

円形立坑周辺の弾・塑性応力状態にたいする近似解法

正員 川 本 勝 万*

AN APPROXIMATE SOLUTION ON THE ELASTIC AND PLASTIC STATE OF STRESS AROUND A CIRCULAR SHAFT

By Toshikazu Kawamoto, C.E. Member.

Synopsis : In this paper the elastic and plastic state of stress in the ground around a circular shaft is studied by the means of Mises' condition of yielding.

At the first an approximate solution is found as a problem of plane strain under the assumption of the incompressibility of the ground material for the cases that a shaft has a lining or not. Next another solution is found under the condition of yielding that the vertical stress distributed uniformly at the same depth from a horizontal surface is taken into. Then the results of the both solutions are compared.

要旨 Mises の降伏条件を用いて立坑周辺における地山の弾・塑性応力状態を求めた。立坑が素掘または巻立を有する場合について、まず地山材料の非圧縮性を仮定し、平面ヒズミの問題として近似解を求め、つぎに地表面からの深さの等しい点においては鉛直圧力が一定であると仮定し、その圧力を降伏条件に考慮した解を求めた。しかしてこの両者の解による応力分布を比較した。

1. 概 説

立坑を合理的に設計、計画するにはその周辺の応力状態をできるだけ適確に把握することが必要である。実際地山内構造物付近の地圧現象は地山材料の力学的性質とともに複雑であり、従来より種々の説明がなされて来ている。近年塑性理論を適用した地中の円孔周囲の弾・塑性応力状態についての研究¹⁾が行われ、さらに土質力学における塑性基本理論²⁾の発展とともにこの種の問題解明に貢献している。

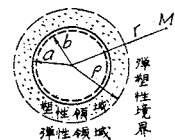
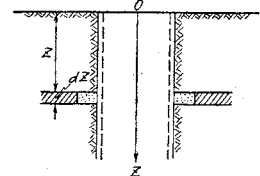
一般に地山材料は力学的な性質が不確かであり、その降伏条件を理論的に説明することははなはだ困難であつて、従来からの各研究においても、この降伏条件をいかに考えるかに相異がみられるようである。降伏条件式としては3主応力を考慮に入れたものをとるべきであつて、Nadai³⁾や星埜博士⁴⁾の示されているごとく、正8面体せん断応力が正8面体垂直応力の既知函数となつたときに降伏することから立てられた式を採用するのが適当と思われる。しかしここにおいては比較的簡単な数学形式をとる Mises の降伏条件を用い、最初に平面ヒズミの状態で地山材料を非圧縮性と仮定した場合の近似的な解を求め、つぎに鉛直圧力をも降伏条件式に考慮し、Nadai³⁾または伊藤氏⁵⁾の解法と同じ手順により解を得、立坑周辺の弾・塑性応力状態について考察を行つた。

本論文においては降伏条件として Mises の降伏条件を用いたのであるが、従来土壌地山にたいしては破壊条件として普通の Coulomb 実験公式が用いられている。しかしこの式で用いられる粘着力および内部摩擦角は実験的な常数であり、一つの土についても固有な常数でなく種々の条件によつていちじるしく変るものであつて、その降伏条件の扱いもいちじるしく困難となる。しかるにもし地山の土壌が飽和軟粘土のごとく内部摩擦角が0と見なせるようなものであり、しかも近似的に平面ヒズミの状態と考えられる場合には Mises の降伏条件が用いられるだろう。また地山が岩盤の場合においても岩盤が等方弾性状態から完全塑性状態に移行する理想的な過程を仮定することにより、Mises の条件式を用いて弾・塑性応力状態を求めることができる。このように Mises の降伏条件を実際の地山に適用する場合には種々制約をうけるが、この条件式の数学的取扱いが簡単なるがゆえに上のごとき状態にたいして適用することにより実際の場合にたいする近似的な解を求めることができる。

2. 地山材料を非圧縮性と考へた場合の近似解

水平な表面をもつた地山内に半径 a (巻立を有する場合にはその内壁の半径 b) なる円形の立坑を鉛直に掘つたものとし、図-1に示すように地表面に原点を持ち立坑の軸を z 軸とする円筒座標系 (r, θ, z) を使用する。いま深さ z にお

図-1



* 熊本大学助教授、工学部土木工学教室

ける水平な微小厚さの部分を考え、軸方向のヒズミ ϵ_z が無いものと仮定すれば平面ヒズミの問題となり、さらに軸対称であるから任意点における主応力は $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ となる。したがって釣合方程式はつぎの一つとなる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

半径方向の変位の成分を u で表わせば、

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \dots\dots\dots (2)$$

であり、 u は地山内の位置と地山の弾・塑性状態によつて定められるものと考えられるから、弾塑性境界の半径を ρ とすれば、 u は r と ρ の関数 $u = u(r, \rho)$ で表わされる。また $\epsilon_z = 0$ であるから平均垂直ヒズミは

$$e = \frac{1}{3}(\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z) = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) \dots\dots\dots (3)$$

いま地山を圧縮性と考えると $e \neq 0$ となり、塑性領域における解を直接に求めることが困難となり、階差方程式等の助けをかりねばならない。しかし地山が弾性、塑性両領域において非圧縮性であると仮定することによつて問題を簡単に解くことができる。この仮定において地山材料の弾性的な圧縮性をも無視することになるが、しばしば完全非圧縮性の仮定は応力解析の結果にいちじるしくは影響をおよぼさないで問題を簡単に処理しうることが示されており、ここにおいてもこの仮定のもとにおける結果が後述の解法によるものと比較される。なお地山材料のポアソン比が 0.5 に近いときにはこの仮定はかなり妥当であると思われる。またここにおいては問題を平面ヒズミの状態で取扱うため、従来の地山の鉛直圧力が降伏条件に関係しないことになるが、この点に関してもポアソン比が 0.5 に近い場合にたいしては妥当である。

さてこの場合、 $e = 0$ となり (3) 式より

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

となる。(4) 式を積分すれば応力分布と無関係に弾性、塑性両領域において、

$$u(r, \rho) = -\frac{D(\rho)}{r} \dots\dots\dots (5)$$

をうる。この場合弾塑性境界は z 軸を中心とする円形となることは明らかである。 $D(\rho)$ は ρ のみの関数である。したがつて各ヒズミ成分は次式で与えられる。

$$\epsilon_r = \frac{D}{r^2}, \quad \epsilon_\theta = -\frac{D}{r^2}, \quad \epsilon_z = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(1) 弾性領域における応力

フックの法則を用い (6) 式より弾性領域内の偏差応力の主成分は次式のようになる。

$$s_r = 2G \frac{D}{r^2}, \quad s_\theta = -2G \frac{D}{r^2}, \quad s_z = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 G : 地山材料のせん断弾性係数

平均垂直応力を s とすれば、弾性領域において各成分応力は

$$\sigma_r = s + 2G \frac{D}{r^2}, \quad \sigma_\theta = s - 2G \frac{D}{r^2}, \quad \sigma_z = s \dots\dots\dots (8)$$

(8) 式を釣合方程式 (1) に代入すれば、 D は r に無関係であるから次式をうる。

$$\frac{\partial s}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

すなわち弾性領域の平均垂直応力は r に無関係であることがわかる。この場合弾・塑性境界 $r = \rho$ において降伏条件を満たさねばならない。降伏条件は Mises によれば、

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_r^2 + s_\theta^2 + s_z^2) = s_r^2 + s_r s_\theta + s_\theta^2 = k^2 \dots\dots\dots (10)$$

k : 単純せん断の時の降伏限度

で与えられる。また $r = \infty$ においては地山の応力は立坑の開さくによる影響をうけないと考えられるから、

$$\sigma_r = \sigma_\theta = q = -\frac{\nu}{1-\nu} w z \dots\dots\dots (11)$$

ν : 地山材料のポアソン比

w : 地山材料の単位体積重量

ととることができる。これらの境界条件から $D(\rho)$ および s を定めることができ、弾性領域にたいする解はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{k\rho^2}{2G\gamma} \\ \sigma_r &= -\frac{\nu}{1-\nu}wz + \frac{k\rho^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -\frac{\nu}{1-\nu}wz - \frac{k\rho^2}{r^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(2) 塑性領域における応力

この場合にも u はやはり (5) 式の形をとり、弾・塑性境界における連続性を考慮すれば (12) の第1式は塑性領域においても有効である。また塑性領域の一点において偏差応力成分の間にはつぎのような関係が存在する⁷⁾。

$$s_r : s_\theta : s_z = 1 : -1 : 0 \dots\dots\dots (13)$$

(10) 式および (13) 式より塑性領域 ($r \leq \rho$) において Mises の降伏条件は s_r および s_θ の絶対値が k であることを示す。したがって結局塑性領域における応力はつぎのようになる。

$$\sigma_r = s + k, \quad \sigma_\theta = s - k, \quad \sigma_z = s \dots\dots\dots (14)$$

上式を釣合方程式に代入すれば $r \leq \rho$ において

$$\frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{2k}{r} \dots\dots\dots (15)$$

これより次式が得られる。

$$s = -2k \log r + f(\rho) \dots\dots\dots (16)$$

ここに $f(\rho)$ は ρ のみの関数である。上式の s の値は弾塑性境界 $r = \rho$ において弾性領域における s の値と一致すべきであるから、

$$f(\rho) = 2k \log \rho - \frac{\nu}{1-\nu}wz$$

となり、塑性領域における応力は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= k \left(1 - 2 \log \frac{r}{\rho} \right) - \frac{\nu}{1-\nu}wz \\ \sigma_\theta &= -k \left(1 + 2 \log \frac{r}{\rho} \right) - \frac{\nu}{1-\nu}wz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(3) 弾・塑性境界および弾性限界の深さ

(i) 素掘立坑

素掘りの立坑壁には外力が作用しないから $r = a$ で $\sigma_r = 0$ である。したがって (17) の第1式よりつぎの関係式を得る。

$$k \left(1 - 2 \log \frac{a}{\rho} \right) - \frac{\nu}{1-\nu}wz = 0 \dots\dots\dots (18)$$

すなわち (18) 式を解くことにより弾・塑性境界 ρ を求めうる。いま立坑周壁で降伏を起こすときの深さ、すなわち弾性限界深さは上式において $\rho = a$ とおきつぎのようになる。

$$z_1 = \frac{(1-\nu)k}{\nu w} \dots\dots\dots (19)$$

また立坑のある深さにおける応力状態は、 z のある値にたいして (18) 式より ρ を求め、その値を $a \leq r \leq \rho$ (塑性領域) にたいしては (17) 式に、 $r \geq \rho$ (弾性領域) にたいしては (12) 式に用いることによつて得られる。

(ii) 巻立を有する立坑

この場合には (17) 式の σ_r は、 $r = a$ において零にならず、巻立による反力に等しくならねばならない。いま図-1 に示すとき巻立 ($b \leq r \leq a$) 中における応力状態を求めるため、問題の軸対称性を考慮してつぎのような応力関数を与える⁸⁾。

$$\phi = A \log r + Cr^2 \dots\dots\dots (20)$$

しかるときは各成分応力は

$$\sigma_r = Ar^{-2} + 2C, \quad \sigma_\theta = -Ar^{-2} + 2C, \quad \tau_{r\theta} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

巻立と地山との境界においては半径方向応力は釣合うべきであるから、未定係数 A および C はつぎの境界条件より決定される。

$$\left. \begin{aligned} r = b \text{ において, } \sigma_r &= 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \\ r = a \text{ において, } \sigma_r &= k \left(1 - 2 \log \frac{a}{\rho} \right) - \frac{\nu}{1-\nu}wz, \quad \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

したがって巻立中の応力成分は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2}{a^2-b^2} \left\{ k \left(1-2 \log \frac{a}{\rho} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} w z \right\} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2}{a^2-b^2} \left\{ k \left(1-2 \log \frac{a}{\rho} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} w z \right\} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

つぎに塑性領域での巻立との境界面における半径方向変位は(12)式よりつぎのようになる。

$$u_a = -\frac{k \rho^2}{2 G a} \dots\dots\dots (24)$$

一方境界面における巻立の変位は(23)式を用いて次式のように求められる。

$$u_a' = \frac{1+\nu'}{E'} \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2} \left\{ k \left(1-2 \log \frac{a}{\rho} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} w z \right\} \left\{ \frac{b^2}{a} + (1-2\nu') a \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 E' ：巻立の弾性係数
 ν' ：巻立のポアソン比

いま巻立と地山とはその境界面において半径方向に等しい変位をするものとすれば $u_a = u_a'$ であるから、(24)式および(25)式よりつぎのように弾・塑性境界の半径 ρ にたいする関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} M \rho^2 + \log \rho - F &= 0 \\ \text{ここに、} M &= \frac{a^2-b^2}{2 a^2} \cdot \frac{1}{\{b^2+(1-2\nu')a^2\}} \cdot \frac{(1+\nu)E'}{(1+\nu')E} \\ F &= \log a - \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{w z}{k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

上式より ρ が求まれば素掘立坑の場合と同様にして弾・塑性両領域における応力を計算することができる。

3. Nadai の方法による解法

Nadai の行った解法と同じ手順で伊藤氏は正8面体せん断応力と正8面体垂直応力とによる降伏条件式を用い、条件式中の地山材料によつて定まる常数を3軸圧縮試験の結果から得て解を求められている。ここにおいては前に述べたごとく Mises の降伏条件より出発して、Nadai または伊藤氏と同様の手法によつて解法を進めた。

2. においては弾・塑性両領域において地山材料が非圧縮性であると仮定し、さらに平面歪の状態を考えたため、地山中の鉛直応力は降伏条件式には考慮されなかつた。それでいま同一水平面内の弾・塑性両領域において一定の鉛直圧力が作用しているものと考え、3主応力による降伏条件より弾・塑性応力状態を求める。

(1) 弾性領域内の応力

弾性領域における応力は 2. の場合と同様厚肉円管にたいする式を用いて、つぎのように与えられる。

$$\sigma_r = \alpha r^{-2} + q, \quad \sigma_\theta = -\alpha r^{-2} + q, \quad \sigma_z = p = -w z \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $q = \frac{\nu}{1-\nu} p$, α ：常数

(27) 式中の α は立坑周辺の地山がすべて弾性状態にあるならば、立坑壁の状態によつて定まる。すなわち素掘立坑にたいしては、

$$\alpha = -a^2 q \dots\dots\dots (28)$$

であり、巻立を有する立坑ではつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -K a^2 q \\ \text{ここに、} K &= \frac{D-2(1-\nu)(1-\beta^2)E_0}{D} \\ D &= \frac{1+\nu'}{1+\nu} (1-2\nu'+\beta^2) + (1-\beta^2)E_0 \\ \beta &= b/a, E_0 = E'/E \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)'$$

この場合地山中の最大応力は立坑周壁 $r=a$ において生じそれぞれつぎのようになる。

$$\text{素掘：} \sigma_r = 0, \sigma_\theta = 2q, \sigma_z = p \dots\dots\dots (29)$$

$$\text{巻立：} \sigma_r = (1-K)q, \sigma_\theta = (1+K)q, \sigma_z = p \dots\dots\dots (29)'$$

なお(27)式は地山が弾・塑性状態になつた場合にもその弾性領域で成立つが、その場合常数 α は地山の状態、すなわち塑性領域の範囲の大きさなどによつて変化することは明らかである。

(2) 降伏条件式及び弾性限界深さ

降伏条件は 2. の場合と同様に Mises の降伏条件式で与えられる。偏差応力は、 $s_r = \sigma_r - s$, $s_\theta = \sigma_\theta - s$, $s_z =$

$\sigma_z - s, s = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)/3$ で与えられるから、成分応力による条件式

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 6k^2 \dots\dots\dots (30)$$

をうる。

つぎに立坑周壁が降伏をおこして塑性状態に入る深さ、すなわち弾性限界深さはつぎのようにして求められる。

一般に立坑周壁が巻立による反力をうけている場合を考えると、降伏条件式 (30) に弾性状態における周壁の応力成分 $\sigma_{ra}, \sigma_{\theta a}$ および $\sigma_z = p_1$ を代入し、それを p_1 について解けば弾性限界深さ z_1 は、

$$z_1 = \frac{-p_1}{w} = \frac{\sqrt{3}(1-\nu)}{\sqrt{3\nu^2 K^2 + (1-2\nu)^2}} \cdot \frac{k}{w} \dots\dots\dots (31)$$

なお素掘りの場合には $K=1$ とおけばよい。

(3) 塑性領域内の応力

塑性領域内においても σ_z が $p = -wz$ に等しく r に無関係と考えているから、この領域ではつぎの関係式が成立たねばならない。

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - p)^2 + (p - \sigma_r)^2 = 6k^2 \dots\dots\dots (32)$$

したがって立坑周壁 $r=a$ における応力は、素掘立坑にたいして、 $(\sigma_r)_{r=a}=0$ 、巻立坑にたいして $(\sigma_r)_{r=a}=\sigma_{ra}$ なることよりつぎのごとく得られる。

$$\text{素掘: } \sigma_\theta^2 - p\sigma_\theta + p^2 - 3k^2 = 0 \dots\dots\dots (33)$$

$$\text{巻立: } \sigma_\theta^2 - (\sigma_{ra} + p)\sigma_\theta - \sigma_{ra}^2 - p\sigma_{ra} + p^2 - 3k^2 = 0 \dots\dots\dots (33)'$$

(33) 式または (33)' 式はいづれも実根を有すべきであつて、つぎの条件式を満足すべきである。

$$p^2 - 4k^2 \leq 0 \dots\dots\dots (34)$$

または

$$(\sigma_{ra} + p)^2 - 4(\sigma_{ra}^2 - p\sigma_{ra} + p^2 - 3k^2) \geq 0 \dots\dots\dots (34)'$$

(34) 式または (34)' 式において等号をとれば立坑周辺の塑性領域が安定を保ちうる最大の深さ、すなわち塑性限界深さ z_2 をうる。素掘にたいしては、

$$z_2 = \frac{p_2}{w} = 2 \frac{k}{w} \dots\dots\dots (35)$$

巻立立坑にたいしては

$$z_2 = \frac{p_2}{w} = \frac{\sigma_{ra} + 2k}{w} \dots\dots\dots (35)'$$

上式で巻立の反力 σ_{ra} は巻立の構造的強度によつて限定されることは明らかである。

(32) 式において

$$\sigma_r = p + (\sigma - \sigma')\sqrt{2}, \quad \sigma_\theta = p + (\sigma + \sigma')/\sqrt{2} \dots\dots\dots (36)$$

とにおいて応力成分を σ, σ' に変換すると、(32) 式はつぎようになる。

$$\sigma^2 + 3\sigma'^2 = 6k^2 \dots\dots\dots (37)$$

(37) 式は σ, σ' を座標軸とする だ円 を表わすから、 θ なるパラメーターを用いて σ, σ' を表わせば、

$$\sigma = -\sqrt{6} k \sin \theta, \quad \sigma' = -\sqrt{2} k \cos \theta \dots\dots\dots (38)$$

ここにおいて θ の値は $0 \sim \pi/2$ の範囲内にある。この場合応力の釣合方程式は (1) 式と同様に与えられるから、これと (36) 式よりつぎの関係式をうる。

$$r \frac{d\sigma}{dr} = r \frac{d\sigma'}{dr} + 2\sigma' \dots\dots\dots (39)$$

上式に (38) 式を代入して r と θ との関係を求めると、

$$\frac{d^2}{r^2} = e^{-\sqrt{3}\theta} \cos \theta, \quad d: \text{積分常数} \dots\dots\dots (40)$$

積分常数 d は $r=a$ で $\sigma_r=0$ または $\sigma_r=\sigma_{ra}$ なる境界条件から得られるところのつぎの関係式から求められる。

$$p - k(\sqrt{3} \sin \theta_a - \cos \theta_a) = 0 \dots\dots\dots (41)$$

または

$$p - \sigma_{ra} - k(\sqrt{3} \sin \theta_a - \cos \theta_a) = 0 \dots\dots\dots (41)'$$

このようにして (41) 式または (41)' 式より θ_a を求め、その値を (40) 式に代入すれば常数 d が決定されるから、(40) 式によつて r と θ との関係が得られる。したがつてその θ の値から (38) 式により σ, σ' を、さらに (36) 式を用いて塑性領域における応力成分 σ_r, σ_θ を得ることができる。

(4) 弾・塑性境界及び弾性領域における常数 α の決定

この場合塑性領域でははじめに弾性範囲以上のヒズミを受けたことのない完全塑性材料におこる塑性変形のはじめの状態を考へて降伏条件を与えているから、弾塑性境界 $r=\rho$ では塑性領域の σ_r および σ_θ が弾性領域のそれらと等しくなるべきことよりつぎのような条件式をうる。

$$p - k(\sqrt{3} \sin \theta_p \mp \cos \theta_p) = \pm \alpha \rho^2 + q \dots \dots \dots (42)$$

上の2式を連立的に解くことにより

$$\sin \theta_p = \frac{1}{\sqrt{3}k} \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} p \dots \dots \dots (43)$$

これより θ_p を得、したがつて (40) により α を求めることができる。また

$$\alpha = k \rho^2 \cos \theta \dots \dots \dots (44)$$

(44) 式より α が求まれば (27) 式によつて弾性領域内の応力分布を計算することができる。

4. 数値計算およびその考察

まず2の近似解法を用いて数値計算結果を示すとつぎのようである。いま立坑壁の半径 $a=2.9$ m とし、地山材料として $E=1.5 \times 10^5$ kg/cm², $\nu=0.3$, $k=25$ kg/cm², $w=2.4$ t/m² の岩盤を考へる。さらに巻立を施した場合にはその内壁の半径 $b=2.5$ m とし、巻立にたいしては $E'=2.0 \times 10^5$ kg/cm², $\nu'=0.15$ をとるものとして、いま $z=500$ m の水平面における応力分布を求める。しかるときは弾・塑性境界半径 ρ は素掘立坑にたいして $\rho=4.91$ m, 巻立を施した立坑にたいして $\rho=3.91$ m をうる。したがつて図-2のごとき弾・塑性応力分布をうる。また巻立内部の応力分布は図-3のようになる。なお比較のため地山の k が大きく弾性状態を保つていと考へた場合の地山内および巻立内の応力分布を厚肉円管にたいする式を用いて導いた (27) 式および (28), (28') 式より計算し同時に図示した。

図-2 より判るように弾・塑性応力分布は塑性領域で σ_r, σ_θ とともにかなり応力を減少しており、最大圧縮応力の生ずる位置が弾性地山の場合の坑壁よりある距離だけ地山内に入った弾・塑性境界にまで移動している。この場合巻立を施した立坑は素掘立坑よりも全般に σ_r を増加し、 σ_θ を弾性領域では減少、塑性領域では増加させる傾向を示している。上述のように最大圧縮応力が塑性領域の生成によつて地山内へ移動させられることは軟弱地盤におけるかなり深い立坑でも長期間安定を保ちうることを説明している。地山を弾性的あるいは弾・塑性的に与えた場合の応力分布の相異についても図から明らかである。この場合の計算例では同一水平面の弾性領域において σ_r は前者の方が、 σ_θ は後者の方が大きい、 $r=15$ m 位になると σ_r, σ_θ ともほとんど同じ程度の値をうるようになる。

一般に弾性変形の場合には巻立を施すことによつて σ_r は増加し、 θ_θ は減少するが、弾・塑性変形の場合には巻立の存在により弾性領域の θ_θ を除いたほかはすべての応力は増加される。

つぎに3.の解法による結果と2.の解法によるものとを比較するため素掘立坑にたいしてつぎのような条件で計算を行った。

$a=3.0$ m, $k=10$ kg/cm², $\nu=0.4$ および 0.5 , $w=2.4$ t/m², $z=80$ m

$\nu=0.4$ のとき2.の解法では $z_1=62.5$ m, $\rho=3.45$ m, 3.の解法では $z_1=60.0$ m, $z_2=83.3$ m,

図-2 2の解法による弾・塑性応力分布と弾性応力分布 ($z=500$ m, $k=25$ kg/cm²)

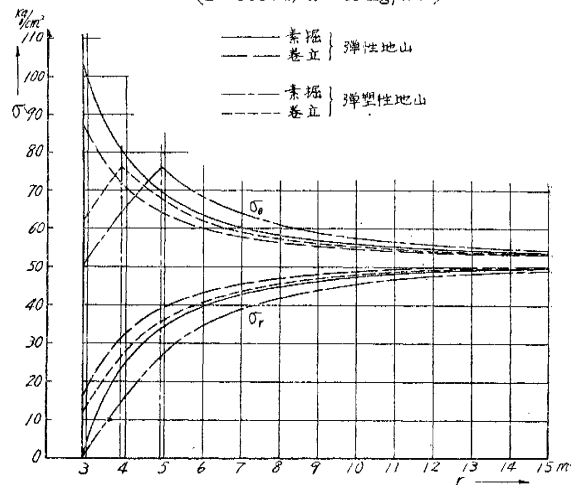
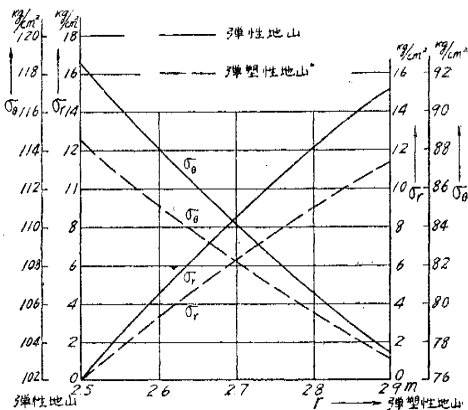


図-3 巻立内の応力分布



$\rho=3.67$ m となる。また $\nu=0.5$ のとき 2. の解法では $z_1=41.65$ m, $\rho=4.68$ m, 3. の解法では $z_1=41.65$ m, $z_2=83.3$ m, $\rho=4.94$ m となる。これらの値よりそれぞれ応力分布を求め図示すると図-4のごとくなる。いずれの解法においても立坑壁のごく近傍においては σ_r, σ_θ とも地山材料のポアソン比に影響されないのであるが、弾・塑性境界半径はかなり影響をうける。2. の結果と 3. の結果とを比較すると、一般に後者において弾・塑性境界半径が大きく、塑性領域における σ_θ をかなり減少しているが、弾性領域においては σ_r, σ_θ とも両者の結果にあまり差異をみない。この塑性領域における σ_θ の減少は前者が平面ヒズミの状態を考えているのに対して、後者では鉛直応力 $\sigma_z=wz$ を降伏条件式に考慮しているためである。また $\nu=0.5$ の場合には弾・塑性境界において生ずる最大応力は両者で等しくなるが、 ν が小さくなるほど前者が後者より大きくなることが判る。

5. 結 言

円形立坑の周辺地山の弾・塑性応力状態をまず地山材料の非圧縮性を仮定して、平面ヒズミの問題として近似解を得、さらに同一深さにおいて一様に分布する鉛直圧力を考慮することによって、Nadai または伊藤氏と同様の手法で解を求めた。いずれの解においても素掘の場合と巻立を有する場合にたいして、弾・塑性境界半径と地山内の応力分布を求め、さらに弾性地山にたいする応力分布と比較した。これらより弾性状態にたいする弾・塑性状態の応力分布がいちじるしく変化すること、巻立を施すことによって応力状態が変ること、さらに 2. の近似解による結果では 3. の解によるものよりも塑性領域が狭くなり、 σ_θ は塑性領域では大きく弾性領域で小さくなり、 σ_r は弾・塑性両領域において大きくなること、しかし塑性領域の σ_r 弾性領域の σ_r, σ_θ には大差がないことなどが明らかになった。

これらの結果からも判るように弾・塑性応力状態の場合には立坑周囲の塑性領域で弾性状態のときよりも応力を減じ、したがって最大応力の生ずる位置が坑壁より地山内部に移動し、素掘の立坑がかなり深い位置においても長期間安定を保ちうることを説明することができる。

終りに本研究を行うに当たり、終始御指導をいただいた京都大学工学研究所丹羽義次助教にたいし感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) H.M. Westergaard: Plastic State of Stress Around a Deep Well, Journal of Boston Soc. of Civil Eng., Vol. 27, No.1, Jan. 1940, p. 1~5
R. Fenner: Untersuchungen zur Erkenntnis des Gebirgsdrucks, Glückauf, Nr. 32, 74. Jahrg, 13 August 1938.
伊藤富雄: 円形立坑の周囲における弾・塑性応力状態, 土木学会論文集第 46 号, 昭.32.6
- 2) 星 塾 和: 土の力学における塑性基本理論と三軸試験への適用, 土木学会論文集第 21 号, 昭.29.12
- 3) A.Nadai: Theory of Flow and Fracture of Solid, 1950, p. 225~228
- 4) 前出 2)
- 5) 前出 3), p. 472
- 6) 前出 1)
- 7) W. Prager and P.G. Hodge: Theory of Perfectly Plastic Solids, 日本語訳, p. 92
- 8) S. Timoshenko: Theory of Elasticity, p. 55~660

(昭.32.10.25)

図-4 2 および 3 の解法による弾・塑性応力分布の比較
($Z=800$ m, $k=10$ kg/cm²)

