

# 時間的に振動する圧力を受ける傾斜管圧力計 の流体力学的特性

正員 増田重臣\*  
准員 山辺春雄\*\*

## A PERIODIC MOTION OF LIQUID IN A INCLINED TUBE MANOMETER

By Sigeomi Masuda, C.E. Member and Haruo Yamabe, C.E. Assoc. Member.

**Synopsis :** If a pressure, which is applied at the end of the manometer's conduit, varies sinusoidally as time proceeds, a steady periodic motion of liquid column is induced in the manometer. In the present paper this periodic motion, the period of which is equal to that of the oscillation of the pressure (a case of subharmonic motions is omitted from the present study.) is analyzed mathematically under the following assumptions, but to simplify the analysis the same dimension is adopted as the diameter of the conduit and the manometer tube; a length of the liquid column is so large in comparison with the diameter of the conduit and the manometer tube that the effect of their bend and ends may be negligible. Moreover, the authors postulate that the motion of liquid is laminar and is free from surface tension.

**要旨** 水理学の各種実験で水の圧力あるいは水位を測るのに傾斜管圧力計が用いられることはしばしばある。この論文は傾斜管圧力計の動的特性の一つ——正弦的に振動する圧力を受ける時を取扱つたものである。

**本文** 本管と同一径の導管をそなえた傾斜管圧力計がある。中の液柱の一端（自由端）は常に一定圧力  $p_0$  にさらされており、他端（圧力端）の圧力（通常は被測定圧力）が時間とともに正弦的に変化するとき、自由端の液面のおこなる定常振動を調べてみよう。ただし液面の動きは圧力変動の週期と同じである場合に限つた。圧力端において質量の交換があるから問題は非線型の性格を帯びてくる。これに反し質量交換のない場合は線型の方程式で記録することができる。

液柱は導管にある部分（図-1 で  $0 < x < l$  の部分）も本管にある部分（同じく  $l < x < \xi$ ）も長さが適当に長く従つて両端及び屈曲部の影響は無視できるものとする。更に液柱の動きは層流であり表面張力の効果も考えないで解析を進めよう。

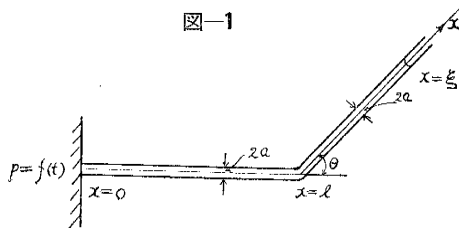


図-1

管の中心軸を  $x$  軸とする円柱座標  $x, r, \varphi$  を取り対応する速度成分を  $u, v_r, v_\varphi$  とし  $x=0, x=l, x=\xi$  をそれぞれ圧力端、屈曲位置、自由端とする。また前記仮定の条件を  $v_r = v_\varphi = 0, \partial/\partial\varphi = 0$  と表現すれば Navier-Stokes の方

程式並びに連続の式は  $t$  を時間として

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, & 0 < x < l, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \theta + \nu \Delta u, & l < x < \xi, \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & d &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned}$$

ここに  $p$ : 圧力,  $\rho$ : 密度,  $\nu$ : 動粘性係数,  $g$ : 重力加速度,  $\theta$ : 傾斜管圧力計本管の水平とのなす角である。今、圧力についての両端の条件および接合の条件として

$$\begin{aligned} x=0: p &= f(t), & x=\xi: p &= p_0, \\ x=l: p(x_-, t) &= p(x_+, t) \end{aligned}$$

を用いると前記諸式より次の  $u$  に関する微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) u = \psi(t), \dots \dots \dots (1)$$

\* 岐阜大学助教授, 土木工学教室    \*\* 岐阜大学助手, 土木工学教室

$$\psi(t) \equiv \frac{\sigma(t)}{\xi} - g \sin \theta, \dots\dots\dots(2)$$

$$\sigma(t) \equiv \frac{f(t) - p_0}{\rho} + gl \sin \theta \dots\dots\dots(3)$$

を得る。ここに  $f(t)$  は圧力端に加えらるる圧力で時間の既知関数である。しかし  $\xi = \xi(t)$  は時間の未知関数でこれを解くのが我々の課題である。(2) および (3) はただ定義をのべたのであるから、この未知量  $u, \xi$  に対し

(1) 以外にもう一つの式が必要である。この要請に答えるのは  $\xi$  と  $u$  を結ぶ連続の条件

$$\frac{d\xi}{dt} = 2 \int_0^a ur dr \dots\dots\dots(4)$$

である。この意味は  $dt$  時間に圧力端  $x=0$  を通して流入した流体の体積

$$2\pi \int_0^a ur dr dt$$

が液面の位置を  $d\xi$  だけ高めるということである。なお  $2a$  は管径である。

Fourier 変換を次の如く定義し

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t) dt = T\{f\}$$

$T\{u\} = U, T\{\psi\} = \Psi$  とおけば、(1) の Fourier 変換は

$$isU(r, s) - \nu \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) U(r, s) = \Psi(s) \dots\dots\dots(5)$$

これを

$$r=0: \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r=a: u=0$$

すなわち

$$r=0: \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad r=a: U=0$$

のもとに解けば

$$U(r, s) = \frac{\Psi(s)}{is} \left\{ \frac{J_0\left(\sqrt{\frac{is}{\nu}} r\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{is}{\nu}} a\right)} - 1 \right\} \dots\dots\dots(6)$$

となる。一方 (4) の Fourier 変換は

$$T \left\{ \frac{d\xi}{dt} \right\} = \frac{2}{a^2} \int_0^a U(r, s) r dr \dots\dots\dots(7)$$

従つて (6) より

$$T \left\{ \frac{d\xi}{dt} \right\} = \frac{\Psi(s)}{is} \frac{J_2\left(\sqrt{\frac{is}{\nu}} a\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{is}{\nu}} a\right)}$$

すなわち (2) により

$$T \left\{ \frac{d\xi}{dt} \right\} = \frac{1}{is} \frac{J_2\left(\sqrt{\frac{is}{\nu}} a\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{is}{\nu}} a\right)} T \left\{ \frac{\sigma(t)}{\xi} - g \sin \theta \right\} \dots\dots\dots(8)$$

となる。ここに  $\sigma(t)$  は  $t$  の既知関数である。

とくに流れを Poiseuille 流れで近似せば  $\xi$  に関する次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + q \frac{d\xi}{dt} = \frac{\sigma(t)}{\xi} - g \sin \theta \dots\dots\dots(9)$$

これの (8) に対応する形式は

$$T \left\{ \frac{d\xi}{dt} \right\} = \frac{a^2}{\nu} \frac{1}{q - \frac{is}{\nu} a^2} T \left\{ \frac{\sigma(t)}{\xi} - g \sin \theta \right\} \dots\dots\dots(10)$$

である。

(9) の誘導は次の如くしてもよい。

$u$  に関する微分方程式 (1) を境界条件

$$r=0: \frac{\partial u}{\partial r}=0, \quad r=a: u=0$$

のもとに変形積分方程式に書きなおせば

$$u(r, t) = \frac{1}{4\nu}(a^2 - r^2)\psi(t) + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a \rho u(\rho, t) K\left(\frac{r}{a}, \frac{\rho}{a}\right) d\rho$$

となる。ここに  $K(x, \xi)$  は変域  $0 \leq x, \xi \leq 1$  で

$$\xi \leq x: K(x, \xi) = \log x, \quad \xi \geq x: K(x, \xi) = \log \xi$$

で与えられる。

これを逐次代入法で解けば

$$u(r, t) = \frac{1}{4\nu}(a^2 - r^2)\psi - \frac{1}{64\nu^2}(a^2 - r^2)(3a^2 - r^2) \frac{d\psi}{dt} + \dots$$

(1), (4) を用いれば次の関係式が成り立つ

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{q\nu}{a^2} \frac{d\xi}{dt} = \psi(t) \cdot 2 \frac{a^2}{\nu} \frac{d\psi}{dt} + O\left(\frac{a^4}{\nu^2} \frac{d^2}{dt^2}\right) \psi$$

今、時間的変動がゆるやか、あるいは粘性が大きい、あるいは管径が小さいと仮定せば、右辺第二項以下を省いてよい。すなわち (9) が得られる。

さて  $f(t)$  が正弦的に変動すると仮定しているから (2) よりみて

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1 e^{i\tau} + \bar{\sigma}_1 \bar{e}^{i\tau}$$

と書くことができる。ただし上に付した一は複素共役量であり

$$\tau = \omega_0 t, \quad \sigma_0 = \xi_0 g \sin \theta, \quad \sigma_1 / \sigma_0 = \beta \epsilon, \quad \epsilon = e^{i\phi}$$

ここに  $\omega$ : 正弦波の角振動数,  $\xi_0$ : 平衡状態 ( $\sigma \equiv \sigma_0$ ) における  $\xi$  の取る値,  $\beta \sigma_0$ :  $\sigma$  の変動成分の振幅,  $\phi$ :  $\sigma$  の位相角である。

通常の傾斜管圧力計の使用範囲では、自由端と圧力端との間の圧力差に比し、変動する成分はかなり小さいと考えられる。換言すれば  $\beta$  は 1 に比しかなり小さいものとしてよい。これに対応し液面の位置  $\xi$  についてもその平衡位置  $\xi_0$  からのずれ  $\xi - \xi_0$  は小さくて高々  $\beta$  の程度であろう。すなわち

$$\xi - \xi_0 = O(\beta)$$

従つて、ここに  $O(1)$  の新変数  $\zeta$  を定義し

$$\xi = \xi_0(1 - \beta\zeta) \dots \dots \dots (11)$$

これを (8) に入れ  $\beta$  のべきで展開すれば

$$\begin{aligned} (s^2 - 1) T'\{\zeta\} &= (\alpha - 1) T'\{\zeta\} + \alpha\beta T'\{\zeta^2\} + \alpha\beta^2 T'\{\zeta^3\} \\ &+ \alpha T'\{(\epsilon e^{i\tau} + \bar{\epsilon} \bar{e}^{i\tau})(\beta\zeta + \beta^2\zeta^2)\} + \alpha T'\{\epsilon e^{i\tau} + \bar{\epsilon} \bar{e}^{i\tau}\} \\ &+ 2 \frac{s^2}{\kappa\sqrt{is}} \frac{J_1(\kappa\sqrt{is})}{J_2(\kappa\sqrt{is})} T'\{\zeta\} + O(\beta^3) \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

ただし  $\alpha = \sigma_0 / \xi_0^2 \omega^2$ ,  $\kappa = \sqrt{\omega a^2 / \nu}$

同様に (10) は  $r = 8/\kappa^2$  として。

$$\begin{aligned} (s^2 - 1) T'\{\zeta\} &= (\alpha - 1) T'\{\zeta\} + \alpha\beta T'\{\zeta^2\} + \alpha\beta^2 T'\{\zeta^3\} \\ &+ \alpha T'\{(\epsilon e^{i\tau} + \bar{\epsilon} \bar{e}^{i\tau})(\beta\zeta + \beta^2\zeta^2)\} + \alpha T'\{\epsilon e^{i\tau} + \bar{\epsilon} \bar{e}^{i\tau}\} \\ &- i\tau s T'\{\zeta\} + O(\beta^3) \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

これは (12) の内の

$$2 \frac{s^2}{\kappa\sqrt{is}} \frac{J_1(\kappa\sqrt{is})}{J_2(\kappa\sqrt{is})}$$

の  $s \rightarrow 0$  の極限を取つたものに等しい。(12) 並びに (13) における  $T'$  の意味は  $\tau$  による Fourier 変換、たとえば

$$T'\{\zeta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\tau} \zeta d\tau$$

をあらわすものである。

$\zeta$  の定常解として  $\sigma$  と同一週期のものを選び次の形を仮定する。簡単のため (13) より解こう

$$\zeta = A + B e^{i\tau} + \bar{B} \bar{e}^{i\tau} + C e^{2i\tau} + \bar{C} \bar{e}^{2i\tau} + D e^{3i\tau} + \bar{D} \bar{e}^{3i\tau} + O(\beta^3) \dots \dots \dots (14)$$

$A, B, C, D, \dots$  の内  $A$  は実数他は複素数で通常

$$A=O(\beta), \quad B=O(1), \quad C=O(\beta), \quad D=O(\beta^2)$$

と考えられる。(14) を (13) に代入し

$$T'\{e^{n i \tau}\} = \sqrt{2\pi} \delta(s+n) \quad \delta: \text{Dirac の } \delta \text{ 関数}$$

なることより  $\delta(s+n) \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  の係数を辺々較べて、

$$-A = (\alpha-1)A + 2\alpha\beta B\bar{B} + \alpha\beta\bar{\varepsilon}B + \alpha\beta\varepsilon B + O(\beta^3), \dots \quad (15)$$

$$O = (\alpha-1)B + i\gamma B + \alpha\varepsilon + 2\alpha\beta(AB + \bar{B}C) + 3\alpha\beta^2 B^2\bar{B} + \alpha\varepsilon(\beta A + 2\beta^2 B\bar{B}) + \alpha\bar{\varepsilon}(\beta C + \beta^2 B^2) + O(\beta^4), \dots \quad (16)$$

$$O = (\alpha-1)\bar{B} - i\gamma\bar{B} + \alpha\bar{\varepsilon} + 2\alpha\beta(A\bar{B} + B\bar{C}) + 3\alpha\beta^2 \bar{B}^2 B + \alpha\bar{\varepsilon}(\beta A + 2\beta^2 B\bar{B}) + 3\alpha\beta^2 \bar{B}^2 B + O(\beta^4), \dots \quad (16')$$

$$3C = (\alpha-1)C + \alpha\beta B^2 + \alpha\varepsilon\beta B + 2i\gamma C + O(\beta^3), \dots \quad (17)$$

$$3\bar{C} = (\alpha-1)\bar{C} + \alpha\beta \bar{B}^2 + \alpha\bar{\varepsilon}\beta \bar{B} - 2i\gamma \bar{C} + O(\beta^3), \dots \quad (17')$$

$$8D = (2-1)D + 2\alpha\beta BC + \alpha\beta^2 B^3 + \alpha\varepsilon(\beta C + \beta^2 B^2) + 3i\gamma D + O(\beta^4) \dots \quad (18)$$

$$8\bar{D} = (\alpha-1)\bar{D} + 2\alpha\beta \bar{B}\bar{C} + \alpha\beta^2 \bar{B}^3 + \alpha\bar{\varepsilon}(\beta \bar{C} + \beta^2 \bar{B}^2) - 3i\gamma \bar{D} + O(\beta^4) \dots \quad (18')$$

$\zeta$  の同調波の成分が  $\cos \tau$  の形で変化するようその位相を定めると、 $\sin \tau$  の係数が零になるから

$$B = \bar{B}$$

1 に比し  $O(\beta^3)$  を無視すれば (15), (16), (16')

$$A = -\beta B(\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2B) \dots \quad (19)$$

$$C = \lambda\alpha\beta(\varepsilon + B)B, \dots \quad (20)$$

$$\bar{C} = \bar{\lambda}\alpha\beta(\bar{\varepsilon} + B)B_0, \dots \quad (20')$$

1 に比し  $O(\beta^4)$  を無視すると (14), (14') は

$$O = c_0 B^3 + c_1 B^2 + c_2 B + c_3 \dots \quad (21)$$

$$O = \bar{c}_0 B^3 + \bar{c}_1 B^2 + \bar{c}_2 B + \bar{c}_3 \dots \quad (21')$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= (2\lambda\alpha - 1)\alpha\beta^2 & c_1 &= \alpha\beta^2(\lambda\alpha - 1)(2\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \\ c_2 &= \alpha - 1 + i\gamma - \varepsilon\alpha\beta^2(\varepsilon + \bar{\varepsilon})\lambda\alpha^2\beta^2, \\ c_3 &= \alpha\varepsilon, \quad 1/\lambda = 4 - \alpha - 2i\gamma \end{aligned} \right\} \dots \quad (22)$$

(21), (21') は  $B, \varepsilon$  を未知数とする連立方程式であり、 $(B, \varepsilon)$  がこの連立方程式の根ならば  $(-B, -\varepsilon)$  もまた根であるという性質がある。両方程式の  $B$  に関する終結式を作り  $B$  を消去し、1 に比し  $\beta^4$  を無視すれば、

$$F^2 K - \beta^2 (EGK - FGH + G^3) = 0 \dots \quad (23)$$

これは  $\varepsilon$  のみに関する方程式である。 $\alpha$  の範囲を通常第一次共振を生ずる  $\alpha=1$  の近傍に限り、 $r$  も適当に小さく  $\alpha-1, r$  とともに  $\beta$  の程度であるとする。 $\alpha$  は復元力を  $r$  は減衰力を規定するパラメーターである。そうすると

$$E = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix}, \quad H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad K = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a_0 = \alpha(2\Re(\lambda) - 1), \quad a_2 = \alpha - 1$$

$$a_1 = \alpha\{3(\alpha\Re(\lambda) - 1)\cos\phi - \Im(\lambda)\alpha\sin\phi\}, \quad a_3 = \alpha\cos\phi,$$

$$b_0 = \alpha(2\Im(\lambda) - 1) \quad b_2 = r$$

$$b_1 = \alpha\{3\alpha\Im(\lambda)\cos\phi + (\Re(\lambda)\alpha - 1)\sin\phi\}, \quad b_3 = \alpha\sin\phi, \quad \varepsilon = e^{i\phi}$$

方程式 (23) は  $\varepsilon$  の偏角  $\phi$  について図式的に解くことができる。こうして求めた  $\varepsilon$  を用い (21) あるいは (21') に代入し  $B$  を決定することができる。実際には両者の虚部である次の方程式を解くことにした。

$$\alpha\beta^2(2\Im(\lambda) - 1)B^3 + \alpha\beta^2\{3\Im(\lambda)\alpha\cos\phi + \Re(\lambda)\alpha - 1\}\sin\phi B^2 + (\Im(\lambda)\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^2\sin 2\phi + r)B + \alpha\sin\phi = 0 \dots \quad (24)$$

これは  $B$  に関する三次方程式であるから容易に解くことができる。

次にもともどもどつて (12) を同じ手法で解いてみる。 $\zeta$  も (14) のごとく仮定する。なお、(12) の右辺の最後の項は

$$\frac{2s^2}{\kappa\sqrt{is}} \frac{J_1(\kappa\sqrt{is})}{J_2(\kappa\sqrt{is})} T'\{\zeta\} = \sqrt{2\pi}\{b(\kappa)B\delta(s+1) + \bar{b}(\kappa)\bar{B}\delta(s-1) + c(\kappa)C\delta(s+2) + \bar{c}(\kappa)\bar{C}\delta(s-2)\}$$

$$+d(\kappa)D \delta(s+3)+\bar{d}(\kappa)\bar{D} \delta(s-3)+\dots\}$$

となる。b, c, d

$$b(\kappa)=\frac{2}{\kappa\sqrt{-i}}\frac{J_1(\kappa\sqrt{-i})}{J_2(\kappa\sqrt{-i})} \quad c(\kappa)=2^2b(\sqrt{2}\kappa), \quad d(\kappa)=3^2b(3\kappa)$$

であり、やはり  $B=\bar{B}$  において前と対応する

$$A=-\beta B(\varepsilon+\bar{\varepsilon}+2B), \dots\dots\dots(25)$$

$$\left. \begin{aligned} C &= \mu\alpha B(\varepsilon+B)B, \\ \bar{C} &= \bar{\mu}\alpha B(\bar{\varepsilon}+B)B, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= z_0B^3+z_1B^2+z_2B+z_3, \\ 0 &= \bar{z}_0B^3+\bar{z}_1B^2+\bar{z}_2B+\bar{z}_3, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$$\left. \begin{aligned} 1/\mu &= 4-\alpha-c(\kappa), \\ z_0 &= (2\Re(\mu)\alpha-1)\alpha\beta^2, \quad z_2=\alpha-1+b(\kappa)-\varepsilon\alpha\beta^2(\varepsilon+\bar{\varepsilon})+\mu\alpha^2\beta^2, \\ z_1 &= (\Re(\mu)\alpha-1)(2\varepsilon+\bar{\varepsilon})\alpha\beta^2, \quad z_3=\alpha\varepsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

$$F'^2K'-\beta^2(E'G'K'+F'G'H'+G'^3)=0, \dots\dots\dots(29)$$

$$E'=\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}, \quad F'=\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{vmatrix}, \quad G'=\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_3 \end{vmatrix}, \quad H'=\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \quad K'=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

が得られ  $\alpha$  なる。前同様  $\alpha$  の範囲を 1 の近くに限り減衰のパラメータ  $b(\kappa)$  が小さく  $\alpha-1+b(\kappa)=O(\beta)$

とすると

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha(2\Re(\mu)\alpha-1), & x_2 &= \alpha-1+\Re(b) \\ x_1 &= \alpha\{3\Re(\mu)\alpha-1\}\cos\phi-\Im(\mu)\alpha\sin\phi, & x_3 &= \alpha\cos\phi \\ y_0 &= \alpha(2\Im(\mu)\alpha-1), & y_2 &= \Im(b), \\ y_1 &= \alpha\{3\Im(\mu)\alpha\cos\phi-(\Re(\mu)\alpha-1)\sin\phi\}, & y_3 &= \alpha\sin\phi \end{aligned}$$

となり、 $B$  を決定する方程式は

$$\begin{aligned} &\alpha\beta^2(2\Im(\mu)-1)B^2+\alpha\beta^2\{3\Im(\mu)\alpha\cos\phi+(\Re(\mu)\alpha-1)\sin\phi\}B^2 \\ &+\{\Im(\mu)\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^2\sin 2\phi+\Im(b)\}B+\alpha\sin\phi=0 \end{aligned}$$

となる。

$b(\kappa)$  については数値計算の便宜上その漸近展開を求めると

$$1/b(\kappa)=1-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-i}I_0(\kappa\sqrt{-i})}{I_1(\kappa\sqrt{-i})}$$

従つて

$$\begin{aligned} 1/b(\kappa) &\sim 1-\frac{\kappa}{2}\exp\{P(\kappa)+iQ(\kappa)\} \\ P(\kappa) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\kappa}-\frac{11}{48}\frac{1}{\kappa^3}+\dots\dots\dots\right) \\ Q(\kappa) &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2\kappa}-\frac{1}{4}\frac{1}{\kappa^2}+\frac{19}{192}\frac{1}{\kappa^3}+\dots\dots\dots\right) \end{aligned}$$

もし  $a=1\text{ cm}$ ,  $\xi_0=5\times 10^2\text{ cm}$ ,  $\nu=10^{-2}\text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $\sin\theta=9.18\times 10^{-2}$ ,  $\omega=0.4\text{ rad/s}$  なる諸元を与えると  $\kappa=6.324$ ,  $r=0.2000$   
 $b=-0.2025+0.3123i$ ,  $c=-0.6071+0.8092i$

となる。

終りに特殊な場合を一、二考察してみよう。 $\alpha=0$  のときは (21), (27) から  $B=0$  が導かれ  $\beta=0$  のときは (21) からは

$$\phi=\tan^{-1}\frac{r}{\alpha-1}, \quad B=-\frac{\alpha}{r}\sin\phi,$$

(27) からは

$$\phi=\tan^{-1}\{\Im(b)/\alpha-1+\Re(\beta)\}, \quad B=-\frac{\alpha}{\Im(b)}\sin\phi$$

数値計算は  $\kappa=6.324$ ,  $\beta=0.2$  を与えて行われ、 $\alpha$  の種々の値に対する  $B$ ,  $\phi$  (同調波の振幅の  $1/\beta$  とその位相

差)とが算出されて、その結果は 図-2, 3 に示してある。しかしこれらの図は本来の意味での共振曲線とは幾らか異なるものである。なぜならば減衰項を規定する  $\alpha$  には外力(圧力端に加えられる圧力)の角振動数  $\omega$  が  $\alpha^2 = \omega a^2 / \nu$  の形ではいつて来ているので  $\omega$  が変れば他の量が一定でも考えている点は別の  $\alpha =$  一定の曲線上に移ってしまうからである。

以上の解析結果よりわかることは次のようである。

(i) 液面の振動の中立点は平衡点でないということ: すなわち  $\xi_0$  を平衡点,  $\langle \xi \rangle$  を  $\xi$  の時間的平均—中立点—とすれば

$$\langle \xi \rangle - \xi_0 = 2\beta^2 \xi_0 B (B + \cos \phi)$$

となり、共振点近くでは  $B$  の絶対値に比し  $\cos \phi$  は小さいから中立点は平衡点より高く位置する。

(ii) 数値計算を始めるに当り  $B$  の三実根の現われる  $\alpha$  の値を期待したが、このような振動の跳躍現象を示唆する  $\alpha$  の領域は現われなかつた。ま

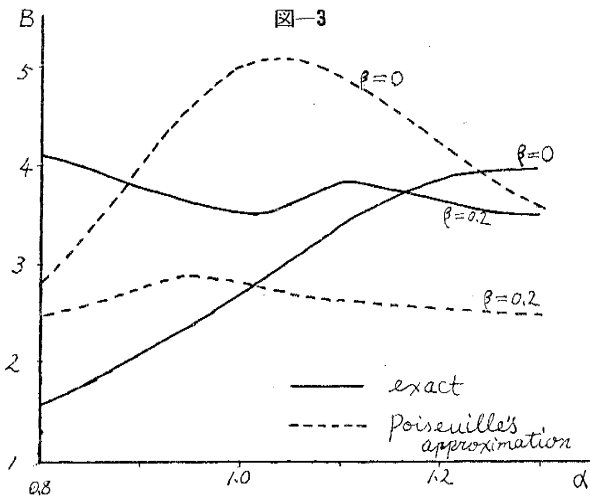
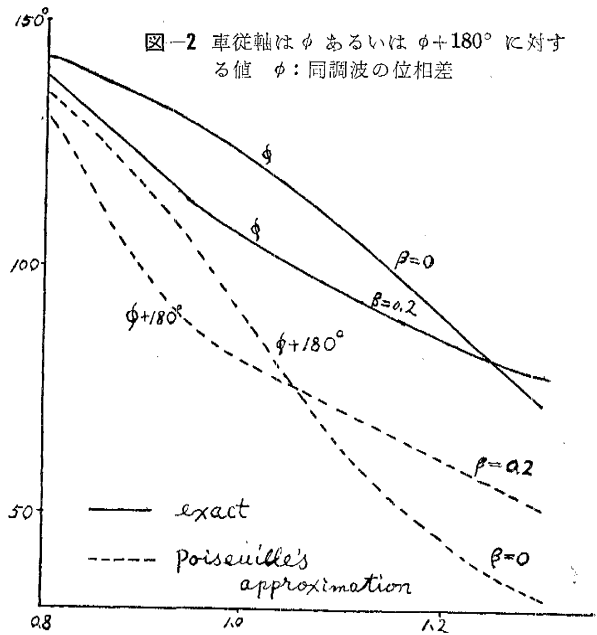


図-3

図-2 車従軸は  $\phi$  あるいは  $\phi+180^\circ$  に対する値  $\phi$ : 同調波の位相差



た  $\alpha=1$  の近くで著しい共振現象も認められなかつた。これは (12), (13) の非線形項の各々が互に影響しあつてこのようなことの生起を妨げているのであろう (図-3)。

(iii) 位相差  $\phi$  については  $\alpha$  より大きく違うことが認められる。(図-2)

なお解析に当つて無視した影響のうち一番大きいと思われる自由端の表面張力の効果も半週期毎に相殺せられ  $\xi$  の成分波の振幅  $A, B, C, \dots$  にはそれほどきかないのではなからうか。いづれにしる解析の妥当性は実験にまたねばならぬ。また解の安定性の分数調波の発生も他日にゆづりたい。過渡現象についてはすでに [1] [2] に、一定長の液柱の振動については [3] に論ぜられている。

参 考 文 献

- 1) J. Okabe & M. Ohji: Liquid rise in a small tube, Reports of the Research Institute for fluid engineering, Kyushu University, Vol. VII No. 1 (1950) pp. 15-43
- 2) 増田, 山辺: 傾斜管圧力計の液面の動き, 岐阜大学工学部 研究・報告 Vol. VII (1957) pp. 1-4
- 3) H. Yamabe & S. Taneda: note on the liquid motion in U-tube, Reports of the Research Institute for fluid engineering, Kyushu University Vol. VII No. 1 (1950) pp. 1-13