = x_c$ 、すなわち遷移点において水深の増加あるいは減少が $f_2(x, h)$ の符号におよぼす影響をみると、

$$f_2(x_c, h) = g \cos \theta - \frac{\beta Q^2}{b_c^2 h^3} \geq 0 \dots\dots\dots(30)$$

である。ここに、上側および下側の不等号はそれぞれ $f_2(x_c, h)$ の正領域および負領域をあらわしている。(30) 式に (3) 式の関係を用いると、

$$f_2(x_c, h) = g \cos \theta (h - h_c) \left\{ \left(h + \frac{h_c}{2} \right)^2 + \frac{3h_c^2}{4} \right\} / h^3 \geq 0 \dots\dots\dots(31)$$

となるから、Bresse の方程式と全く同様に、遷移点においては限界水深より深い水深に対して $f_2(x_c, h)$ は正となり、逆に浅い水深に対して負となる。遷移点の近傍においても境界特性が連続的に変化する場合には、以上の結論を拡張することができるであろう。

同様の取扱いを $f_1(x, h) = 0$ に適用すると、 $f_1(x, h)$ の正負領域を決定することができる。すなわち、

$$f_1(x_c, h) = g \sin \theta - \frac{g Q^2}{C^2 b_c^2 h^3} \left(1 + \frac{2h}{b_c} \right) + \frac{\beta Q^2}{b_c^2 h^2} \left(\frac{db}{dx} \right)_c \geq 0 \dots\dots\dots(32)$$

であるから、この関係に (3)、(5) および (6) の各式および無次元量 α, β を用いて書きあらためると、結局

$$f_1(x_c, h) = -\frac{g \sin \theta}{h^3} \left[h^3 + \frac{2\left(\frac{C_c}{C}\right)^2 (\alpha-1) - (\alpha-1)\{\beta-2(\alpha-1)\}}{\alpha\{\beta-2(\alpha-1)\}} h^2 c h - \frac{\beta}{\alpha\{\beta-2(\alpha-1)\}} \left(\frac{C_c}{C}\right)^2 h c^3 \right] \geq 0 \dots\dots\dots (33)$$

がえられる。(33) 式より明らかなように、 $f_1(x_c, h)$ の正負領域は、 $f_2(x_c, h)$ のように一義的にはきまらない。しかしながら、抵抗法則を規定すると Chézy の係数がわかるから、根の判別、したがって $f_1(x_c, h)$ の正負領域を決定することができる。

このような $f_1(x_c, h)$ および $f_2(x_c, h)$ の正負領域の決定は、変動量方程式 (8) によつて簡単に取り扱うことができる。すなわち、遷移点では b と d の符号によつて (dh/dx) の符号が決定され、

(a) 幅の拡がる緩勾配および逆勾配水路では b が正であるから、 $d \geq 0$ にしたがつて遷移点の上側で $(dh/dx) \geq 0$ となり、また

(b) 幅の狭まる急勾配水路では b が負であるから、 $d \geq 0$ に対応して、遷移点の上側で $(dh/dx) \leq 0$ となる。

5. 広矩形断面水路における Chézy の流れの遷移特性

Bresse の方程式のもつ水理学的特性およびその意義をさらに一般的に考察するため、本節では広矩形断面水路における Chézy の流速公式が適用されるような流れの遷移特性と遷移点の近傍における水面形状について、トポロジ的に取り扱うことにする。

この問題については、すでに本間博士⁴⁾が研究をされているが、遷移流における境界特性と遷移特性との関係は、水面形方程式の符号および $f_1(x, h) = 0$ と $f_2(x, h) = 0$ との幾何学的な相対位置によつて解析されたようであり、これまでに述べたトポロジ的方法にしたがつて分類すると、不十分なところがあるように思われる。

水路幅は水深に較べて十分大きいから、 $h \approx R$ とおくことができ、したがつて、広矩形断面に対して (2) 式はつぎのように変換される。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{g \sin \theta - \frac{g Q^2}{C^2 b^2 h^3} + \frac{\beta Q^2}{b^3 h^2} \frac{db}{dx}}{g \cos \theta - \frac{\beta Q^2}{b^2 h^3}} = \frac{f_1(x, h)}{f_2(x, h)} \dots\dots\dots (34)$$

この式において、Chézy の係数が一定であることを考え、かつ座標軸の原点を遷移点に移動させて変動量方程式を求めると、(8) 式の a, b, c, d はそれぞれつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 i_c (1 - \alpha), \\ b &= 3, \\ c &= i_c^2 \left\{ \frac{m}{3} - (1 - \alpha)(1 - 3\alpha) \right\}, \\ d &= i_c (1 + 2\alpha), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

したがつて、広矩形断面水路内の Chézy 流れの遷移特性の水理学的意義について考察をすすめることは、(35) 式によつて与えられる係数をもつた同次方程式 (8) のトポロジ的解析を行うことになる。

(1) 係数 a, b, c, d の符号特性

水流の遷移特性は、前節で考察したことからわかるように、変動量方程式の係数の性質にしたがつて変化するため、まずこれらの係数と境界特性との関係について考察をすすめる。この場合、前項で述べた一般的性質と異なる点は、水路幅に関する無次元パラメーターが直接には関係しないことである。

(35) 式より a は $\alpha = 1$ を境界線として符号をかえる。これを $\alpha - m$ 面で図示すると、 $\alpha = 1$ の左側、すなわち緩勾配あるいは逆勾配水路においては a は正であり、また逆に急勾配水路では a は負である。

b は明らかに $\alpha - m$ 面上の全領域にわたつて正である。

c は α と m との関数であるが、(35) 式よりつぎのように書きあらためることができる。

$$c = -3 i_c^2 \{ \alpha^2 - (4/3)\alpha + (3-m)/9 \}$$

したがつて、 $m < -1$ に対して上式の右辺括弧内は常に正となり、 α の値に無関係に c は負である。 $m \geq -1$ においては c は α の二つの実数値に対して同一の値をもち、これを α_1 および α_2 とすると、

$$\alpha_1 = (2 + \sqrt{1+m})/3, \text{ および } \alpha_2 = (2 - \sqrt{1+m})/3 \dots\dots\dots (36)$$

である。すなわち、 c は $m \geq -1$ に対して $\alpha_1(m)$ 曲線と $\alpha_2(m)$ 曲線とによつて囲まれた内部領域では正、外部

領域では負である。

d は $\alpha = -0.5$ を境界線として符号をかえ、急な逆勾配領域でのみ d が負となることは明らかである。

以上のようにして求めた a, b, c, d の符号と境界特性との関係を図示したものが図-6であり、図より明らかなように、 $\alpha - m$ 面が六つの領域にわけられる。また s_1 および s_2 も同時に決定されることは (13) および (14) 式から明らかであつて、図-6 に記入している。

(2) 遷移点のトポロジ的分類

遷移点が鞍形点や結節点といった滑かな積分曲線上の点となるか、あるいは渦状点となるかは、特性方程式 (10) の判別式の符号で決定される。

いま、この判別式は (35) 式を用いると、

$$D = -20 i_c^2 \left\{ \alpha^2 - 2\alpha + \frac{(11-4m)}{20} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

である。したがつて、

(a) $m \geq -2.25$ の場合には、(37) 式は

$$D = -20 i_c^2 (\alpha - \alpha_3)(\alpha - \alpha_4) \dots\dots\dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= 1 + \sqrt{(9+4m)/20} \\ \alpha_4 &= 1 - \sqrt{(9+4m)/20} \end{aligned} \right\}$$

と変形される。したがつて、(38) 式より、 $\alpha_3(m)$ 曲線と $\alpha_4(m)$ 曲線とで囲まれた内部領域では $D > 0$ であるから、特異点は鞍形点あるいは結節点となり、またこれら両曲線の外部領域では $D < 0$ であるから、渦状点となる。

(b) $m < -2.25$ の場合には、(37) 式は

$$D = -20 i_c^2 \left\{ (\alpha - 1)^2 - \frac{(4m+9)}{20} \right\} < 0 \dots\dots\dots (39)$$

と書きあらためられる。したがつて、 α の値のいかんにかかわらず、常に判別式が負であるから、特異点は渦状点である。

つぎに、遷移点が鞍形点であるか、あるいは結節点であるかは、特性方程式の二実根の符号にしたがうから、

$$5(\alpha - 1)^2 - m \leq 0 \dots\dots\dots (40)$$

によつて判別される。ここに上側および下側の不等号に対するものは、それぞれ鞍形点および結節点に対する条件をあらわしている。したがつて、

(c) $m \geq 0$ の場合には、(40) 式の2実根は $\alpha_5 = \sqrt{1+m/5}$ および $\alpha_6 = \sqrt{1-m/5}$ であるから、 $\alpha_5(m)$ 曲線と $\alpha_6(m)$ 曲線とによつて囲まれた内部領域では遷移点は鞍形点であり、また逆に外部領域では結節点である。

(d) $m < 0$ に対しては、(40) 式は α の値に無関係に正であるから、遷移点は結節点となる。

以上の考察から、遷移点における等流水深曲線と限界水深曲線との幾何学的な相対位置も明確に定められる。すなわち、 b は常に正であり、また d は $\alpha = -0.5$ を境界線として二つの領域にわけられるから、

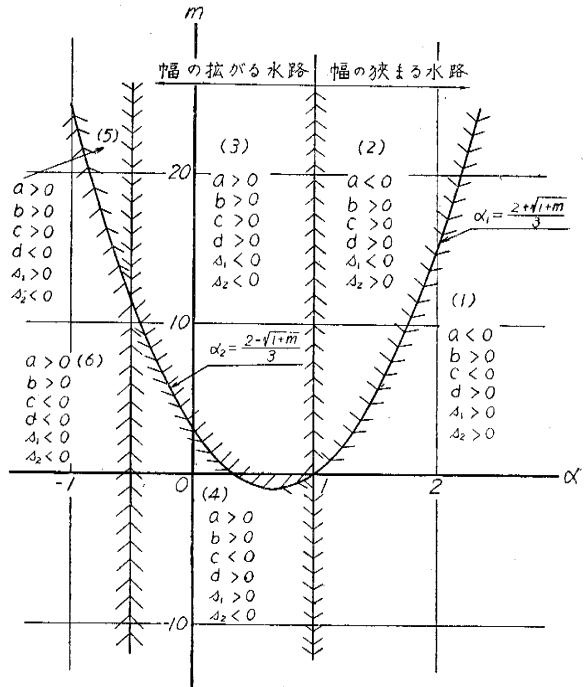
1. 急勾配、緩勾配および比較的緩やかな逆勾配水路 ($\alpha > -0.5$) においては、断面幅に関する境界特性には無関係に、遷移点が鞍形点であれば等流水深曲線が限界水深曲線を上側から下側へと通過し、また結節点あるいは渦状点であれば逆に下側から上側へと通過する。
2. 急な逆勾配水路 ($\alpha < -0.5$) においては、1. の場合とは全く逆に、遷移点が鞍形点であれば等流水深曲線は限界水深曲線を下側から上側へと通過し、また結節点あるいは渦状点であれば上側から下側へと通過する。

(3) 遷移点における遷移水面形曲線の水面勾配と遷移特性

前節までに水面形方程式 (34) の遷移点およびその近傍における幾何学的性質とその水理学的意義について考察

図-6 広矩形断面水路の Chézy の流れにおける a, b, c, d と境界特性との関係

Fig.6 Behaviour of Boundary Characteristics to a, b, c and d for Chézy Flows in Wide Rectangular Channels



したが、遷移点の遷移特性を明らかにするには、遷移水面曲線の水理学的特性を明確にしなければならない。

遷移点が鞍形点であれば、その点で遷移水面形曲線のもつ水面勾配は、(22) および (23) 式より

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_1} = \frac{(-4\alpha+1)+\sqrt{-20\{\alpha^2-2\alpha+(11-4m)/20\}}}{6} i_c \dots\dots\dots(41)$$

あるいは

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{c_2} = \frac{(4\alpha-1)+\sqrt{-20\{\alpha^2-2\alpha+(11-4m)/20\}}}{6} i_c \dots\dots\dots(42)$$

によつて与えられる。(41) および (42) 式は明らかに実数値であるが、これらの式の符号は前節の結果よりつぎのようにして決定される。まず、 $(dh/dx)_{c_1}$ について考察をすすめると、

(a) $a-d \geq 0$ 、すなわち $\alpha \leq 0.25$ の場合には、(41) 式の分子は常に正となるから、鞍形点の全領域で(41) 式は負の値となる。

(b) $\alpha > 0.25$ の場合には、(41) 式の分子が正となる領域は (36) 式で与えた $\alpha_1(m)$ 曲線と $\alpha_2(m)$ の曲線とで囲まれた内部領域であることがわかるから、逆にこの領域で遷移水面形曲線の水面勾配は負となり、またその外部領域で正となることがわかる。

したがつて、 $(dh/dx)_{c_2}$ の符号は (41) および (42) 式より $(dh/dx)_{c_1}$ と $(dh/dx)_{c_2}$ との積を作れば、 c の符号によることがわかり、 c の正領域ではこれら二曲線の水面勾配は異符号をもち、 c の負領域では同符号である。またこの二曲線の幾何学的位置は、前項の結果から明らかのように、 $(dh/dx)_{c_1}$ という水面勾配をもつた曲線がかならず $(dh/dx)_{c_2}$ をもつた曲線の上側より下側へと通過する。

遷移点が結節点であるときは、結節点に達する積分曲線はすべて同一の水面勾配をもち、これは (27) 式にて与えられるが、形式的には鞍形点における値 (41) 式と全く同一である。したがつて、その正負の判定も同様になされるが、 $\alpha = 0.25$ を境界線として、これより緩勾配あるいは逆勾配の水路では水面勾配は常に負であり、またこれより急勾配をもつ水路では正および負の領域があることがわらう。

遷移点における遷移特性を明らかにするには、遷移水面形曲線と限界水深曲線の幾何学的位置を考察することが必要である。すでに前節で解析したように、(41) 式で与えられる水面形曲線が遷移水面形曲線であれば、これら二曲線の遷移点における水面勾配の差は (28) 式で与えられ、 $b > 0$ 、 $S_1 < 0$ であることから、水流の状態は鞍形点によつて常に常流から射流へと遷移し、また (42) 式の水面勾配をもつものが遷移水面曲線であれば、射流から常流へと遷移する。このいずれのものがおこるかは、すでに述べた水理学的条件によつて決定するが、鞍形点を通過して遷移流が常に常流から射流へと遷移することは、後に示す図-9 から理解されよう。また $a+d=3$ であるから、遷移点が結節点であるときは、 S_1, S_2 はいずれも正である。したがつて、前節の結果を用いて、結節点を通る水流は常に射流から常流への遷移を示すことがわかる。

(4) 遷移点の近傍における水面形方程式の符号特性

(34) 式の分母は、すでに述べたように、限界水深曲線を境界線として、その上側の領域では正であり、逆に下側の領域では負である。

また、(34) 式の分子は、 $x = x_c$ という遷移点において、

$$\begin{aligned} f_1(x_c, h) &= g \sin \theta - \frac{g Q^2}{C_c^2 b_c^2 h^3} + \frac{\beta Q^2}{b_c^3 h^2} \left(\frac{db}{dx}\right)_c \\ &= \frac{g \sin \theta}{t^3} \left\{ t^3 + \frac{h_c}{b_c i} \left(\frac{db}{dx}\right)_c t - \frac{g}{\beta C_c^2 i} \right\} \\ &= \frac{g \sin \theta}{t^3} (t-1) \left(t^2 + t + \frac{1}{\alpha} \right), \text{ただし } \frac{h}{h_c} = t \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

と変形される。したがつて、(43) 式の数学的特性およびその符号については、つぎのように分類される。

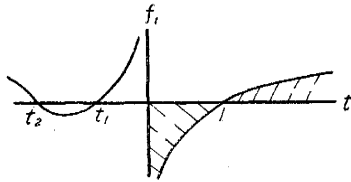
(a) $\alpha \geq 4$ というきわめて急勾配の水路では、(43) 式で示される $f_1(x_c, t) = 0$ は 1、 $t_1 = \{ \sqrt{1 - (4/\alpha)} - 1 \} / 2$ および $t_2 = -\{ \sqrt{1 - (4/\alpha)} + 1 \} / 2$ なる三つの実根をもち、その大きさは $1 > 0 \geq t_1 \geq t_2$ である。したがつて、 $f_1(x_c, t)$ と t との関係は 図-7 (1) に示すようになり、遷移点の近傍では、 $f_1(x_c, t)$ は $f_1(x, h)$ 曲線の上側の領域で正、下側の領域で負となる。

(b) $4 > \alpha > 0$ という急勾配水路では、(43) 式の右辺の括弧第 2 項は常に正となるから、 $f_1(x_c, t) = 0$ は $h = h_c$ という唯一の実根をもち、(a) の場合と同様の結論がえられる。

(c) 逆勾配水路では、(43) 式で示される $f_1(x_c, t) = 0$ はふたたび三つの実根をもっているが、勾配によつてその大きさが変わる。すなわち、 $0 > \alpha \geq -0.5$ という緩かな逆勾配水路では $t_1 \geq 1 > 0 > t_2$ となり、 $f_1(x_c, t)$ と

図-7(1) 急勾配水路 ($\alpha \geq 4$) における等流水深の符号特性

Fig.7(1) Mathematical Behaviour of Normal Depth Curve for Very Steep Slopes ($\alpha \geq 4$)



t との関係は遷移点の近傍では 図-7(2) のようになり, $f_1(x, h)$ 曲線より上側が正領域, 下側が負領域になる。これに反して, $\alpha < -0.5$ という急な逆勾配水路では $1 > t_1 > 0 > t_2$ となり, 図-7(3) に示すように $f_1(x, h)$ 曲線より上側が負領域, 下側が正領域になる。すなわち, $\alpha \geq -0.5$ の場合は遷移点の近傍では $f_1(x, h)$ 曲線を境界線として, 上側領域が正, 下側領域が負であり, 逆に $\alpha < -0.5$ の場合は上側領域が負, 下側領域が正であるということができる。

したがって, $f_1(x, h)$ 曲線と $f_2(x, h)$ 曲線の正負領域から, 水面形方程式 (34) の符号, すなわち水面勾配の正負は, つぎのようにして判別される。

1. $\alpha = -0.5$ を境界線としてそれより大きい α , すなわち緩かな逆勾配, 緩勾配および急勾配水路においては, $f_1(x, h)$ 曲線と $f_2(x, h)$ 曲線とによつて囲まれた内部領域では dh/dx は負となり, x の増加とともに水深が減少し, また逆に外部領域では dh/dx は正となり, x の増加とともに水深が増加する。
2. $\alpha < -0.5$ という急な逆勾配水路においては, 1. の場合とは逆に, dh/dx は $f_1(x, h)$ 曲線と $f_2(x, h)$ 曲線とで囲まれた内部領域で正となり, 外部領域で負となる。

(5) 遷移形式と遷移点の近傍における水面形状

以上の各項において考察した広矩形断面水路における Chézy の流れの遷移点およびその近傍におけるトポロジー的特性を総合すると, 遷移流の遷移形式および遷移点の近傍における水面形状を明らかにすることができる。図-8 は遷移流の遷移形式と境界特性との関係を, 遷移点のトポロジー的分類および等流水深, 限界水深, 遷移水面形曲線間の幾何学的な位置関係から分類したものであつて, これらの遷移形式を表示したのが 表-1 であり, 遷移点の近傍における水面形状を図示したのが 図-9(1)~(13) である。すなわち, 13 種類の遷移形式があり, 鞍形点および結節点によるものがそれぞれ 5 種類と渦状点にもものが 3 種類である。これらの各遷移形式について, 具体的に説明するとつぎのようである。

(i) $\alpha \geq 1, m \geq 0$ であり, かつ $\alpha_1(m)$ 曲線と $\alpha_5(m)$ 曲線とで囲まれた領域, すなわ

図-7(2) 緩かな逆勾配水路 ($0 > \alpha \geq -0.5$) における等流水深曲線の符号特性

Fig.7(2) Mathematical Behaviour of Normal Depth Curve for Mild Adverse Slopes ($0 > \alpha \geq -0.5$)

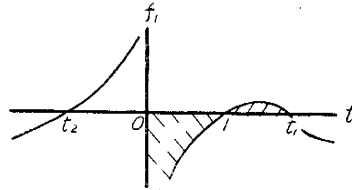


図-7(3) 急な逆勾配水路 ($\alpha < -0.5$) における等流水深曲線の符号特性

Fig.7(3) Mathematical Behaviour of Normal Depth Curve for Steep Adverse Slopes ($\alpha < -0.5$)

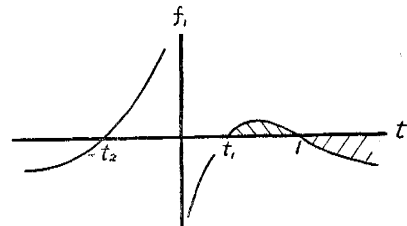


図-8 広矩形断面水路における Chézy の流れの境界特性と遷移特性との関係

Fig.8 Hydraulic Behaviour of Boundary Characteristics for Chézy Flows in Wide Rectangular Channels

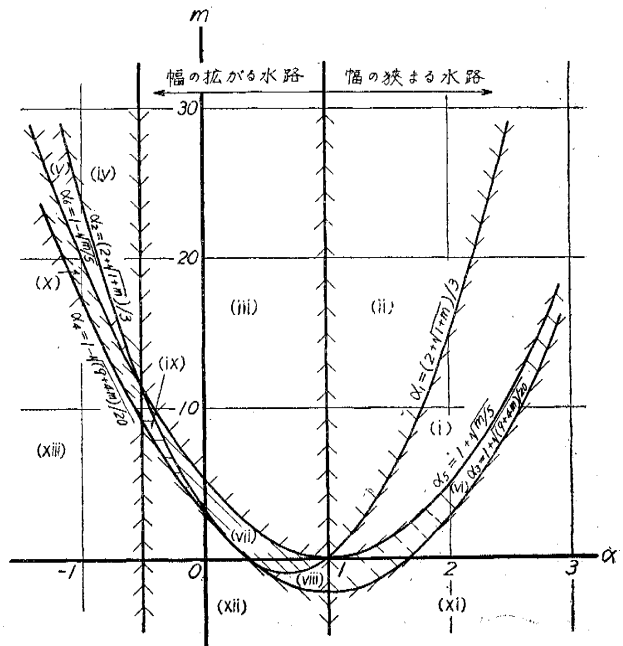


表-1 広矩形断面水路における Chézy の流れの遷移特性

Table 1 Transitional Characteristics of Chézy Flows in Wide Rectangular Channels

遷移特性 遷移の種類	遷移特性						$(\frac{dh}{dx})_{c1}$	$(\frac{dh}{dx})_{c2}$	遷移水面形 曲線の勾配	(dh/dx)		遷移形式	
	α	b	c	d	s_1	s_2				内部	外部	遷移点	流れの状態
(i)	-	+	-	+	+	+	+	+	$(dh/dx)_{c1}$	-	+	鞍形点	常流→射流
(ii)	-	+	+	+	-	+	+	+	"	-	+	"	"
(iii)	+	+	+	+	-	-	-	+	"	-	-	"	"
(iv)	+	+	+	-	+	-	-	+	"	+	+	"	"
(v)	+	+	-	-	-	-	-	-	"	+	-	"	"
(vi)	-	+	-	+	+	+	+	+	"	-	+	結節点	射流→常流
(vii)	+	+	+	+	-	-	-	-	"	-	+	"	"
(viii)	+	+	-	+	+	-	+	+	"	-	+	"	"
(ix)	+	+	-	+	+	-	-	-	"	-	+	"	"
(x)	+	+	-	-	-	-	-	-	"	+	-	"	"
(xi)	-	+	-	+	+	+	+	+	"	-	+	渦状点	"
(xii)	+	+	-	+	+	-	-	-	"	-	+	"	"
(xiii)	+	+	-	-	-	-	-	-	"	+	-	"	"

ち水路床が急勾配でかつ幅の狭まる水路にあらわれる遷移形式であり、流れの状態は常流から射流へと遷移する。遷移水面形、等流水深および限界水深の三つの曲線の水面勾配は、いずれも正である (図-9(1))。

(ii) $m \geq 0$ で、 $\alpha=1$ と $\alpha_1(m)$ 曲線とで囲まれた領域、すなわち (i) と同じ急勾配水路であるが、水路幅の狭まり方が急激な場合にあらわれる遷移形式である。流れは常流から射流へと遷移し、遷移水面形曲線の水面勾配は負である (図-9(2))。

(iii) $m \geq 0$ で、かつ $\alpha=1$, $\alpha=-0.5$ および $\alpha_2(m)$ 曲線とで囲まれた領域、すなわち緩勾配あるいは緩かな逆勾配であり、かつ幅の広がる水路にあらわれる遷移形式であつて、流れは常流から射流へと遷移する。(i) の場合とは逆に遷移水面形、等流水深および限界水深の三つの曲線の勾配は、いずれも負である (図-9(3))。

(iv) $m > 0$ で、かつ $\alpha=-0.5$ および $\alpha_2(m)$ 曲線とで囲まれた領域、すなわち逆勾配で幅の広がる水路にあらわれる遷移形式であつて、流れは常流より射流へと遷移し、遷移水面形曲線の水面勾配は負である。この場合、前の3種類の遷移に較べて、 $f_1(x, h) = 0$ と $f_2(x, h) = 0$ の幾何学的位置が逆になる (図-9(4))。

(v) $m > 0$, $\alpha < -0.5$ で、かつ $\alpha_2(m)$ 曲線と $\alpha_0(m)$ 曲線とで囲まれた領域、すなわち逆勾配であるが、(iv) に較べて水路幅の拡がり方が緩かな水路にあらわれる遷移形式であつて、その一般的性格は (iv) とよく似ているが、等流水深曲線の勾配も負になる (図-9(5))。

(vi) $m \geq -2.25$, $\alpha \geq 1$ で、かつ $\alpha_3(m)$ 曲線と $\alpha_0(m)$ 曲線とで囲まれた領域、すなわち幅の狭まる急勾配水路にあらわれる遷移形式であつて、遷移流は結節点を通して射流から常流へと遷移する (図-9(6))。

(vii) $\alpha_1(m)$ 曲線、 $\alpha_2(m)$ 曲線および $\alpha_0(m)$ 曲線によつて囲まれた領域、すなわち緩勾配あるいは緩かな逆勾配水路にあらわれる遷移形式であつて、(vi) の場合とは勾配が逆の符号をもっている (図-9(7))。

(viii) $\alpha=1$, $\alpha_1(m)$ 曲線、 $\alpha_2(m)$ 曲線および $\alpha_4(m)$ 曲線によつて囲まれた領域、すなわち緩勾配水路にあらわれる遷移形式であり、(vi) の場合とはほぼ同様な特性をもっている (図-9(8))。

(ix) $\alpha=-0.5$, $\alpha_2(m)$ 曲線および $\alpha_4(m)$ 曲線とで囲まれた領域、すなわち緩勾配あるいは緩かな逆勾配水路にあらわれるものであるが、(vii) の場合に較べて水路幅の拡がり方が緩かな場合である。(viii) の場合と境

図-9(1) 幅の狭まる水路における鞍形点による常流より射流への遷移
Fig.9(1) Transition from Subcritical to Supercritical through Saddle Point in Convergent Channels

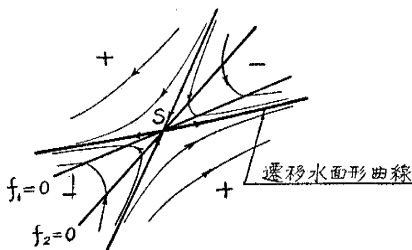


図-9(2) 幅の狭まる水路における鞍形点による常流より射流への遷移
Fig.9(2) Transition from Subcritical to Supercritical through Saddle Point in Convergent Channels

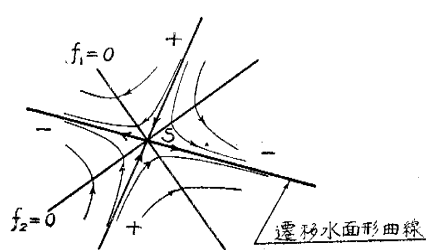


図-9(3) 幅の広がる水路における鞍形点による常流より射流への遷移

Fig.9(3) Transition from Subcritical to Supercritical through Saddle Point in Divergent Channels

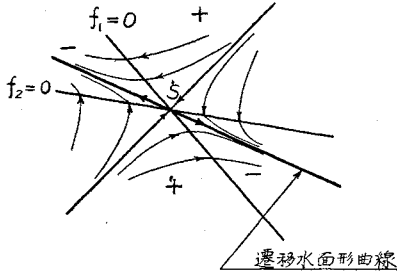


図-9(5) 急な逆勾配で幅の広がる水路における鞍形点による常流より射流への遷移

Fig.9(5) Transition from Subcritical to Supercritical through Saddle Point in Divergent Channels of Steep Adverse Slopes

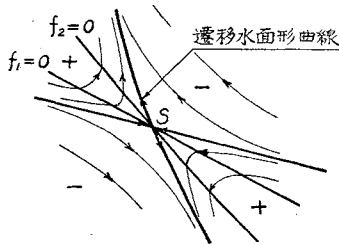


図-9(7) 幅の広がる水路における結節点による射流より常流への遷移

Fig.9(7) Transition from Supercritical to Subcritical through Nodal Point in Divergent Channels

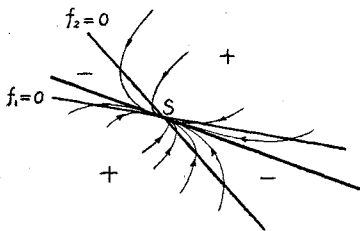


図-9(4) 急な逆勾配で幅の広がる水路における鞍形点による常流より射流への遷移

Fig.9(4) Transition from Subcritical to Supercritical through Saddle Point in Divergent Channels of Steep Adverse Slopes

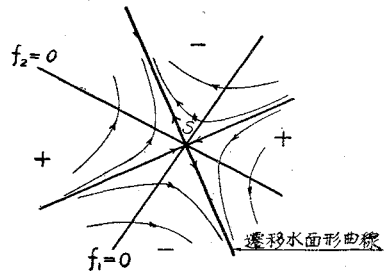


図-9(6) 幅の狭まる水路における結節点による射流より常流への遷移

Fig.9(6) Transition from Supercritical to Subcritical through Nodal Point in Convergent Channels

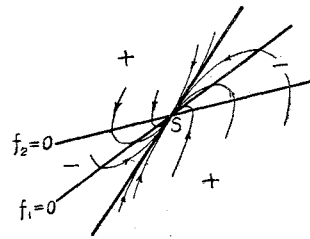
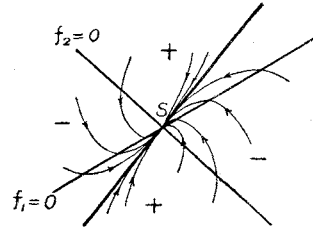


図-9(8) 幅の広がる水路における結節点による射流より常流への遷移

Fig.9(8) Transition from Supercritical to Subcritical through Nodal Point in Divergent Channels



界特性などは全く同じであるが、結節点における水面勾配が (viii) の場合は正であるのに対し、この場合は負である (図-9(9))。

(x) $\alpha = -0.5$, $\alpha_s(m)$ 曲線および $\alpha_c(m)$ 曲線とで囲まれた領域, すなわち急な逆勾配水路にあらわれる遷移形式であつて、一般的な特性は (ix) に似ている (図-9(10))。

(xi) $\alpha \geq 1$ であつ $\alpha_s(m)$ 曲線より下側の領域, すなわち幅の狭まる急勾配水路にあらわれる渦状点による遷移形式である。したがつて、水流は局所的跳水によつて遷移するが、等流水深曲線は限界水深曲線の下側から上側へと通過する (図-9(11))。

(xii) $1 \geq \alpha \geq -0.5$ および $\alpha_s(m)$ 曲線で囲まれた領域, すなわち緩勾配あるいは緩かな逆勾配水路にあらわれる遷移形式で、(xi) と似た特性をもっている (図-9(12))。

(xiii) $\alpha \leq -0.5$ であつ $\alpha_1(m)$ 曲線より下側の領域, すなわち急な逆勾配水路にあらわれるものである。(図-9(13))。

図-9(9) 幅の拡がる水路における結節点による射流より常流への遷移

Fig.9(9) Transition from Supercritical to Subcritical through Nodal Point in Divergent Channels

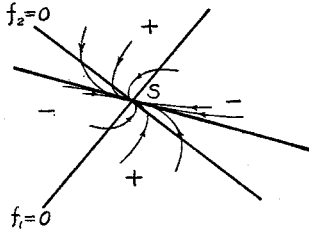


図-9(10) 急な逆勾配で幅の拡がる水路における結節点による射流より常流への遷移

Fig.9(10) Transition from Supercritical to Subcritical through Nodal Point in Divergent Channels of Steep Adverse Slope

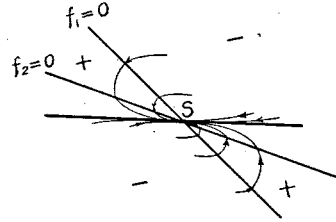


図-9(11) 幅の狭まる水路における渦状点の遷移特性

Fig.9(11) Transitional Behaviour of Focal Point in Convergent Channels

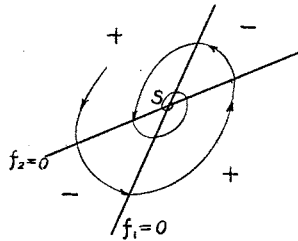
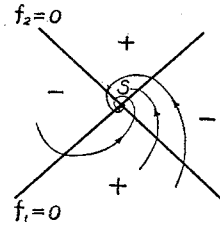


図-9(12) 幅の拡がる水路における渦状点の遷移特性

Fig.9(12) Transitional Behaviour of Focal Point in Divergent Channels

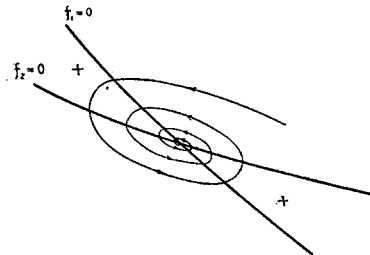


これらの図より明らかなように、遷移点における遷移形式には、境界特性によつて異なる多くのものがあり、本間博士の分類のように簡単なものではないことがみられよう。図中の矢印は積分の方向を示すものであり、鞍形点は水面形追跡の出発点、また結節点は終点となることがわかる。また一方、鞍形点は常流より射流へ、結節点は射流より常流への遷移点であることも明らかである。

図-8 は遷移形式の分類を一般的に図示したものであるから、実際の遷移水路にどのような遷移点があられ、また水流はどのように遷移するかについては理解されにくいものがある。いま一例として、水路幅が一定であつ緩勾配の水路に遷移部が接続し、その遷移部の幅が次第に拡がり、かつ d^2b/dx^2 が正であるとする。このような水路に一定の流量の水を流せば、一樣断面で水流は常流である。遷移部に入った遷移流では、幅の拡がりにしたがつて h_c を減少する。したがつて、移点があられるものとする、まず鞍形点があられ、ついで結節点があられる。しかしながら d^2b/dx^2 が正であるから、この場合は m が負になることはありえない。すなわち、遷移点は鞍形点、結節点という順序であられるが、この場合最大 2 コの特異点があられるだけである。したがつて、遷移形式は 図-9(3) および 図-9(7) という順序であられることになり、水面形状も決定される。このような水面形状については、改めて 第 8 節 において考察を加える。

図-9(13) 急な逆勾配で幅の拡がる水路における渦状点の遷移特性

Fig.9(13) Transitional Behaviour of Focal Point in Divergent Channels of Steep Adverse Slopes



6. 一般矩形断面水路における Chézy の流れの遷移特性

前節において考察をすすめた広矩形断面水路における Chézy の流れの遷移特性および遷移点の近傍での水面形

状は、Bresse の方程式のあらゆる水理学的特性をさらに一般化してえられたものであると考えられるが、実際の水路ではその断面幅が十分に広いとみなされないから、Chézy の流れの遷移特性も前節でえられた結果と異なった特性を示すことが予想される。したがって、このような一般矩形断面における遷移特性は実用上の問題と密接な関係を持ち、前節と同じように解析をすすめるとその特性が明らかにされるが、これらの結果を要約して示すところのようにあらわされる。

(1) a, b, c, d の特性

遷移点における水面形の変動量方程式の係数は、(9) 式において Chézy の係数を一定とすると、それぞれつぎのようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} a &= -2i_c(\alpha-1)\{\beta-2(\alpha-1)\}, \\ b &= 3\{\beta-2(\alpha-1)\}, \\ c &= i_c^2[(\alpha-1)\{6\alpha(\alpha-1)-\beta(3\alpha-1)\}+(m/3)\{\beta-2(\alpha-1)\}], \\ d &= i_c\{\beta(2\alpha+1)-4\alpha(\alpha-1)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

この場合には、広矩形断面の場合と異なつて、 α, β, m が a, b, c, d に関係をもっているから、平面座標軸系で係数の特性をあらわすためには、一つのパラメーターが必要である。いま、 m をこのパラメーターとして、 $\alpha-\beta$ 面で遷移特性を明らかにする。

すでに第4節で述べたように、遷移流に遷移点があられる限り、 a は境界特性の全領域で正であり、また b は水路が拡がるときには正、狭まるときは負の符号をもっている。さらに d は (44) 式から

$$d = i_c(2\alpha+1)\{\beta-4\alpha(\alpha-1)/(2\alpha+1)\} \dots\dots\dots (44)'$$

と書き改められ、 $\alpha = -0.5$ を境界線として、 $\alpha \geq -0.5$ に対してそれぞれ $\beta = 4\alpha(\alpha-1)/(2\alpha+1)$ の上側および下側が d の正領域である。この関係と $\alpha \geq 1$ に対応して $\beta \leq 0$ でなければならないという遷移点の存在条件とから、 d の正負領域が決定されるのであつて、急勾配水路では常に負、緩勾配あるいは緩かな逆勾配水路*では正、急な逆勾配水路では一般に負となる。

以上に述べた a, b, d に対し、 c は α, β のみでなく m にも関係するから、その符号特性は複雑になる。いま (44) 式の c を書き改めると、

$$c = -3i_c^2 \left\{ \left(\alpha - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1+m}{9} \right\} \left[\beta - \frac{2(\alpha-1)\{(\alpha-1/2)^2 - (9+4m)/36\}}{(\alpha-2/3)^2 - (1+m)/9} \right] \dots\dots\dots (44)''$$

となり、その符号特性はつぎのように分類される。

(a) $m \leq -2.25$ の場合には、 $M = (\alpha-2/3)^2 - (1+m)/9 > 0$ 、 $N = (\alpha-1/2)^2 - (9+4m)/36 \geq 0$ であつて、 c は $\beta = (2N/M) \times (\alpha-1)$ 曲線の上側で負、下側で正となる。ところが $2N/M$ は負になりえないし、また $\beta = (2N/M)(\alpha-1)$ 曲線はかならず $\alpha=1$ を通るから、結局 c は常に幅の拡がる水路では負、

図-11 Chézy の流れにおける c の符号特性と境界特性との関係 ($-1 > m > -2.25$)

Fig.11 Behaviour of Boundary Characteristics to Signs of c in Chézy Flows ($-1 > m > -2.25$)

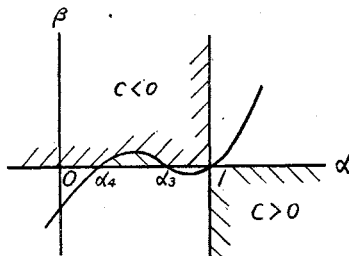
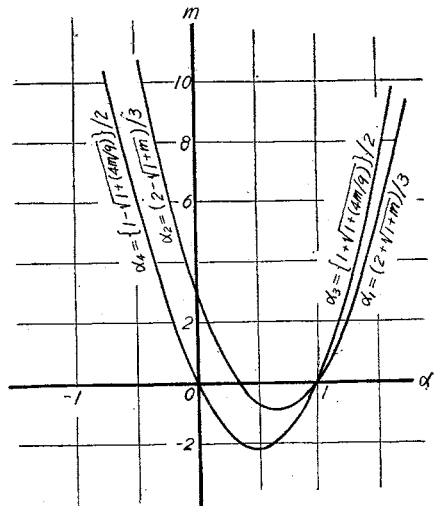


図-10 c の符号特性に関する α と m との関係

Fig.10 Relation between α and m for Determination of Signs of c



* ここでいう緩かな逆勾配とは $0 > \alpha > -0.5$ であり、かつ β が正で大きい場合である。また逆勾配は $\alpha < 0$ を意味するが、 $0 > \alpha > -0.5$ の場合でも β が正で小さいときは急な逆勾配として取り扱う。これは前者の遷移特性が緩勾配水路におけるものと同様になり、後者のそれが急な逆勾配水路におけるものと同様になるからである。

狭まる水路では正となる。

(b) $-1 > m > -2.25$ の場合には, (44)'' 式は

$$c = -3 i_c^2 M \left\{ \beta - 2(\alpha - 1)(\alpha - \alpha_3)(\alpha - \alpha_4) / M \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } \alpha_3 &= \{1 + \sqrt{1 + (4m/9)}\} / 2, \quad \alpha_4 = \{1 - \sqrt{1 + (4m/9)}\} / 2 \end{aligned} \right\}$$

と変形される。この範囲の m 値に対しては, 図-10 に示すように $1 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$ であつて, 上式の性質を α - β 面で図示すると 図-11 のようになる。したがつて, c は急勾配水路では正, 緩勾配水路では一般に負であるが, β の小さい一部領域では正となり, 逆勾配水路では負である。

(c) $0 > m \geq -1$ の場合には, (44)'' 式は

$$c = -3 i_c^2 (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \left\{ \beta - 2(\alpha - 1)(\alpha - \alpha_3)(\alpha - \alpha_4) / (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \right\}$$

$$\left. \text{ただし } \alpha_1 = (2 + \sqrt{1 + m}) / 3, \quad \alpha_2 = (2 - \sqrt{1 + m}) / 3 \right\}$$

と変形される。この範囲の m の値に対しては, 図-10 に示すように $1 > \alpha_3 > \alpha_1 \geq \alpha_2 > \alpha_4 > 0$ であつて, c の符号特性は 図-12 のようになる。すなわち, $\alpha > \alpha_1$ および $\alpha < \alpha_2$ では, c は $\beta = 2(\alpha - 1)(\alpha - \alpha_3)(\alpha - \alpha_4) / (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)$ 曲線より上側で負となり, $\alpha_1 > \alpha > \alpha_2$ では逆に下側で負となるから, 緩勾配水路で c が正となる領域が (b) の場合に較べていちじるしく増加する。

(d) $m \geq 0$ となつて加速的に幅が変化する場合には, c の表示は (c) の場合と同様であるが, 図-10 からわかるように $\alpha_1 > \alpha_3 \geq 1 > \alpha_2 > \alpha_4$ となる。したがつて, c の正負の領域は 図-13 のようになり, どのような勾配

図-12 Chézy の流れにおける c の符号特性と境界特性との関係 ($0 > m \geq -1$)

Fig.12 Behaviour of Boundary Characteristics to Signs of c in Chézy Flows ($0 > m \geq -1$)

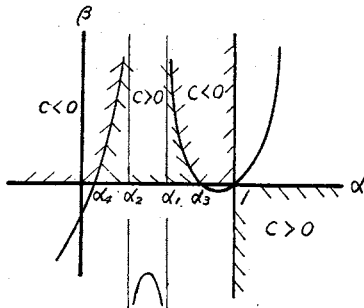


図-13 Chézy の流れにおける c の符号特性と境界特性との関係 ($m \geq 0$)

Fig.13 Behaviour of Boundary Characteristics to Signs of c in Chézy Flows ($m \geq 0$)

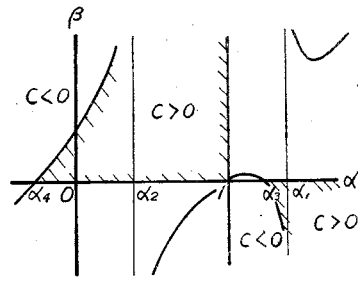
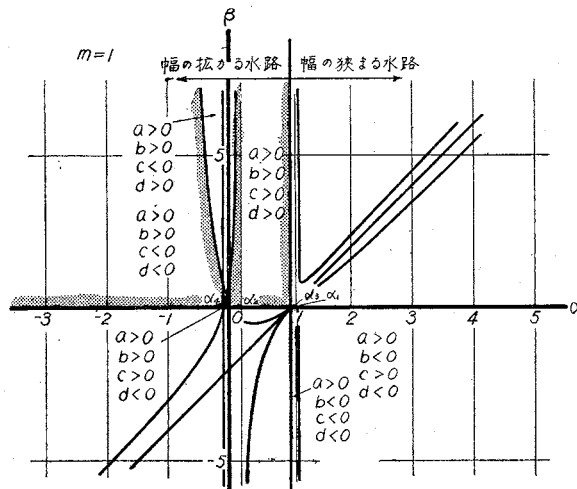
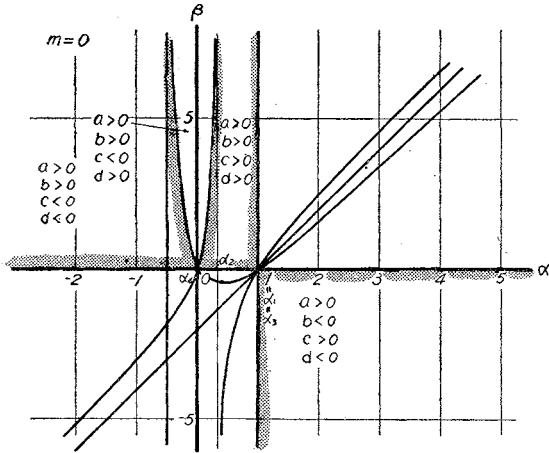


図-14 一般矩形断面水路における Chézy の流れの a, b, c, d と境界特性との関係
Fig.14 Behaviour of Boundary Characteristics to a, b, c and d for Chézy Flows in Rectangular Channels

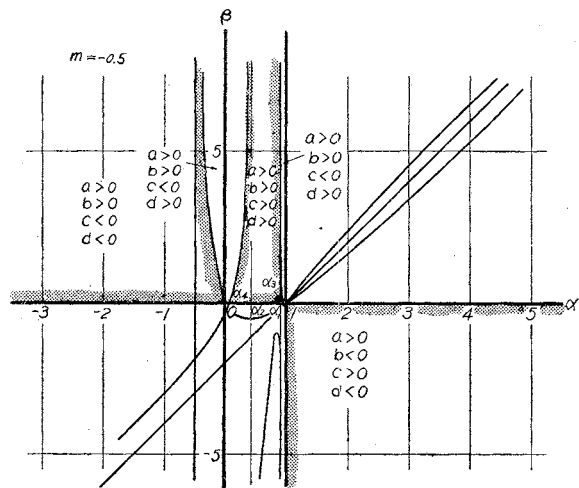
(i) $m = 1$



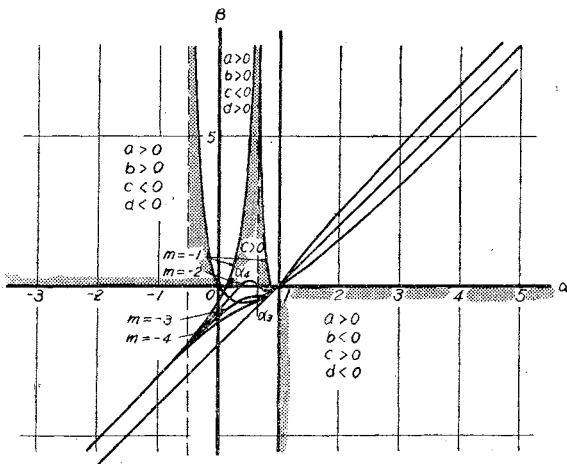
(ii) $m=0$



(iii) $m=-0.5$



(iv) $m \leq 1$

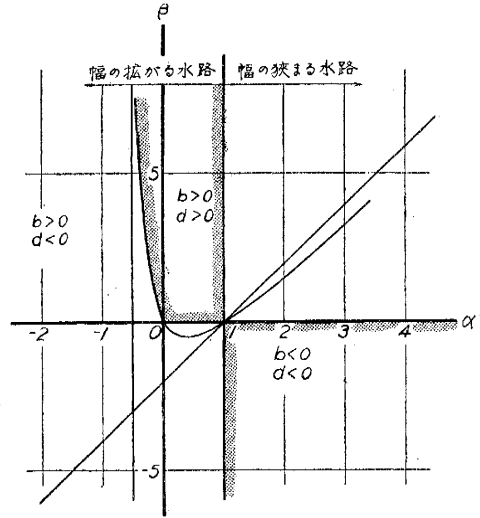


でも c に正負の領域があらわれるが、とくに $m > 3.0$ となると $\alpha_2 < 0$ となるから、緩勾配水路では c は常に正となる。

以上のようにして、 a, b, c, d の符号特性が決定されるが、 m の種々の値に対するこれらの係数の符号特性を α - β 面で示すと 図-14 のとおりである。したがって、(13) および (14) 式から遷移点における等流水深曲線および限界水深曲線のもつ勾配 s_1 および s_2 が求められるが、とくに s_2 は m に無関係に一義的な符号特性をもち、急勾配水路では正、緩勾配および逆勾配水路では負である。

遷移点における等流水深曲線と限界水深曲線との幾何学的な相対位置は、 $(ad-bc)$ および bd によつて決定されるが、 $(ad-bc)$ は遷移点のトポロジーの分類に関するものであるから、 bd の符号が問題となる。この bd の正負領域を示した 図-15 からわかるように、急勾配、緩勾配および緩かな逆勾配の水路では $bd > 0$ であるから、遷移点が鞍形点であれば等流水深曲線は限界水深曲線の上側から下側へと通過し、また結節点あるいは渦状点であれば逆に下側から上側へと通過する。急な逆勾配水路では $bd < 0$ となるから、上に述べた場合と全く逆になるはずである。

図-15 bd の符号特性と境界特性との関係
Fig.15 Behaviour of Boundary Characteristics to Signs of bd



(2) 遷移点のトポロジー的分类

遷移点のトポロジー的分类は、変動量方程式 (8) の特性方程式の根の性質による。まず、遷移点が鞍形点および結節点であるか、あるいは渦状点であるかは、境界特性であらわした特性方程式の根の判別式の正負、すなわちつぎの (45) 式によつて決定される。

$$D = -20 i_c^2 \left\{ (\alpha - 1)^2 - \frac{9 + 4m}{20} \right\} \left\{ \left[\beta - \frac{(\alpha - 1)(10\alpha^2 - 15\alpha + 2 - 2m)}{5\{(\alpha - 1)^2 - (9 + 4m)/20\}} \right]^2 - \frac{24(\alpha - 1)^2 \{ \alpha - (3 + \sqrt{1 + 8m/15})/4 \} \{ \alpha - (3 - \sqrt{1 + 8m/15})/4 \}}{\{(\alpha - 1)^2 - (9 + 4m)/20\}} \right\} \geq 0 \dots (45)$$

いま、 $\alpha_1 = 1 + \sqrt{(9 + 4m)/20}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{(9 + 4m)/20}$,
 $\alpha_3 = (3 + \sqrt{1 + 8m/15})/4$, $\alpha_4 = (3 - \sqrt{1 + 8m/15})/4$,

$$\beta_1 = \frac{\alpha - 1}{5\{(\alpha - 1)^2 - (9 + 4m)/20\}} \left[(10\alpha^2 - 15\alpha + 2 - 2m) \pm \sqrt{30 \left\{ \left(\alpha - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{15 + 8m}{240} \right\}} \right]$$

$$= \frac{\alpha - 1}{5(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)} \{ 10\alpha^2 - 15\alpha + 2 - 2m \} \pm \sqrt{30(\alpha - \alpha_3)(\alpha - \alpha_4)}$$

として、(45) 式から遷移点を分類するおつぎのようである。

(a) $m < -2.25$ では、 $\beta_1(\alpha, m)$ 曲線と $\beta_2(\alpha, m)$ 曲線とで囲まれた内部領域では $D > 0$ で鞍形点・結節点となり、外部領域では $D < 0$ で渦状点となる。

(b) $-1.875 > m \geq -2.25$ の範囲の m に対しては、 $\alpha > \alpha_1$ および $\alpha < \alpha_2$ では (a) と同様になるが、 $\alpha_1 > \alpha_2$ では逆に β_1 曲線と β_2 曲線とで囲まれた外部領域で $D > 0$ 、内部領域で $D < 0$ となる。

(c) $m \geq -1.875$ の場合には、 α の値によつて β の符号特性が変化し、図-16 に示すように常に $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_2$ であるから、 $\alpha \geq \alpha_1$ および $\alpha \leq \alpha_2$ では β_1 曲線と β_2 曲線とで囲まれた内部領域で $D > 0$ となり、また $\alpha > \alpha_3 > \alpha_4$ および $\alpha_1 > \alpha > \alpha_2$ では、逆にこれら両曲線の外部領域で $D > 0$ となる。ところが $\alpha_3 \geq \alpha_4$ では、 β の範囲に無関係に常に $D > 0$ となる。

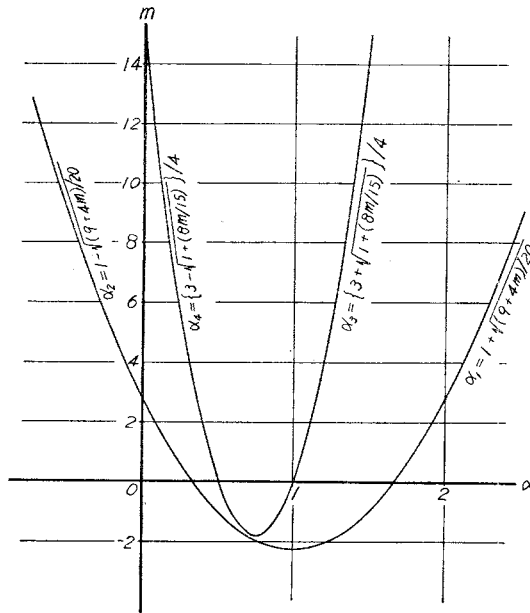
つぎに、鞍形点と結節点との区別は、特性方程式の二つの実根の符号によるから、

$$5 i_c^2 \left\{ (\alpha - 1)^2 - \frac{m}{5} \right\} \left\{ \beta - 2(\alpha - 1) \right\} \left\{ \beta - \frac{2(\alpha - 1)(\alpha^2 - \alpha - m/5)}{(\alpha - 1)^2 - m/5} \right\} \geq 0 \dots (46)$$

によつてあらわされる。ここに上下の不等号はそれぞれ結節点および鞍形点に対する条件を与えるから、

1. $m \geq 0$ の場合には、 $\alpha > (1 + \sqrt{m/5})$ および $\alpha < (1 - \sqrt{m/5})$ の範囲の α に対して、 $\beta = 2(\alpha - 1)$ 曲線と

図-16 特異点の分類に関する α と m との関係
 Fig.16 Relation between α and m for Classification of Singularity



$\beta = 2(\alpha - 1)(\alpha^2 - \alpha - m/5) / \{\alpha - (1 + \sqrt{m/5})\} \{\alpha - (1 - \sqrt{m/5})\}$ 曲線で囲まれた内部領域で遷移点は鞍形点となり、外部領域で結節点となる。

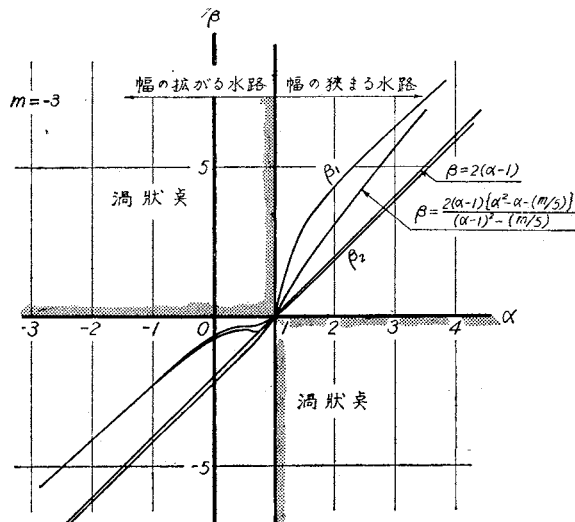
2. $m < 0$ の場合には、 β に関する上の両曲線の内部領域で鞍形点、外部領域で結節点となる。

このようにして、境界特性によつて遷移点を分類することができるが、図-17 は種々の m の値に対する遷移点の分類を示したものである。

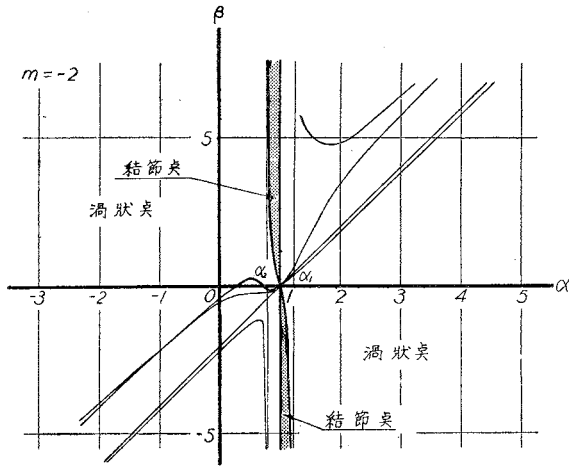
図-17 一般矩形断面水路における Chézy の流れの
 境界特性と遷移特性との関係

Fig.17 Hydraulic Behaviour of Boundary Characteristics to Transitional Characteristics for Chézy Flows in Rectangular Channels

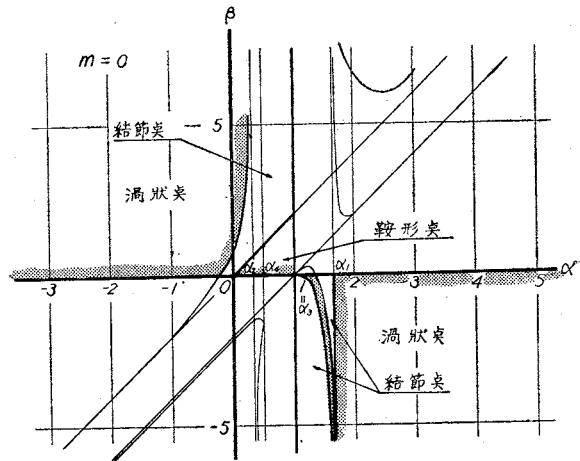
(i) $m = -3$



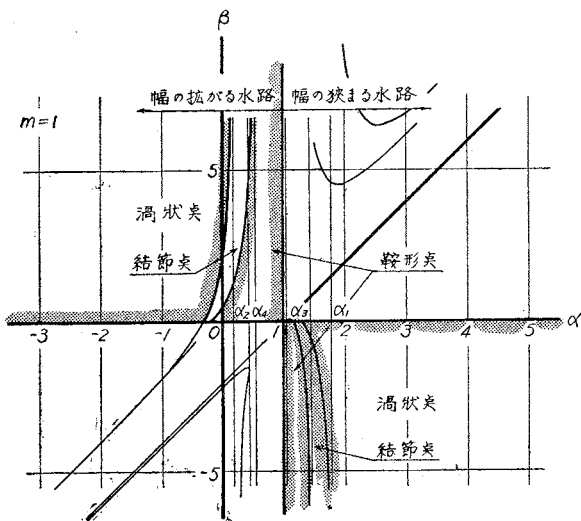
(ii) $m = -2$



(iii) $m = 0$



(iv) $m = 1$



(3) 遷移特性の一般的性質

鞍形点における遷移流の水面勾配は (20) あるいは (21) 式によつて与えられるが、その符号特性と境界特性との関係は、つぎのように要約される。

(a) 急勾配水路では $(dh/dx)_{c_1}$ は正であり、 $(dh/dx)_{c_2}$ は c の正負に対応して正負の符号をとる。

(b) 緩勾配水路では、一般に $c > 0$ の場合には、 $(dh/dx)_{c_1} < 0$ 、 $(dh/dx)_{c_2} > 0$ であり、 $c < 0$ の場合には、これらはいずれも正の符号をもっている。

(c) 緩かな緩勾配および逆勾配水路では $(dh/dx)_{c_1}$ は負であり、 $(dh/dx)_{c_2}$ の符号は c の符号と対応している。

鞍形点におけるこれらの二つの勾配のうち、いずれが遷移水面形曲線の水面勾配であるかは、前節と同じように水理学的条件によつて決定されるが、図-18 はこれらの水面勾配の符号特性と境界特性との関係をあらわしている。遷移点が結節点であれば、その点における水面勾配は $(dh/dx)_{c_1}$ として一義的に決定されるが、 $(a+d)$ と b との符号から、流れは常に結節点によつて射流から常流へと遷移することがわかる。

(4) 遷移点の近傍における水面形方程式の符号特性

限界水深曲線の上側領域で水面形方程式の分母が正となることは明らかであるが、問題は分子の正負領域の決定である。(2) 式の分子は、すでに述べた方法によつて、

$$f_1(x_c, h) = \frac{g \sin \theta}{t^3} (t-1) \times \left[t^2 + t + \frac{\beta}{\alpha\{\beta - 2(\alpha-1)\}} \right],$$

ただし $t = \frac{h}{h_c}$

とあらわされる。 $f_1(x_c, h) = 0$ は上式の右辺第二括弧項の特性により、 $t=1$ 、 t_1 および t_2 ($t_1 > t_2$) という3実根かまたは $t=1$ という1実根と2共軛根をもっているが、その詳細を α - β 面で図示すると図-19 のようになる。すなわち、 $f_1(x_c, h)$ は遷移点水深より上側で逆勾配以外の水路では正となり、また逆勾配水路では負となる。

(5) 鞍形点および結節点の近傍における水面形状と遷移水面形曲線

広矩形断面の場合と異なつて、 c の特性は α, β, m によるから一義的には決定されないが、以上に考察した結果を考慮すれば、つぎのような遷移特性と水面形状をもっていることがわかる。すなわち、鞍形点に対するものを表-2 および 図-20 に示し、また結節点に対するものを表-3 および 図-21 にあらわしており、鞍形点によつて遷移流は常流より射流へ、また結節点によつて射流より常流へと遷移することになる。

図-18 鞍形点における境界特性と水面勾配の符号との関係

Fig.18 Relation between Boundary Characteristics and Signs of Slope of Water Surface at Saddle Point

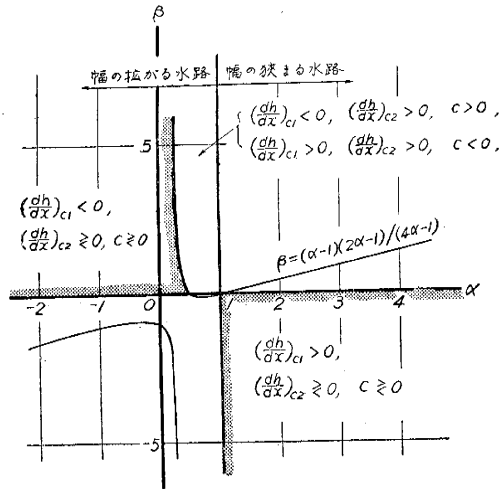
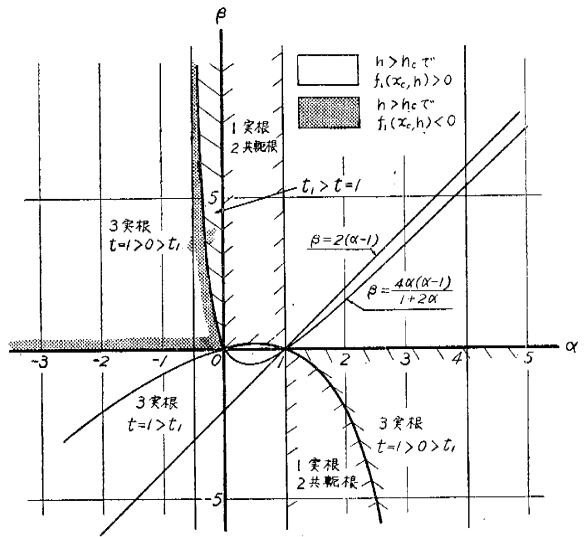


図-19 遷移点における境界特性と等流水深曲線との関係

Fig.19 Relation of Boundary Characteristics to Curve of Normal Flow at Transition



(5) 鞍形点および結節点の近傍における水面形状と遷移水面形曲線

広矩形断面の場合と異なつて、 c の特性は α, β, m によるから一義的には決定されないが、以上に考察した結果を考慮すれば、つぎのような遷移特性と水面形状をもっていることがわかる。すなわち、鞍形点に対するものを表-2 および 図-20 に示し、また結節点に対するものを表-3 および 図-21 にあらわしており、鞍形点によつて遷移流は常流より射流へ、また結節点によつて射流より常流へと遷移することになる。

図-20 鞍形点の近傍における Chézy の流れの水面形状
 Fig.20 Water Surface Profiles of Chézy Flows near Saddle Points

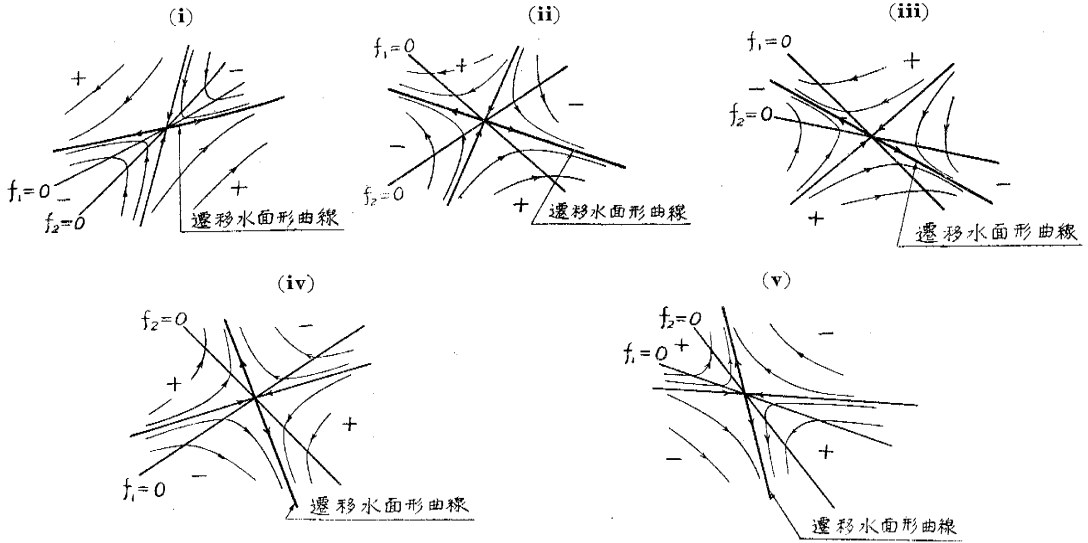
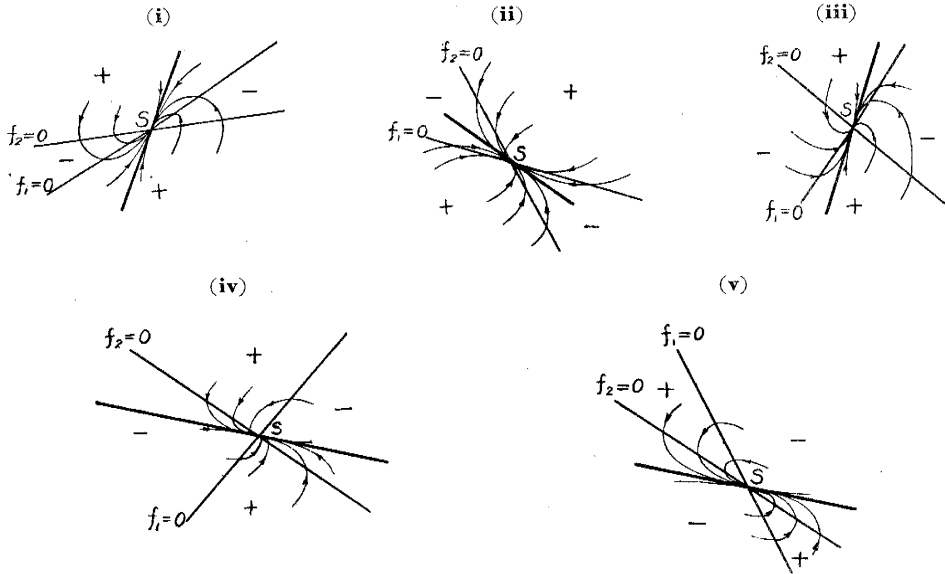


図-21 結節点の近傍における Chézy の流れの水面形状
 Fig.22 Water Surface Profiles of Chézy Flows near Nodal Points



7. 一般矩形断面水路における Manning の流れの遷移特性

水工学の実用問題では、開水路水 flow の抵抗法則として、Chézy の式よりもむしろ Manning の式が用いられることが多い。したがってここでは、Manning の流れに対する遷移特性と境界特性との関係を要約しよう。

Chézy の係数 C と Manning の粗度係数との間には、 $C = (R^{1/6}/n)$ という関係があるから、

$$\frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c = \frac{h_c}{C_c} \left(\frac{\partial C}{\partial R} \right)_c \left(\frac{\partial R}{\partial h} \right)_c = \frac{\beta}{6\{\beta - 2(\alpha - 1)\}} \dots \dots \dots (47)$$

となる。したがって、(9) 式における係数 a, b, c, d は Chézy の流れに較べて少々変化するのみであつて、これらはそれぞれ、

表-2 一般矩形水路における鞍形点による Chézy の流れの遷移特性
Table 2 Transitional Behaviour of Chézy Flows at Saddle Points in Rectangular Channels

水路特性	遷移特性		a	b	c	d	s ₁	s ₂	(dh/dx) _{c1}	(dh/dx) _{c2}	(dh/dx)		遷移形式	備考
	内部	外部												
急勾配	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	-	+	図-20(i)	
	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	+	" (ii)	
緩勾配および緩かな逆勾配	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	" (iii)	ad-bc<0
	+	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-		
	+	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-		
逆勾配	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	図-20(iv)	
	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	" (v)	

表-3 一般矩形水路における結節点による Chézy の流れの遷移特性
Table 3 Transitional Behaviour of Chézy Flows at Nodal Points in Rectangular Channels

水路特性	遷移特性		a	b	c	d	s ₁	s ₂	(dh/dx) _{c1}	(dh/dx)		遷移形式	備考
	内部	外部											
急勾配	+	-	+	-	+	+	+	+	+	-	+	図-21(i)	S ₁ <0 ad-bc>0
	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-		
緩勾配および緩かな逆勾配	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	図-21(ii)	S ₁ >0
	+	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	" (iii)	"
	+	+	-	+	+	-	-	-	-	-	+	" (iv)	"
逆勾配	+	+	+	-	+	-	-	-	-	+	-	図-21(v)	ad-bc>0 S ₁ >0
	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-		

$$\left. \begin{aligned}
 a &= -2i_c(\alpha-1)\{\beta-2(\alpha-1)\}, \\
 b &= 3\{\beta-2(\alpha-1)\}, \\
 c &= i_c^2[(\alpha-1)\{6\alpha(\alpha-1)-\beta(3\alpha-1)\} + (m/3)\{3-2(\alpha-1)\}], \\
 d &= i_c\{\beta(2\alpha+4/3)-4\alpha(\alpha-1)\}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

となる。すなわち、Chézy の流れに較べて、dのみが変化する。したがって、d に関係する要素が若干変わる事がわかり、d の符号が Chézy の流れでは $\alpha = -0.5$ で変わったのに対し、Manning の流れでは $\alpha = -0.667$ で変わる。

遷移点の水理学的特性およびそれともなう水面形状の解析も、前節で取り扱ったように行えば明らかにされるが、Manning の流れにおける特性方程式の判別式は、つぎのように書くことができる。

$$D = -\frac{i_c^2}{9}(45\alpha^2 - 96\alpha + 26 - 9m) \left\{ \beta^2 - \frac{6(\alpha-1)(30\alpha^2 - 47\alpha + 7 - 6m)\beta}{(45\alpha^2 - 96\alpha + 26 - 9m)} + \frac{36(\alpha-1)^2(5\alpha^2 - 5\alpha - 1 - m)}{(45\alpha^2 - 96\alpha + 26 - 9m)} \right\} \geq 0, \dots\dots\dots (49)$$

ここに、上下の不等号はそれぞれ鞍形点結節点・あるいは渦状点に対する条件をあらわしている。また、

$$5 \left\{ \left(\alpha - \frac{16}{15} \right)^2 - \frac{1+45m}{225} \right\} \{ \beta - 2(\alpha-1) \} \left[\beta - \frac{2(\alpha-1)\{5\alpha(\alpha-1) - m\}}{5\{(\alpha-16/15)^2 - (1+45m)/225\}} \right] \geq 0 \dots\dots\dots (50)$$

において、上下の不等号はそれぞれ結節点および鞍形点に対する条件である。

一般矩形水路における Chézy および Manning の流れに対する遷移特性と境界特性との関連性については、その概略を述べるにとどまったが、その詳細は別の機会に明らかにしたいと考えている。

8. 遷移水路における水面形状と水面追跡法

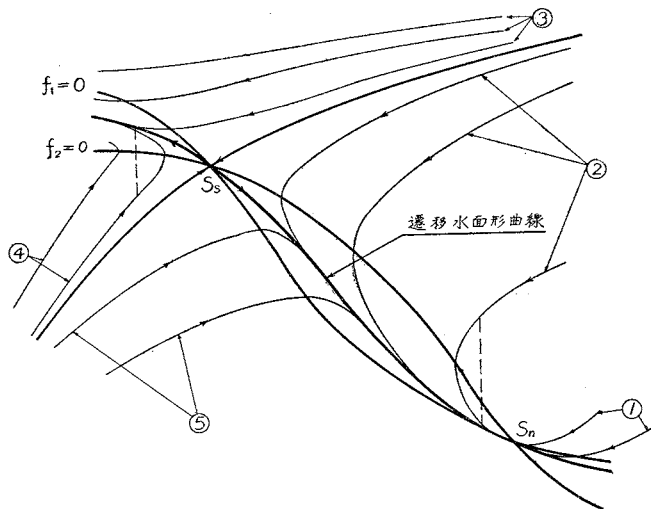
一定の計画流量が安全に流下するように水路や河道などを設計するには、あらかじめ与えられた境界特性にしたがつて、水面形状を正しく追跡しなければならない。この場合、水流が漸変流である限り、水面形方程式 (2) を一定の境界条件のもとで積分すればよい。このような実用的な目的から、その解析的および図式的解法について、従来より多くの研究がすすめられてきた。なかでも、Bresse, Tolkmitt, 物部博士、あるいは Chow²⁾ の研究には、解析的な数表が作製されているから、実際の背水計算にはきわめて好都合である。

しかしながら、これらの研究はいずれも一様な断面形状をもつた水路におけるいわゆる堰上背水曲線および低下背水曲線に関するものである。こうした場合には、ここで取り扱っている遷移点はあらわれないが、実際的水路や河川では、断面形状、水路粗度および河床勾配などの境界特性が場所的に複雑な変化を示すから、水面形状もこれら境界特性の変化にともなう遷移現象に支配され、水流は遷移流であつて、従来のすぐれた研究もそのまま使用できないことが多い。したがつて、実際的水工計算における計算法としては、水面形方程式 (2) を数値積分する方法がとられている。河川下流部 (河口付近を除いて) のように境界特性が比較的一定と考えられる場合には、水流に遷移点があらわれないから、数値積分法によつて得られた結果も実際の水面形状に近いものを与えるであろう。しかしながら、河床勾配が限界勾配に近く、また水路断面形も複雑な変化を示すようなところでは、水流に遷移点があらわれることが予想される。さらにまた、河道における水面形追跡では、断面形状が与えられる点が少ないから、たとえ (2) 式を与えられた境界特性によつて綿密に計算しても、数学的にまた水理学的に誤つた水面形状をたどる場合も考えられ、漸変流にあらわれる局所的な急変流現象を無視することになる。このような現象はダムなどの支配構造物による遷移流にあらわれ、背水の影響範囲の推定に重要な要素となることはいうまでもない。

いま、こうした遷移流の水面形状と支配構造物との関係を二、三の例によつて説明しよう。簡単のために、流れは Chézy 型でかつ広矩形水路を流れるものとする。

(a) 水路は緩勾配でかつ幅が拡がるものとする、図-8 に示すように、遷移点としてまず鞍形点、ついで結節点があられる。したがつて、水面形状は図-22 に示すようになる。いま、上・下流側に水流を調節する支

図-22 幅の拡がる緩勾配水路における水面形状
Fig.22 Water Surface Profiles in Divergent Channels of Mild Slopes



配構造物がないとすると、水面形状は遷移水面形曲線となり、鞍形点 S_s より上流および結節点 S_n の下流で水流は常流となつて次第に等流水深に近づき、また S_s と S_n の間で射流となる。この場合、鞍形点 S_s が水面形追跡の出発点となることは明らかであるが、結節点によつて一つの興味ある現象があられる。一様な断面水路では、射流より常流への遷移は跳水現象という急変流によつてのみ可能であるが、幅の変化する水路では跳水現象による場合のほか、滑かに常流へと遷移する場合があります。これは図-22 より明らかのように、上・下流側より追跡されてきた水面形曲線が結節点に入る前に限界水深曲線と交るかどうかというこ

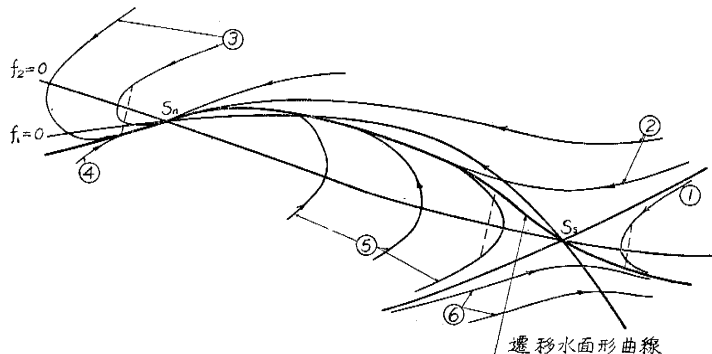
とによつて決定される。すなわち、図-22に示すように、①という水面形曲線では跳水現象なしに滑かに射流から常流へと遷移するが、②曲線では S_n に到達する以前に限界水深と交るから、この曲線と上流側より追跡されてきた水面形曲線とが共軛関係に達したところで、局所的な跳水現象をおこして、流れは急激に射流から常流へと遷移するものと考えられ、結節点は遷移点とならない。ここでは理論的に考察をすすめているだけであるが、さらに今後このような事実についても検討を加えるつもりである。

つぎに、下流側にダムなどの堰上支配構造物を設置して水流を調節した場合について、水面形状と調節効果について考察をすすめよう。支配構造物による堰上高が鞍形点よりである遷移水面形曲線以外のもう一つの積分曲線による水深より低い場合には、水面形曲線は①あるいは②のようになる。①および②の結節点近傍における水理学的特性はすでに述べたが、いずれにしても堰上による影響は鞍形点におよばない。この場合には水面形状の追跡は、 S_s および下流側の支配構造物から出発しなければならないからである。しかしながら、堰上高が高くなり、③曲線に示すようになると、支配構造物の影響は S_n および S_s を越えて上流側におよぶようになり、これらの特異点は遷移点となりえないことがわかる。したがつて、この場合には前に述べた従来の解析法による数表が利用され、また(2)式を数値積分して水面形曲線を求めても、誤差が少ない場合となるのである。すなわち、②曲線と③曲線とは、数学的にも水理学的にも全く特性の異なつた曲線であるから、混同してはならない。しかしながら、これら両曲線は S_s より出る積分曲線に漸近するから、特異点を離れた点における (dh/dx) の値は大差がない。ところが(2)式を数値積分する場合、一般には階差式が用いられるから、距離間隔のとり方いかんによつては、②曲線と③曲線とがしばしば混同される恐れがある。すなわち、すでに述べたように、 S_s より出る積分曲線が重要な役割を演ずるのであつて、境界特性の変化する水路内の遷移流の水面形状追跡には最も注意する必要がある、その例については後に述べる。

さらに、上流側に水門などの水位調節構造物が設置された場合について、水面形状と遷移特性について考察を加えよう。この場合に生じる代表的な水面形曲線は、水門の位置およびその開度によつて④または⑤という二つの曲線によつてあらわされる。いま、水面形状が④曲線をたどるとすれば、これは S_s より上流側で限界水深曲線と交るから、④曲線と S_s より出発する遷移水面形曲線とが共軛関係に達したところで、局所的な跳水現象が起るのであつて、 S_s は遷移点となり、それより下流の水面形状は遷移水面形曲線となる。一方、水面形状が⑤曲線をたどるとすれば、 S_s は遷移点とならない。この場合には、遷移水面形曲線に漸近しつつ S_n に達する。またこの曲線が S_n よりさらに下流側に達すると、 S_n と交る以前に限界水深曲線と交るから、再び局所的な跳水現象がおこることは明らかであろう。

(b) 幅の狭まる急勾配水路においては、図-8より明らかなように、まず結節点 S_s があらわれ、ついで特異点は鞍形点となる。したがつて、これらの遷移点の近傍における水面形状は図-23に示すようになる。遷移水

図-23 幅の狭まる急勾配水路における水面形状
Fig. 23 Water Surface Profiles in Convergent Channels of Steep Slopes



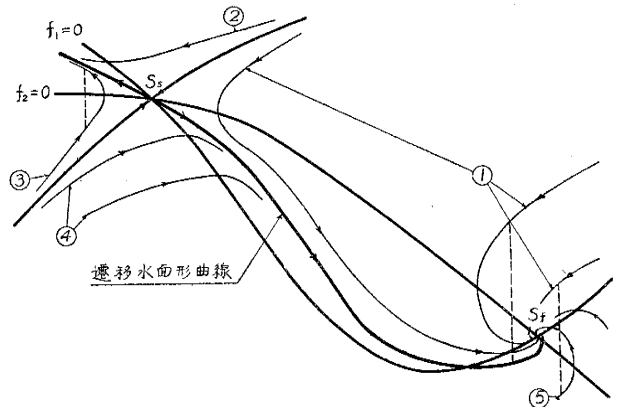
面形曲線は前の例とは逆に、射流より S_n を通つて常流へ遷移し、再び S_s によつて射流へと遷移する。いま、下流側に支配構造物を設置すると、それによつて生じる水面形状は、②および③曲線で代表される。堰上高が低い場合には、水面曲線は①曲線となり、堰上げによる影響が鞍形点に達せず、 S_s より出発する曲線と局所的な跳水現象によつて接続される。したがつて、 S_s および S_n がそれぞれ遷移点となることは明らかであろう。堰上高を大きくすると、水面形曲線は②曲線となつて S_n に達し、 S_s は遷移点とならない。またさらに堰上げを増加すると、水面形曲線は③曲線をたどることになる。この場合には、 S_n の上流側から追跡された水面形曲線と曲線③と

が共軛関係に達したところで局所的跳水現象がおり、両側の水面形状が接続される。すなわち、堰上げによる影響は、 S_0 および S_n をこえてさらに上流側にまでおよぶのであつて、これら両特異点は遷移点となることができない。

また、④、⑤および⑥曲線は、上流側に支配構造物を設置した場合の水面形状をあらわしている。④曲線は S_n に達し、 S_0 から追跡された遷移水面形曲線に接続する場合であつて、流れの状態は射流から滑かに常流へと遷移する。⑤曲線は遷移水面曲線と局所的跳水現象によつて接続し、 S_n は遷移点とならない。また水門の開度を小さくすると⑥曲線があらわれ、 S_0 および S_n はいずれも遷移点でなく、水面形曲線は上流側より追跡しなければならない。

(c) いま一つの例として、渦状点のあらわれる緩かな逆勾配水路における遷移流の水面形状について、考察をすすめてみよう。幅の拡がる水路では、図-24 に示すように、鞍形点 S_0 と渦状点 S_f とがあらわれる。遷移水面形曲線は S_0 を通つて常流から射流へと遷移し、 S_f の近傍で跳水現象によつて、下流側より追跡された水面形曲線に接続する。したがつて、前の二つの例とは異なつて、滑かな遷移水面形状は存在しない。下流側の支配構造物による水面形曲線は、①曲線または②曲線によつてあらわされる。堰上高が低いと、①曲線があらわれ、 S_0 より出発した遷移水面形曲線との間で跳水現象が生じる。また堰上高が高いと、 S_0 は遷移点とならず、堰上げによる影響が S_0 よりさらに上流におよぶことになる。

図-24 幅の拡がる緩かな逆勾配水路における水面形状
Fig.24 Water Surface Profiles in Divergent Channels of Slightly Adverse Slopes



一方、上流側の支配構造物によつてあらわれる水面形曲線は、③、④および⑥曲線である。③曲線は S_0 より上流側で、④曲線は S_0 と S_f との間で、また⑤曲線は S_f の下流側で、いずれも跳水現象を起して、流れの状態が射流より常流へと変化する。とくに、③曲線をたどる場合には、常流状態の水面形曲線が S_0 によつて再び射流へと遷移するから、二度も局所的な跳水現象があらわれることになる。また、渦状点が遷移点となりえないことも、図-24 から明らかであろう。

以上の具体例からみられるように、遷移点の近傍における水面形状はきわめて複雑であり、上・下流側の支配構造物によつて、数学的・水理学的にみて本質的に異なつた多くの水面形曲線が与えられる。また以上の図からもわかるように、Bresse 方程式の水理学的特性のなかで緩勾配水路および急勾配水路におけるものは、それぞれ鞍形点および結節点の下流側無限遠にある場合に相当する。したがつて、境界特性の変化する水路における遷移流の水面形追跡は、遷移点の近傍においてとくに注意を払わなければならない。この点については、以下の数値計算例によつて説明を加えよう。

(d) 水路床勾配 i が 0.0025、水路幅が $(1+0.0001x^2)$ 、水路粗度が Chézy の公式で $C^2=1960(m\text{-sec})$ とし、与えられる幅の拡がる水路において、流量 $1\text{ m}^3/\text{sec}$ の水流によつて生じる水面形状について考察をすすめる。いま、取扱いの簡単のため、水面形方程式として (34) 式を用いると、 $\beta=1$ とした場合の限界勾配は、

$$i_c = g/\beta C_c^2 = 0.0050$$

である。(34) 式の分母および分子を 0 とおいて等流水深曲線および限界水深曲線を追跡すると、トポロジ-的特異点は、

1. $x_c = 31.274\text{ m}$, $h_c = 0.4391\text{ m}$
2. $x_c = 122.140\text{ m}$, $h_c = 0.255\text{ m}$

という点である。

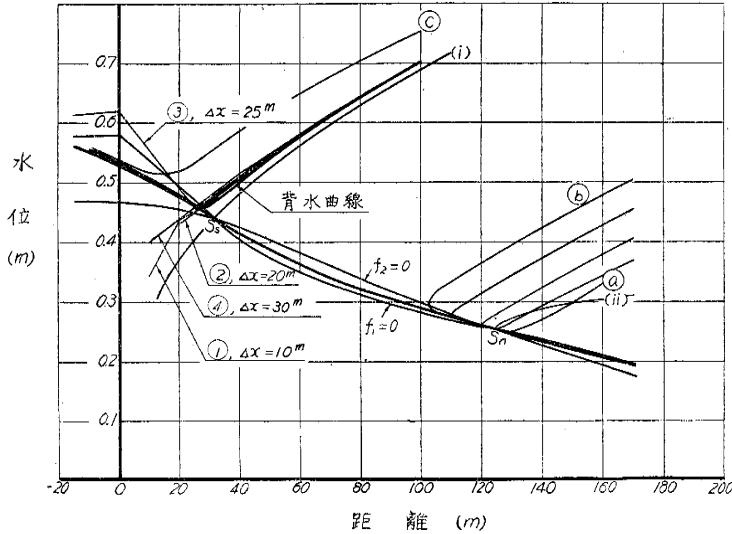
第一の特異点では、 $\alpha=0.5$ 、 $m=4.2154$ であるから、遷移点は鞍形点であり、図-8 の (i) 領域にある。また、この点における遷移水面形曲線の水面勾配は -0.00297 であり、もう一つの積分曲線の勾配は 0.00464 となる。

第二の特異点では、 $\alpha=0.5$ 、 $m=0.6238$ であるから、遷移点は結節点として分類される。また結節点を通る水

面形曲線の勾配は -0.00129 である。

遷移水面形曲線を求めるには、鞍形点を出発点として、上・下流方向に向つて (34) 式を積分すればよい。この場合、 (dh/dx) の初期値が -0.00297 であることはいうまでもない。図-25 にはこの曲線を図示しているが、

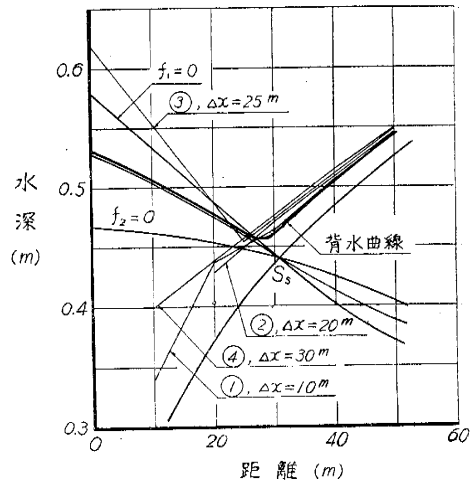
図-25(1) 背水計算における距離 Δx の影響
 Fig.25(1) Influence of Distance Interval Δx to Water Surface Profiles for Calculation of Back Water Curves



上・下流で次第に等流水深曲線に漸近する。鞍形点を通るもう一つの積分曲線は (i) で示し、また結節点を通る $d^2h/dx^2=0$ 曲線は (ii) で示している。すでに述べたように、前者は下流側の支配構造物の堰上げによる影響が鞍形点を越えて上流におよぶかどうか、すなわち鞍形点が遷移点（この場合には支配点）となるかどうかを分類する曲線であり、後者は結節点が遷移点（同様に支配点）となるかどうかを示すものである。したがつて、水面形曲線が (a) 曲線をたどると、遷移流全体に跳水現象があらわれないが、(b) 曲線では鞍形点と結節点との間に跳水現象があらわれる。これらの場合には、水面形追跡計算は鞍形点より上・下流側へ進め、さらに下流側の境界条件によつてその点より出発しなければならない。また一方、水面形曲線が (c) 曲線をたどるときは、特異点はいずれも遷移流を支配する点となりえないから、上流側より追跡しなければならない。

しかしながら、背水計算を含めて水面形の追跡には、このような考慮が払われない場合がきわめて多い。水流に遷移点があられない場合、あるいはあられても堰上高が十分高くて水面形曲線が遷移点の近傍にない場合には問題はないが、与えられた境界条件によつては遷移点に水面形曲線が近づくことがある。いま、 $x=100$ m で水位 0.70 m というように調節を行つたとすれば、図-25 より明らかなように水面形曲線は背水領域になるから、鞍形点は実質上遷移点とならない。つぎに、水面形方程式 (34) を階差式になおして数値積分する場合、距離 Δx をいろいろ変化させてみよう。①、②、③、④ 曲線はそれぞれ $\Delta x=10$ m, 20 m, 25 m, 30 m と仮定した場合における計算水面形曲線であるが、鞍形点を離れた点においては、 Δx のとり方のいかんによらず、計算水深には大差がない。ところが鞍形点に近づくとき、 Δx の変化による水深の相違が大きくなる。図-25 にみられるように、①、②、④ 曲線では鞍形点の近傍で急激に水深が減少し、 $f_2(x, h)=0$ 曲線よ

図-25(2) 鞍形点付近の詳細図
 Fig.25(2) Details of Water Surface Profiles in the Neighbourhood of Saddle Point



り下に出る。したがって、計算の不備は自ら明らかになることと思われるが、通常現場などにおける計算では $f_2(x, h) = 0$ と交るまでを背水の影響範囲と考えているところもしばしばみうけられる。しかしながら、この場合正しく追跡された水面形曲線は明らかに背水領域にある。また、 $4x = 25\text{ m}$ とした④曲線では、 $x = 25\text{ m}$ でたまたま (dh/dx) の負領域に入るから水位は上昇し、この方が実際の水面形曲線に近い図形を与えるようであるが、鞍形点の上流では正しい水面形状が低下背水形式をもっているにもかかわらず、むしろ堰上背水形式のような図形があらわれる。

以上の例からみられるように、水面形曲線が特異点に近づく場合には、とくに注意をして追跡しなければ、たとえ数値的に精密な計算を行っても、何ら水理学的意義が明らかにされない場合が多いことを理解することができるであろう。とくにこの問題は、貯水池などにおける背水領域の範囲を決定する場合に重要な意義をもつはずである。

したがって、河道などのように、境界特性が変化する水路における水面形追跡を正しく行うためには、つぎのような諸点に留意しなければならない。

1. 与えられた境界特性および流量に対し、等流水深曲線と限界水深曲線とを正しく算定して、特異点の存在を明らかにしなければならない。一般には、境界特性の与えられる断面は比較的に少ない。しかしながら、特異点があられるおそれのあるところでは、なるべく多くの断面によつて等流水深曲線と限界水深曲線とを正しく算定するように努むべきことは、以上の諸例からも理解されよう。

2. 特異点のトポロジーの分類にしたがつて、その遷移形式をきらかにする。そうすれば、水面形曲線の正しい追跡法がわかってくるはずである。

3. 与えられた境界条件にしたがつて、2. でえられた追跡法により水面形曲線が求められるが、遷移点の近傍ではとくに距離 $4x$ のとり方に注意して、正しい水面形状をうるように努めなければならない。

以上に述べた諸点に留意して、水面形状を追跡するとき、初めて正しい水面形曲線がえられ、水工計画も合理的に樹立されるようになる。

9. 流量測定法に対する支配面の水理学的特性の応用

境界特性、とくに水路の幾何学的形状に変化が与えられると、水流の流速、またしたがって水位は局部的に変化する。いま、流量および水路の幾何学的性質がわかっている場合、遷移部をはさんで上下流側の二点で水位を測定すると、これらの点でエネルギー水頭がわかる。したがって、第一次近似として、エネルギー損失がないと仮定すると、エネルギーおよび質量保存(連続)の条件から、逆に流量が計算される。これが開水路水流の流量測定法の原理となつていることはいうまでもない。

このような遷移流に遷移点(支配点)があらわれる場合には、この点の遷移流の水理学的特性が一義的に決定される。したがって、この性質を応用すると、遷移点の上流側の一点だけで水位を測定することによつて、第一次近似関係において流量を決定できることになる。こうした支配面の水理学的特性を応用して流量測定を行うものがヴェンチュリー・フリュームやパーシャル・フリュームであつて、流量測定法に應用する支配構造物のなかで高水頭を必要としないから広く應用されている。

したがって、このようなフリュームを用いて流量測定を行う場合には、流量測定的全範囲に亘つて水流に支配面があらわれるようにすべきであつて、これがフリュームの設計上の必要条件の一つにならう。こうした点から、本研究で取り扱つた遷移点あるいは支配点の水理学的特性が應用されるのであつて、フリュームがその機能を完全に果たすかどうかは、設計流量的全範囲に亘つて支配面があらわれるかどうかによるものと考えられる。

一般に、上流側の水位測定点と遷移点との間には、エネルギー損失があり、また流線の曲りによる影響があらわれる。したがって、上述の考え方は第一次近似にもとづくものであり、実際にはあらかじめ、水位と流量との関係をキャリブレーションによつて明らかにし、経験的な流量係数を求めておく必要がある。しかしながら、エネルギー損失は数%以内であり、また流線の曲りによる影響が大きくなるのは遷移点の近傍だけであろうと考えられるから、理論流量と実際流量との差も同程度であると予想せられ、実用的には十分の精度で流量測定を行うことができよう。

フリューム内の水流に支配点を生ぜしめるためには、遷移点を鞍形点にして、流れを常流より射流へと遷移させるとよい。しかも設計全流量に亘つて下流側の水位調節の影響が遷移点をこえて上流側に伝わらないようにすれば、上流側の一点で水位を計測して流量を計算するという目的が達せられよう。いま、水路に拡大部を作り、等流水深曲線および限界水深曲線との相互関係が図-26(1)に示すようになったとしよう。この場合には、水面

形曲線は実線に示すようになり、下流側の条件によつて、結節点が遷移点となる場合とならない場合とがある。いずれにしても支配点があらわれるから、流量測定法の目的が達せられる。また、図-26(2)は水路に縮少部を与えた例である。

図-26(1) 水路の拡大部による遷移流の水面形状

Fig.26(1) Transitional Profiles of Flows in Channel Expansions

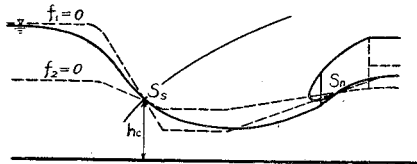
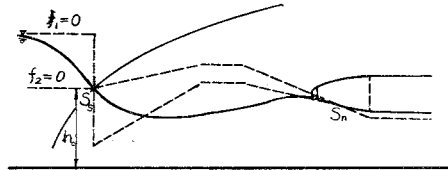


図-26(2) 水路の縮少部による遷移流の水面形状

Fig.26(2) Transitional Profiles of Flows in Channel Contractions



このように設計されたフリュームでは、経験的な流量係数も一次元解析法において可能な範囲内で理論的に考察されよう。すなわち、一定の境界特性および流量に対して、遷移点の位置、種類およびその水理学的特性が一義的に決定され、水面形状も追跡されるから、上流側の水位測定点と遷移点との間のエネルギー損失も理論的に計算することができるからである。この場合、さらに高次の近似をうるためには、漸変流の水面方程式(2)に考慮されていない要素を導入しなければならないであろう。

これらの問題については、遷移特性の実験的検討とともに、支配面の水理学的特性の流量測定法への応用として、別の機会に明らかにしたいと考えている。

10. 結 語

本文においては、境界特性の変化する水路における遷移流の水理学的特性を明らかにするため、まずその第一歩として、遷移点の分類および遷移現象の水理学的特性について、非線型力学におけるトポロジ的方法を応用して理論的に考察を加えた。

水路の幾何学的性質の二次元な変化ともなる射流における衝撃波、あるいは「せなご」といった現象を無視し、ここでは漸変流の概念のなかにおける水理学的特性についてのみ解析をすすめるが、その結果として、明らかにされたことはつぎのように結論づけることができよう。

1. 水流の状態が常流から射流へ、あるいは射流から常流へと変化するのは、漸変流の水面形方程式のトポロジ的特異点(遷移点)が水流にあらわれるためであつて、その存在条件はつぎのようにあらわされる。

- (a) 幅の拡がる水路では、水路床勾配がその点の局所的限界勾配より小さく、また
- (b) 幅の狭まる水路では、前者は後者より大きい。

2. 遷移点は、水流および境界特性によつて、それぞれ水理学的特性を異にする鞍形点、結節点および渦状点という三種の特異点に分類されるが、これらは遷移点近傍の水面形状の変動量方程式の性質によつて決定される。

(a) 鞍形点は遷移流の状態が常流から射流へと移行する遷移点であり、この点を通ずる二つの水面形曲線によつて、流れの状態が規定されるから、遷移流の水理学では最も重要な意義をもつ点である。またこの鞍形点は、水面形追跡法の出発点となる。

(b) 結節点は射流から常流へと移行する遷移点であるが、下流側の境界条件によつて、水流が局所的跳水現象を起す場合と滑かに遷移する場合の二つがあるが、前者の場合には結節点は実際上遷移点とならない。

(c) 渦状点は上下流側の境界条件によつて与えられる水面形曲線が跳水現象によつて不連続的に接続する点であるが、実際上の水面はこの点を通らない。

3. 一定の流量および境界特性に対して水深、したがつて水理学的特性が一義的に決定される点を支配点と定義すれば、鞍形点および結節点が支配点になりうる。

4. Chézy および Manning の流れにおける境界特性と遷移特性との関係を明らかにすることができたが、これらは水工学における実際上の問題と重要な関連をもつはずである。

5. 境界特性の変化する水路における水面形追跡法について必要な指針を与えると同時に、遷移点およびその近傍において計算遂行上とくに注意を払うべき問題点を明らかにした。

6. 開水路水流の流量測定法に支配面の水理学的特性を応用すれば、フリュームなどの測定装置の設計に合理

的指針が与えられることがわかるとともに、経験的に求められている流量係数に理論的根拠が与えられる可能性があることを示した。

以上に考案をすすめた遷移流の水理学的特性は、トポロジ的な解析法によつて漸変流の一般的性質を明らかにしたものと考えられる。とくに、広矩形断面水路における Chézy の流れの遷移特性は、従来より多くの学者が研究を重ねてきた Bresse 方程式の水理学的特性の一般的性質を示すものといえよう。しかしながら、本研究は遷移流のもつ遷移特性に関する研究の第一歩であり、今後さらに理論的および実験的検討を加えてこれらの遷移特性を明らかにするとともに、水理構造物による水流の遷移的特性を究明し、これら構造物の設計の合理的指針をうるように努めたいと考えている。

最後に本研究を遂行するに当たり、絶えず御懇篤な指導を賜わつた石原藤次郎教授、ならびに御協力をしていた大学院学生 網川 定、飯田一樹、門屋 毅および元学生村上 温(現国鉄)の諸君に厚く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) A. T. Ippen; Channel Transitions and Controls, Chapter VIII, Engineering Hydraulics, edited by H. Rouse; John Wileys, 1950.
- 2) 例えば, V. T. Chow; Integrating the Equation of Gradually Varied Flow, Proc. ASCE, Separate Paper No.838, Nov., 1955.
- 3) R. Silber; Etude et tracé des écoulements permanents en canaux et rivières, Dunod, Paris, 1954.
- 4) 本間 仁, 水理 学, 丸 善, 昭 30.11, pp.157-160.
- 5) P. Massé; Ressaut et ligne d'eau dans les cours d'eau à pente variable, Rev. gén. Hydraulique, Nos. 19-20, April, 1938.
- 6) C. Jaeger; Engineering Fluid Mechanics, Blackie, London, 1956, pp.130-133.
- 7) F. F. Escoffier; Transition Profiles in Non-Uniform Channels, Jour. Hydraulics Division, Proc. ASCE, No. HY 3rd June, 1956.
- 8) 石原安雄, 江崎一博, 穂野文命, 河口付近における水面形について, 第三回水理研究会講演会前刷, 昭23.5.
- 9) 岩佐義朗, 境界層の発達とその応用について, 第三回水理研究会講演会講演会前刷, 昭 33.5.
- 10) 例えば, N. Minorsky; Introduction to Non-Linear Mechanics, Edwards, Ann Arbor, 1957, pp.41-48.

昭和 33 年 11 月 20 日 印刷

昭和 33 年 11 月 25 日 発行

土木学会論文集第 59 号・別冊(3-1) 定価 150 円(〒10 円)

著 者 京都市左京区吉田本町 京都大学工学部土木工学教室 岩佐義朗
 編集者 東京都新宿区四谷一丁目 社団法人 土 木 学 会 国分正胤
 印刷者 東京都港区赤坂溜池5 株式会社 技 報 堂 大沼正吉

発行所 社団法人 土 木 学 会

東京都新宿区四谷一丁目 電話(35) 5130・5138・5139 振替東京 16828 番