

Rouse, Ismail による浮流土砂量の解析的計算法

准員 木 村 喜代治*

THE ANALYTICAL EVALUATIONS OF RATE OF SUSPENDED LOAD

BY H. ROUSE, H. ISMAIL

By Kiyoji Kimura, C.E. Assoc. Member

Synopsis: The rate of suspended load in the open channel flow may be evaluated from integration on the product of concentration of suspended load and the velocity of the flow, at each point in the depth.

In this paper the analytical evaluations of the rate of suspended load in the wide open channel is calculated by using beta function and series expansion. And an example of this evaluation using data of the Mississippi river by E.W. Lane and A.A. Kalinske is given.

要 旨 水路中を流送される浮流土砂量は水深上の各点における浮流土砂濃度と流速との積を水深に関し積分すれば求まる。

この報告では、幅の広い開水路について、濃度分布方程式として H. Rouse¹⁾, H. Ismail²⁾ の式を用い、速度分布方程式として Prandtl-Kármán の対数法則を用いた場合の単位幅当りの浮流土砂量を、beta 関数や級数展開によつて解析的に求めた。また E.W. Lane と A.A. Kalinske によるミシシッピー河での観測資料³⁾ を用いた計算例を示した。

1. 緒 言

従来この濃度と流速との積の積分は解析的に解けないとして数値積分によつて求められ、図表化されている⁴⁾。筆者は先に、濃度分布に Lane-Kalinske の式を用いた場合 gamma 関数より解析的に解く方法を示したが⁵⁾、これと同様な方法を用いると Rouse, Ismail などによる濃度分布式を用いた場合には、浮流土砂の性質を示す指数 z が 1 より小なるときは beta 関数により、また z が整数でないときは級数展開によつて解析的に解いた。そして z が整数のときは簡単に初等関数で計算できる。

まず説明の順序として、浮流土砂の計算式を示すと次のごとくである。濃度分布式は浮流土砂の輸送と運動量の輸送との相似性を仮定し、拡散係数の分布を Prandtl-Kármán の対数的速度分布式から求めたもので、次式のごとくである。

$$\frac{C}{C_a} = \left(\frac{a}{h-a} \cdot \frac{h-y}{y} \right)^z \dots\dots\dots (1)$$

(y : 底から計つた距離, a : 底から計つた一定点までの距離, C : 任意の点の浮流土砂の濃度, C_a : 一定点の濃度, h : 水深), そして $z = W/\beta kv_*$ である (W : 土砂の限界沈降速度, β : 拡散係数と渦動粘性係数の比, k : Kármán の一般常数, v_* : 摩擦速度) この式は 1952 年に Ismail によつて導かれた。1937 年に Rouse は $\beta = 1$ として導いている。Prandtl-Kármán の速度分布式は

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{k_s} + \phi \left(\frac{k_s v_*}{\nu} \right) \dots\dots\dots (2)$$

である (v : 流速, k_s : Nikuradse の相当粗度, ν : 動粘性係数) これより

$$v = \frac{v_*}{k} \ln \frac{y}{k} + v_m \dots\dots\dots (3)$$

を得る (v_m : 最大流速)。従つて底より離れたある点に浮流限界を定め、この距離を l とすると、単位時間に水路の単位幅当りを流動する浮流土砂量 q_s は次のごとくなる

$$\begin{aligned} q_s &= \int_l^h C v dy = \frac{C_a v_*}{k} \left(\frac{a}{h-a} \right)^z \left\{ \int_l^h \left(\frac{h-y}{y} \right) \ln \frac{y}{h} dy + \frac{k v_m}{v_*} \int_l^h \left(\frac{h-y}{y} \right)^z dy \right\} \\ &= \frac{C_a v_* h}{k} \left(\frac{a}{h-a} \right)^z \left\{ \int_L^1 \left(\frac{1-x}{x} \right)^z \ln x dx + \frac{k v_m}{v_*} \int_L^1 \left(\frac{1-x}{x} \right)^z dx \right\} \end{aligned}$$

* 日本大学講師, 第二工学部土木教室

$$= -\frac{C_a v_x h}{k} \left(\frac{a}{h-a} \right)^z \left(I_1 + \frac{kv_m}{v^*} I_2 \right) \dots\dots\dots (4)$$

($x=y/h, L=l/h$)

2. I_1, I_2 の計算

I_1, I_2 を計算するために、次のごとき定積分を考える

$$\int_L^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

ここで $q > 0$ かつ p が零および負の整数でない場合には下記のように計算される。

$$\int_L^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{(1-q)}{1!(p+1)} + \frac{(1-q)(2-q)}{2!(p+2)} + \dots + \sum \frac{(1-q)(2-q)\dots(n-q)}{n!(p+n)} \right\} - L^p \left\{ \frac{1}{p} + \frac{(1-q)}{1!(p+1)} L + \frac{(1-q)(2-q)}{2!(p+2)} L^2 + \dots + \sum \frac{(1-q)(2-q)\dots(n-q)}{n!(p+n)} L^n \right\} \dots\dots (5)$$

$n=0, 1, 2, 3, \dots$ 。この級数の収束性は簡単に証明される。

(a) $q > 0$ かつ $p > 0$ の場合

このとき (5) 式は

$$\int_L^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx - \int_0^L x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \dots\dots\dots (6)$$

と書いて、(5) 式右辺の第 1 および第 2 中括弧内がそれぞれ (6) 式右辺の第 1, 第 2 項に相当することは容易に立証し得る。また (6) 式右辺第 1 項第 2 項はそれぞれ完全および不完全 beta 関数である。ここで $p=1-z, q=1+z$ と置くと (6) 式は I_2 を表はし、

$$I_2 = B[(1-z), (1+z)] - B_L[(1-z), (1+z)] \dots\dots\dots (7)$$

このとき z の数学的な範囲は $-1 < z < 1$ となる。そして

$$B[(1-z), (1+z)] = \frac{z\pi}{\sin z\pi}$$

$$B_L[(1-z), (1+z)] = L^{1-z} \left\{ \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1!(2-z)} L - \frac{z(1-z)}{2!(3-z)} L^2 - \dots - \sum \frac{z(1-z)\dots(n-1-z)}{n!(n+1-z)} L^n \right\} \dots (8)$$

また

$$\int_L^1 \ln x \cdot x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{d}{dp} \int_L^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{d}{dp} B[p, q] - \frac{d}{dp} B_L[p, q]$$

である。そして

$$\frac{d}{dp} B[p, q] = B'[p, q] = \frac{\Gamma'[p]\Gamma[q]}{\Gamma[p+q]} \{ \Psi[p] - \Psi[p+q] \} \dots\dots\dots (9)$$

$\Gamma[p]$ などは gamma 関数、 $\Psi[p]$ などは Gauss の Ψ 関数。一方

$$\frac{d}{dp} B_L[p, q] = B'_L[p, q] = \ln L \cdot B_L[p, q] - L^p \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{(1-q)}{1!(p+1)^2} L + \frac{(1-q)(2-q)}{2!(p+2)^2} L^2 + \dots + \sum \frac{(1-q)(2-q)\dots(n-q)}{n!(p+n)^2} L^n \right\} \dots\dots\dots (10)$$

となる。(9), (10) で $p=1-z, q=1+z$ とおくと、それぞれ

$$B'[(1-z), (1+z)] = \frac{z\pi}{\sin z\pi} \{ \Psi[1-z] + \gamma - 1 \} \dots\dots\dots (11)$$

$$B'_L[(1-z), (1+z)] = \ln L \cdot B_L[(1-z), (1+z)] - L^{1-z} \left\{ \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{z}{1!(2-z)^2} L - \frac{z(1-z)}{2!(3-z)^2} L^2 - \dots - \sum \frac{z(1-z)\dots(n-1-z)}{n!(n+1-z)^2} L^n \right\} \dots\dots\dots (12)$$

γ : Euler 常数。従つて、この場合

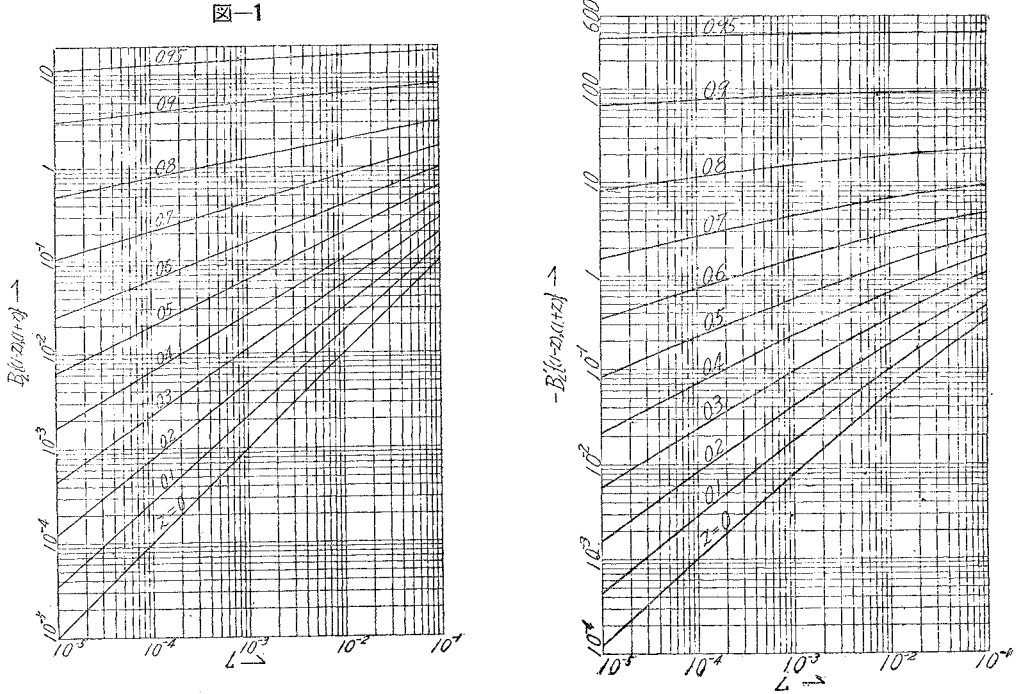
$$I_1 = -\frac{z\pi}{\sin z\pi} \{ \Psi[1-z] + \gamma - 1 \} - B'_L[(1-z), (1+z)] \dots\dots\dots (13)$$

となる。(8) 式から $B_L[(1-z), (1+z)]$ を、(12) 式から $B'_L[(1-z), (1+z)]$ を z と L の一定の範囲で計算したのが 図-1, 図-2 である。!

(b) $q > 0$ かつ p が零および負の整数でない場合

(5) 式で $p=1-z, q=1+z$ とおけば I_2 が求まる

図-2



$$I_2 = \left[\frac{1}{(1-z)} + \frac{(-z)}{1!(2-z)} + \frac{(-z)(1-z)}{2!(3-z)} + \dots + \sum \frac{(-z)(1-z)\dots(n-1-z)}{n!(n+1-z)} \right] - L^{1-z} \left[\frac{1}{(1-z)} + \frac{(-z)}{1!(2-z)} L + \frac{(-z)(1-z)}{2!(3-z)} L^2 + \dots + \sum \frac{(-z)(1-z)\dots(n-1-z)}{n!(n+1-z)} L^n \right] \dots (14)$$

一方 (5) 式より

$$\int_L^1 \ln x \cdot x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = - \left[\frac{1}{p^2} + \frac{(1-q)}{1!(p+1)^2} + \frac{(1-q)(2-q)}{2!(p+2)^2} + \dots + \sum \frac{(1-q)(2-q)\dots(n-q)}{n!(p+n)^2} \right] - \ln L \cdot L^p \left[\frac{1}{p} + \frac{(1-q)}{1!(p+1)} L + \frac{(1-q)(2-q)}{2!(p+2)} L^2 + \dots + \sum \frac{(1-q)(2-q)\dots(n-q)}{n!(p+n)} L^n \right] + L^p \left[\frac{1}{p^2} + \frac{(1-q)}{1!(p+1)^2} L + \frac{(1-q)(2-q)}{2!(p+2)^2} L^2 + \dots + \sum \frac{(1-q)(2-q)\dots(n-q)}{n!(p+n)^2} L^n \right] \dots (15)$$

前と同様に $p=1-z, q=1+z$ と置換すると I_1 を得る。

$$I_1 = \left[\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{(-z)}{1!(2-z)^2} + \frac{(-z)(1-z)}{2!(3-z)^2} + \dots + \sum \frac{(-z)(1-z)\dots(n-1-z)}{n!(n+1-z)^2} \right] - \ln L \cdot L^{1-z} \left[\frac{1}{(1-z)} + \frac{(-z)}{1!(2-z)} L + \frac{(-z)(1-z)}{2!(3-z)} L^2 + \dots + \sum \frac{(-z)(1-z)\dots(n-1-z)}{n!(n+1-z)} L^n \right] + L^{1-z} \left[\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{(-z)}{1!(2-z)^2} L + \frac{(-z)(1-z)}{2!(3-z)^2} L^2 + \dots + \sum \frac{(-z)(1-z)\dots(n-1-z)}{n!(n+1-z)^2} L^n \right] \dots (16)$$

この時 z の数学的な範囲は $-1 < z < +\infty$ となる (ただし整数の場合を除く)

(c) $q > 0$ かつ p が零および負の整数の場合

前と同様に置換すれば、 z が整数の場合である。この時は容易に積分し得る。

z と L の一定の範囲で、以上の式を用いて I_1, I_2 を計算し図表化したのが 図-3, 4, 5, 6 である。

3. 計算例

Lane と Kalinske が Mississippi 河で行なつた観測結果を用いた計算例を示す。

Kármán の一般常数 k は濃度の増大とともに減少することが明らかになっているが、まだ完全に適用できるような一般式はない。同時に、 β についても定量的な法則はない。現状での計算に当つては、それらを速度分布や濃度分布の実際観測より求めるのが良いと考える。Lane と Kalinske の報告には速度分布の観測数値は出ていな

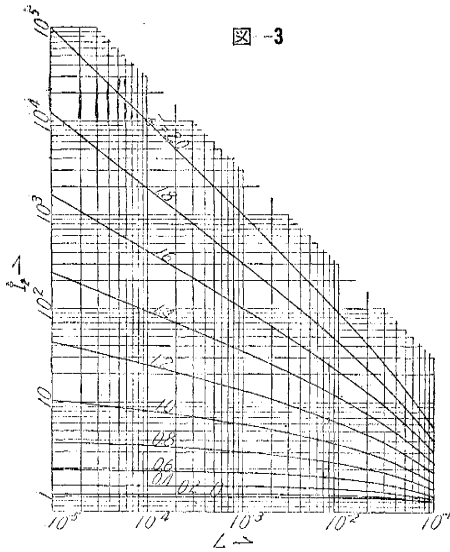


図-3

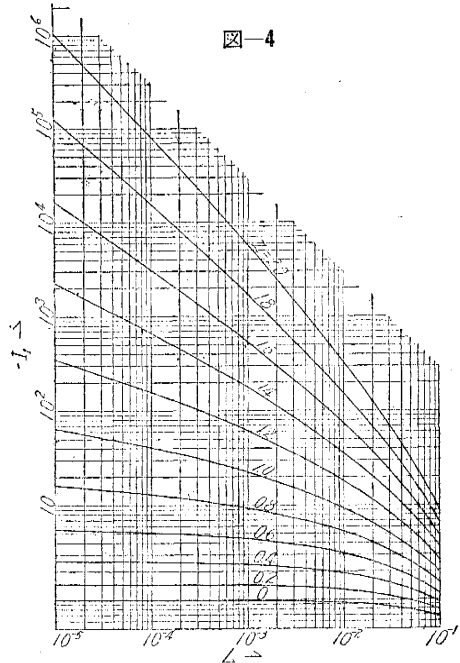


図-4

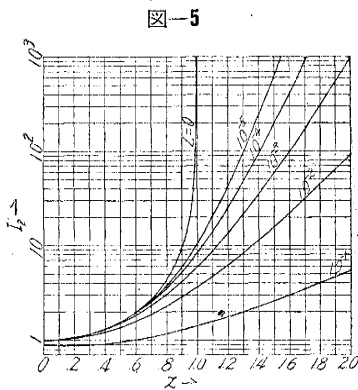


図-5

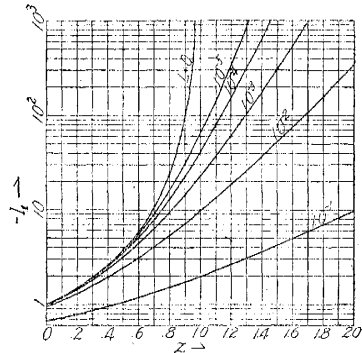


図-6

この計算では k は 0.4 とした。また (1) 式より

$$c \left(\frac{y}{h-y} \right)^z = C_a \left(\frac{a}{h-a} \right)^z = K$$

とおけるから、これより最小自乗法によつて、各粒径範囲に対する z と K を決定した。この結果を示すと 表-1 のごとくである。これを図表化する

と、図-7 のようになる。摩擦速度は水深 33.9 ft, 勾配 0.000071 より計算すると 0.278 ft/sec となる。また平均流速 V は 5.12 ft/sec であるから

$$\frac{kv_m}{v_*} = \frac{kV}{v_*} + 1 = \frac{0.4 \times 5.12}{0.278} + 1 = 8.366$$

次に浮流限界を底面からどの程度の処に取るかを決定するため、流れが粗い境界の流れであるか、滑らかな境界の流れであるかを判別すると、粗い境界の流れであることがわかった。このとき相当粗度 k_s を計算すると

$$\frac{k_s}{h} = e^{-\left(\frac{kv_m}{v_*} - 8.5k \right)} = e^{-4.966} = 0.006972$$

表-1

粒径範囲(mm)	0.85~0.25	0.25~0.075	0.075~0.020	0.020~0.005	0.005以下
z	0.5875	0.3789	0.03512	0.01600	0.01256
K	2.214×10^{-6}	4.069×10^{-6}	4.382×10^{-5}	6.864×10^{-5}	4.903×10^{-5}

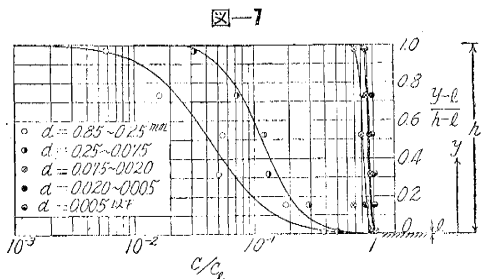


図-7

すなわち

$$k_s = 0.006972 \times 33.9 = 0.2363 \text{ ft}$$

ただし(2)式の $\phi\left(\frac{k_s v_m}{\nu}\right) = 8.5$, 温度の観測値 63°F である。浮流限界は相当粗度の天端までとすると

$$L = \frac{k_s}{2h} = 3.486 \times 10^{-3}$$

表-2

z	$(1-z) \log L$	L^{1-z}	$\frac{1}{1-z}$	$-\frac{z}{1!(2-z)}L$	B_L
0.5875	-1.01378	0.09688	2.424	-0.001	0.2347
0.3789	-1.52645	0.02975	1.610	-0.001	0.0479
0.03512	-2.37135	0.00425	-1.036	-0.000	0.0044
0.01600	-2.41834	0.00382	1.016	-0.000	0.0039
0.01256	-2.42680	0.00228	1.012	-0.000	0.0023

表-3

z	$\ln L \cdot B_L$	$\frac{1}{(1-z)^2}$	$-\frac{z}{1!(2-z)^2}L$	$L^{1-z} ()$	B_L'
0.5875	-1.328	5.88	-0.00	0.569	-1.897
0.3789	-0.271	2.60	-0.00	0.077	-0.348
0.03512	-0.025	1.07	-0.00	0.005	-0.030
0.01600	-0.022	1.03	-0.00	0.004	-0.026
0.01256	-0.013	1.03	-0.00	0.004	-0.017

表-4

z	B	B'	I_1	I_2	q_s
0.5875	1.918	-5.426	-3.529	1.683	5.510×10^{-4}
0.3789	1.282	-2.421	-2.073	1.234	7.916×10^{-4}
0.03512	1.002	-1.062	-1.032	0.998	7.560×10^{-3}
0.01600	1.000	-1.028	-1.022	0.996	1.184×10^{-2}
0.01256	1.000	-1.012	-1.004	0.998	8.494×10^{-3}

場合、浮流限界の取り方が極めて重要となる。浮流限界を土砂粒径のみで決定すると、速度が0に対する y の値より小さくなる場合があつて不合理となり、むしろ相当粗度に関係づけることが良いと考えられる。この計算例では一応相当粗度の天端までとしたのである。

この研究について、種々御指導下つた日本大学小林巖教授ならびに栗津清蔵助教授に厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) H. Rouse: Modern Conception of the Mechanics of Fluid Turbulence, Trans. ASCE, Vol. 102, 1937
- 2) H. Ismail: Turbulent Transfer Mechanism and Suspended Sediment in Closed Channels, Trans. ASCE, Vol. 117, 1952
- 3) E.W. Lane and A.A. Kalinske: Engineering Calculations of Suspended Sediment, Trans. AGU, Vol. 22, 1941
- 4) H.A. Einstein: The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows, U.S. Dept. Agr. Tech. Bul. 1026, 1950
- 5) 吉川秀夫: 浮游流砂量に関する二・三の考察, 土木研究所報告, 83号の2, 昭和27年
- 6) 木村喜代治: Lane-Kalinske による浮游土砂量の厳密解, 新砂防26号, 昭和32年10月
- 7) 前出5.)

$z < 1$ であるから、 I_1, I_2 を計算するために B_L, B_L' を計算すると、表-2, 3をうる。そして I_1, I_2 および q_s を計算すると表-4 のようになる。濃度の観測が重量で表示であるから、重量でした全浮流土砂量は水の単位重量 w (62.4 lbs/ft^3) を掛れば良い。

$$\begin{aligned} \Sigma q_s \cdot w &= 0.02923 \times 62.4 \\ &= 1.824 \text{ lbs/sec-ft} \end{aligned}$$

4. 結 び

I_1, I_2 は共に z が1より小であるとき積分の下限を0としても収束する。このことは、それが beta 関数に置換できることより明らかである。図-5, 6 には $L=0$ の曲線も画いた。この曲線は勿論 $z=1$ で無限大となる。

吉川氏が示したように¹⁾ Depth-integrating typeの採水器を用いた際に、この資料から $C_a \left(\frac{a}{h-a}\right)^z$ の値を求めるのであるが、この場合も I_2 積分が出てくるが、全く同様に計算できる。

I_1, I_2 の曲線からわかるように、 z が1より大であると浮流限界の取り方によつてその積分値が非常に異なつてくる場合がある。これは下限が0のとき発散することからも容易にわかる。従つてこの