

# 多スパン桁の振動数方程式

正員 平 嶋 政 治 \*

## FREQUENCY EQUATIONS OF GIRDERS WITH MANY SPANS

By Masaharu Hirashima, C.E. Member

**Synopsis :** Frequency equations of lateral free vibrations of girders with many spans are reported in this paper.

In general, girders are classified in two types, the one is named "Symmetric Type", and the other "Anti-symmetric Type".

The normal modes of vibrations of the Symmetric Type are divided in the symmetric mode and the skew-symmetric mode, and the frequency equations of these mode are given by the formula (1).

On the other hand, the frequency equation of the Anti-symmetric Type is given by the formula (2).

The general proofs of these foomulae are shown with the several examples.

**要 旨** 一般の多スパン桁（断面一様）の自由横振動を対象とし、その振動数方程式が、第1式および第2式のように表わされることを証明し、このように表わすことにより振動数方程式を形成する行列式の演算が簡単になることを示した。

次に、この考え方を応用して連続桁を解析した。

また、ゲルバー桁にも応用して、数種の形式を取り上げて論じた。

なお、これらの連続桁およびゲルバー桁の極限形式として考えられる桁について考えてみた。

### I. 一般論

桁の横振動を研究するとき、まず取り上げる要素は、自由振動数であり、結局、振動数方程式の解を求めることが当面の問題となる。

一般に、振動数方程式は行列式の形で与えられるが、スパンの数またはヒンジの数が多くなるとその演算はかなり面倒になる。

そこで、行列式の形を簡単にすることを試みた。

まず、一般の多スパン桁を大別して、対称軸を持つ形式と持たない形式との2つに分ける。

ここにいう対称性はスパン方向についてである（図-1 および 図-4、図-5 参照）。

最初に、対称軸を持つ形式の桁について考察する。このような形式の桁の正規振動型は、対称振動型と斜対称振動型とに分けて解析することができ、振動数方程式は、それぞれ第1式のような形をとることがわかる。

$$\begin{Bmatrix} T(kl_a) \\ C(kl_a) \end{Bmatrix} = F(kl_b, kl_c, \dots) \dots\dots\dots (1)$$

また、対称軸を持たない形式の桁の振動数方程式を考察すると、この場合には、第2式のような形をとることがわかる。

$$C(kl_a) = F'(kl_b, kl_c, \dots) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $T(kl) = \text{Tanh}(kl) + \text{Tan}(kl)$

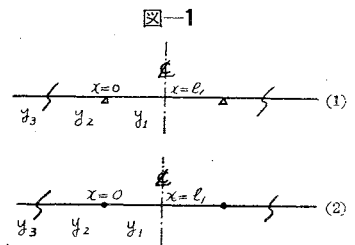
$$C(kl) = \text{Coth}(kl) - \text{Cot}(kl)$$

まず、対称軸を持つ形式の場合に、振動数方程式が、第1式のように表わされることを示す。

多スパン桁を、図-1 の (1)、(2) のような2組に分けて考察する。

第1の組は、対称軸（中心線）の隣りが支持点で始まる形式であり、第2の組は、ヒンジ点で始まる形式である。

さて、中央点における境界条件を  $A, B, y_1$  と  $y_2$  との接続点における境界



\* 早稲田大学助教授，理工学部土木工学科

条件を,  $C, D, E, F$ , また  $y_2$  と  $y_3$  との接続点における境界条件を,  $G, H, I, J$  (このように接続点において4コづつ条件があるが, もし  $y_2$  の一端が端末となれば条件は2コ, すなわち  $G, H$ ) とすれば, 振動数方程式は, 第3式のような行列式の形で与えられる。なお, 境界条件  $ABCD$ .....等, また行列式の  $A_s', B_s', C_s', D_s'$ .....等については, 第5式, 第7式等を参照されたい。

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 & D_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & E_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 & H_9 & H_{10} & H_{11} & H_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

第3式を整理すると, 第4式がえられる。

$$\begin{aligned} & \alpha_{15}(A_2B_2C_3 - A_2B_3C_4 + A_3B_2C_4 - A_3B_1C_2 + A_4B_3C_2 - A_4B_2C_3) \\ & + \alpha_{26}(A_1B_3C_4 - A_1B_4C_3 + A_2B_4C_1 - A_3B_1C_4 + A_4B_1C_3 - A_4B_2C_1) \\ & + \alpha_{35}(A_1B_4C_2 - A_1B_2C_4 + A_2B_1C_4 - A_2B_4C_1 + A_3B_2C_1 - A_4B_1C_2) \\ & + \alpha_{45}(A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1) \\ & = 0 \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

ただし

$$\alpha_{i5} = (D_i \cdot \alpha - E_i \cdot \beta)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} E_5 & E_6 & E_7 & E_8 & 0 & 0 & \dots \\ F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & 0 & 0 & \dots \\ G_5 & G_6 & G_7 & G_8 & 0 & 0 & \dots \\ H_5 & H_6 & H_7 & H_8 & H_9 & H_{10} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad \beta = \begin{vmatrix} D_5 & D_6 & D_7 & D_8 & 0 & 0 & \dots \\ F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & 0 & 0 & \dots \\ G_5 & G_6 & G_7 & G_8 & 0 & 0 & \dots \\ H_5 & H_6 & H_7 & H_8 & H_9 & H_{10} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

さて, ここで, 演算の便宜を考え,  $y_1$  と  $y_2$  との接続点を座標の原点に選ぶことにする。こうすると, この接続点における境界条件,  $C, D, E, F$ , は 図-1 (1) の形式の場合に, 第5式 のようになる。

- すなわち,  $C : y_1 = 0$
- $D : y_1' = y_2'$
- $E : y_1'' = y_2''$
- $F : y_2 = 0$

従つて,

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 1, & D_1 &= 0, & E_1 &= 1 \\ C_2 &= 0, & D_2 &= 1, & E_2 &= 0 \\ C_3 &= 1, & D_3 &= 0, & E_3 &= -1 \\ C_4 &= 0, & D_4 &= 1, & E_4 &= 0 \\ & D_5 &= 0, & E_5 &= -1, & F_5 &= 1 \\ & D_6 &= -1, & E_6 &= 0, & F_6 &= 0 \\ & D_7 &= 0, & E_7 &= 1, & F_7 &= 1 \\ & D_8 &= -1, & E_8 &= 0, & F_8 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

- なお,  $(y)_S = S_i + S_{i+1} + S_{i+2} + S_{i+3}$
- $y_1$  区間に対しては,  $i = 1$
- $y_2$  区間に対しては,  $i = 5$
- $y_3$  区間に対しては,  $i = 9$

これらの値を, 第4式に代入すると, 第6式のように簡単になる。

$$\begin{aligned} & \alpha(-A_1B_1 + A_3B_4 + A_4B_1 - A_4B_3 + A_1B_2 + A_2B_3 - A_2B_1 - A_3B_2) \\ & - \beta(A_2B_4 - A_4B_2 + A_2B_4 - A_4B_2) = 0 \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

さて, ここで, 対称振動型の場合の中央点 ( $x=l_1$ ) における境界条件を考えると, 第7式 のようになる。

$$\begin{array}{l}
 A : y_1' = 0 \qquad B : y_1''' = 0 \\
 \text{従つて, } \left. \begin{array}{l} A_1 = \text{Sinh } kl_1, \quad B_1 = \text{Sinh } kl_1 \\ A_2 = \text{Cosh } kl_1, \quad B_2 = \text{Cosh } kl_1 \\ A_3 = -\text{Sin } kl_1, \quad B_3 = \text{Sin } kl_1 \\ A_4 = \text{Cos } kl_1, \quad B_4 = -\text{Cos } kl_1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (7)
 \end{array}$$

これらの値を第6式に代入し整理すると、第8式がえられる。

$$\alpha(\text{Sinh } kl_1 \times \text{Cos } kl_1 + \text{Cosh } kl_1 \times \text{Sinkl}_1) + 2\beta(\text{Cosh } kl_1 \times \text{Cos } kl_1) = 0$$

$$\therefore \text{Tanh } kl_1 + \text{Tan } kl_1 = -\frac{2\beta}{\alpha}$$

または、 $T(kl_1) = F_1(kl_2, kl_3, \dots)$  ..... (8)

次に、斜対称振動型の場合を考えると、中央点 ( $x=l_1$ ) における境界条件は、第9式のようになる。

$$\begin{array}{l}
 A : y_1 = 0 \\
 B : y_1'' = 0 \\
 \text{従つて } \left. \begin{array}{l} A_1 = \text{Cosh } kl_1, \quad B_1 = \text{Cosh } kl_1 \\ A_2 = \text{Sinh } kl_1, \quad B_2 = \text{Sinh } kl_1 \\ A_3 = \text{Cos } kl_1, \quad B_3 = -\text{Cos } kl_1 \\ A_4 = \text{Sin } kl_1, \quad B_4 = -\text{Sin } kl_1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (9)
 \end{array}$$

これらの値を第6式に代入し整理すると、第10式がえられる。

$$\alpha(\text{Cosh } kl_1 \times \text{Sin } kl_1 - \text{Sinh } kl_1 \times \text{Cos } kl_1) + 2\beta(\text{Sinh } kl_1 \times \text{Sin } kl_1) = 0$$

$$\therefore \text{Coth } kl_1 - \text{Cot } kl_1 = -\frac{2\beta}{\alpha}$$

または、 $C(kl_1) = F_1(kl_2, kl_3, \dots)$  ..... (10)

第8式および第10式より、図-1(1)の形式の場合には、その振動数方程式が、第1式のように表わされる事が証明された。

次に、図-1(2)の形式、すなわち、中央点の隣りがヒンジ点で始まる場合を考える。

まず、 $y_1$  と  $y_2$  との接続点 (座標原点) における境界条件は、第11式のようになる。

$$\begin{array}{l}
 \text{すなわち, } C : y_1'' = 0 \\
 D : y_1 = y_2 \\
 E : y_1''' = y_2''' \\
 F : y_2'' = 0 \\
 \text{従つて, } \left. \begin{array}{l} C_1 = 1, \quad D_1 = 1, \quad E_1 = 0 \\ C_2 = 0, \quad D_2 = 0, \quad E_2 = 1 \\ C_3 = -1, \quad D_3 = 1, \quad E_3 = 0 \\ C_4 = 0, \quad D_4 = 0, \quad E_4 = -1 \\ \quad \quad \quad D_5 = -1, \quad E_5 = 0, \quad F_5 = 1 \\ \quad \quad \quad D_6 = 0, \quad E_6 = -1, \quad F_6 = 0 \\ \quad \quad \quad D_7 = -1, \quad E_7 = 0, \quad F_7 = -1 \\ \quad \quad \quad D_8 = 0, \quad E_8 = 1, \quad F_8 = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)
 \end{array}$$

これらの値を、第4式に代入し整理すると、第12式がえられる。

$$\begin{aligned}
 &2\alpha(A_4B_2 - A_2B_4) \\
 &\quad -\beta(A_1B_3 + A_3B_1 - A_1B_3 - A_1B_1 + A_1B_2 - A_2B_1 - A_2B_3 + A_3B_2) = 0 \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

さて、ここで、対称振動型の場合の中央点 ( $x=l_1$ ) における境界条件を考えると、前出の第7式で与えられるから、それらの値を、第12式に代入し整理する。

$$\begin{aligned}
 &2\alpha(\text{Cosh } kl_1 \times \text{Cos } kl_1) \\
 &\quad +\beta(\text{Sinh } kl_1 \times \text{Cos } kl_1 + \text{Cosh } kl_1 \times \text{Sin } kl_1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Tanh } kl_1 + \text{Tah } kl_1 = -\frac{2\alpha}{\beta}$$

または、 $T(kl_1) = F_2(kl_2, kl_3, \dots)$  ..... (13)

次に、斜対称振動型の場合の、中央点 ( $x=l_1$ ) における境界条件、第9式を、第12式に代入し整理すると

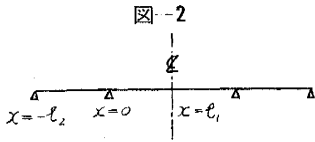
第 14 式がえられる。

$$2\alpha(\text{Sinh } kl_1 \times \text{Sin } kl_1) + \beta(\text{Cosh } kl_1 \times \text{Sin } kl_1 - \text{Sinh } kl_1 \times \text{Cos } kl_1) = 0$$

$$\therefore \text{Coth } kl_1 - \text{Cot } kl_1 = -\frac{2\alpha}{\beta}$$

または、 $C(kl_1) = F_2(kl_2, kl_3, \dots)$  ..... (14)

第 13 式 および 第 14 式 より、図-1 (2) の形式の場合には、その振動数方程式が、第 1 式 のように表わされることが証明された。



以上に、対称軸を持つ多スパン桁の振動数方程式が、一般に第 1 式 で表わされることを示したが、次に、例題により演算を実施してみる。

先ず、図-1 (1) の形式の桁の例題として、図-2 のような 3 スパン連続桁について考える。

$x = -l_2$  における境界条件、 $G, H$  は 第 15 式 のようになる。

すなわち、 $G : y_2 = 0$

$H : y_2'' = 0$

$$\left. \begin{aligned} G_5 &= \text{Cosh } kl_2, & H_5 &= \text{Cosh } kl_2 \\ G_6 &= -\text{Sinh } kl_2, & H_6 &= -\text{Sinh } kl_2 \\ G_7 &= \text{Cos } kl_2, & H_7 &= -\text{Cos } kl_2 \\ G_8 &= -\text{Sin } kl_2, & H_8 &= \text{Sin } kl_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

従つて、 $\alpha = 2(G_6 H_5 - G_5 H_6) = -4(\text{Sinh } kl_2 \times \text{Sin } kl_2)$

$$\beta = (G_7 H_6 - G_6 H_7 + G_8 H_7 - G_7 H_8 + G_5 H_8 - G_8 H_5) = -2(\text{Cosh } kl_2 \times \text{Sin } kl_2 - \text{Sinh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2)$$

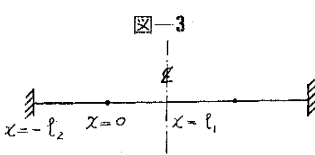
$$\therefore F_1 = -\frac{2\beta}{\alpha} = -(\text{Coth } kl_2 - \text{Cot } kl_2) = -C(kl_2)$$

振動数方程式は、対称振動型、斜対称振動型に対してそれぞれ第 16 式 のようになる。

$$\left. \begin{aligned} T(kl_1) \\ C(kl_1) \end{aligned} \right\} = -C(kl_2) \dots\dots\dots (16)$$

次に、図-1 (2) の形式の桁の例題として、図-3 のような桁を考える。

$x = -l_2$  における境界条件、 $G, H$  は 第 17 式 のようになる。



すなわち、 $G : y_2 = 0$        $H : y_2' = 0$

$$\left. \begin{aligned} G_5 &= \text{Cosh } kl_2, & H_5 &= -\text{Sinh } kl_2 \\ G_6 &= -\text{Sinh } kl_2, & H_6 &= \text{Cosh } kl_2 \\ G_7 &= \text{Cos } kl_2, & H_7 &= \text{Sin } kl_2 \\ G_8 &= -\text{Sin } kl_2, & H_8 &= \text{Cos } kl_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

従つて、 $\alpha = 2(1 + \text{Cosh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2)$

$$\beta = 2(\text{Sinh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2 - \text{Cosh } kl_2 \times \text{Sin } kl_2)$$

$$\therefore F_2 = -\frac{2\alpha}{\beta} = -\frac{2(1 + \text{Cosh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2)}{(\text{Sinh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2 - \text{Cosh } kl_2 \times \text{Sin } kl_2)}$$

振動数方程式は、対称振動型、斜対称振動型に対してそれぞれ、第 18 式 のようになる。

$$\left. \begin{aligned} T(kl_1) \\ C(kl_1) \end{aligned} \right\} = F_2(kl_2) \dots\dots\dots (18)$$

上述のように、この考え方を適用することにより、行列式の計算は、非常に楽になり簡単に振動数方程式が求められることがわかる。

次に、第 8 式 ならびに 第 10 式、および 第 13 式 ならびに 第 14 式 を演算に便利な形に直してみる。

先ず、 $\alpha, \beta$  の各行列式に、 $E_5 \sim E_8$  および  $F_5 \sim F_8$  の値を代入し整理する。

最初に、図-1 (1) の形式の桁の場合について述べる。

$$\alpha = 2r_{68}$$

$$\beta = r_{56} - r_{58} + r_{67} + r_{78}$$

$$\text{従つて、 } F_1 = -\frac{2\beta}{\alpha} = -\frac{r_{56} - r_{58} + r_{67} + r_{78}}{r_{68}} \dots\dots\dots (19)$$

次に、図-1 (2) の桁の場合について考える。

$$\alpha = r_{56} + r_{58} - r_{67} + r_{78}$$

$$\beta = -2r_{68}$$

$$\text{従つて、 } F_2 = -\frac{2\alpha}{\beta} = -\frac{r_{56} + r_{58} - r_{67} + r_{78}}{r_{68}} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 $r_{ij} (i=5,6,7, j=6,7,8)$  は第 21 式のような行列式である。

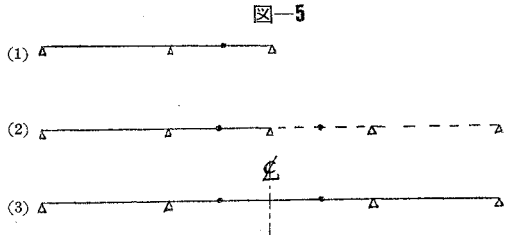
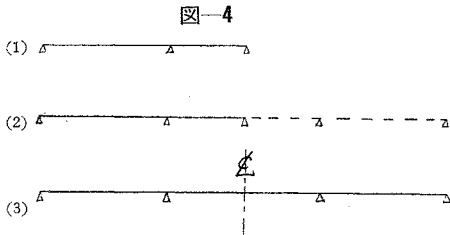
$$r_{ij} = \begin{vmatrix} G_i & G_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots \\ H_i & H_j & H_9 & H_{10} & H_{11} & H_{12} & 0 & 0 & \dots\dots\dots \\ I_i & I_j & I_9 & I_{10} & I_{11} & I_{12} & 0 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & J_9 & J_{10} & J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & K_9 & K_{10} & K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & L_9 & L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & \dots\dots\dots \end{vmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

$i=5,6,7$   
 $j=6,7,8$  ( $i \neq j$ )

結局、振動数方程式を求めめるためには、行列式  $r_{ij}$  を求めればよく、この行列式は、第 3 式のような振動数方程式を与える行列式より 6 行 6 列 だけ少なく演算の手数は簡略になる。

以上に、対称軸を持つ形式の多スパン桁の振動数方程式の形について述べたが、次に、対称軸を持たない形式の多スパン桁を解析する。

このような形式の桁の場合には、図-4、図-5 に示すように仮想的に桁を延長して対称軸を持つ形式に直して解析するとその振動数方程式が、第 2 式のように表わされることがわかる。



境界条件を考えると、図-4、図-5 の (1) の形式の桁の振動数方程式は、それぞれ同図の (3) の形式の桁の斜対称振動型の場合の振動数方程式によつて与えられることがわかる。

従つて、対称軸を持たない形式の多スパン桁の場合には、その振動数方程式が、第 2 式のように表わされることが前述の対称軸を持つ形式の場合の証明結果より容易に知ることが出来る。

II. 連続桁グループ

ここでは、先ず、図-6 に示すような 3 スパン連続桁および一般の 3 スパン連続桁の振動数方程式について考え、次に、これらの形式の桁の極限形式として考えられる数種の桁について述べる。

この極限移行はもちろん等断面桁の場合においてである。

なお、連続桁については、S. Timoshenko がその著書<sup>1)</sup> で一般的に講述しているが、著者は前述のような別な立場から考察する。

先ず、図-6 (1) の 3 スパン連続桁の振動数方程式は、対称振動型、斜対称振動型に対して、第 22 式 のようになる。

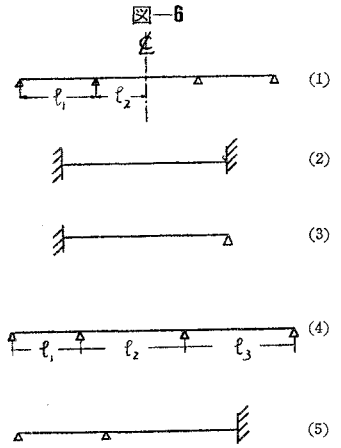
$$\begin{matrix} T(kl_2) \\ C(kl_2) \end{matrix} = F(kl_1) \dots\dots\dots (22)$$

$$F(kl_1) = -C(kl_1)$$

次に、この桁の極限形式を考える。

すなわち、 $l_1 \rightarrow 0$  の状態は、図-6 (2) のような両端固定支持桁であり、この場合の振動数方程式は、対称振動型、斜対称振動型に対して、第 23 式 のようになる。

$$\begin{matrix} T(kl_2) \\ C(kl_2) \end{matrix} = 0 \dots\dots\dots (23)$$



また、 $l_2 \rightarrow 0$  の状態を考えると、図-6 (3) のような、1 端固定支持、他端単純支持の桁となり、振動数方程式は第 24 式 のようになる。

$$C(kl_1) = 0 \dots\dots\dots (23)$$

これは、前述の両端固定支持桁の斜対称振動型と同一境界条件であることから容易に推察されることであり、また、第 22 式、第 23 式 より、対称軸を持つ形式の場合には、第 1 式 の形で、また対称軸を持たない形式の場合には第 2 式 の形でその振動数方程式が与えられる簡単な例題である。

次に、図-6 (4) に示すような、一般的な 3 スパン連続桁について考える。

この形式は、対称軸を持たない場合であり、計算の結果、振動数方程式は、第 24 式 のようになる。

$$C(kl_1) = F(kl_2, kl_3) \dots\dots\dots (24)$$

$$F(kl_2, kl_3) = \frac{B^2(kl_2) - C^2(kl_2) - C(kl_2) \cdot C(kl_3)}{C(kl_2) + C(kl_3)}$$

$$B(kl) = \text{Cosech } kl - \text{Cosec } kl$$

第 24 式 において、 $l_3 \rightarrow 0$  の極限移行をすると、図-6 (5) のような、2 スパン連続桁が考えられ、その振動方程式は、第 25 式 のようになる。

$$C(kl_1) = F(kl_2) \dots\dots\dots (25)$$

$$F(kl_2) = \frac{B^2(kl_2) - C^2(kl_2)}{C(kl_2)}$$

更らに、第 25 式 において、 $l_2 \rightarrow 0$  または  $l_1 \rightarrow 0$  の極限移行をすれば、それぞれ、図-6 (3)、または (2) の状態が考えられ、それらの結果が、前出の結果と一致することは容易にわかる。ただし、(2) の場合、前出の振動数方程式、第 23 式 の  $l_2$  は、スパンの半分の長さであり、第 25 式 の極限形式における  $l_2$  はスパンの全長である。

さきに、連続桁については、S. Timoshenko がその著書で解析していることを述べたが、ここで、著者の結果と比較してみる。

S. Timoshenko は、一般の 3 スパン連続桁の振動数方程式として第 26 式 を与えている。

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 + \varphi_3) = \psi_2^2 \dots\dots\dots (26)$$

ここに  $\varphi_r = \text{Coth } kl_r - \text{Cot } kl_r = C(kl_r)$

$$\psi_r = \text{Cosech } kl_r - \text{Cosec } kl_r = B(kl_r)$$

さて、著者が論じているような、対称軸を持つ場合には、 $\varphi_1 = \varphi_3$  であるから、第 26 式 は第 27 式 のようになる。

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^2 = \psi_2^2 \dots\dots\dots (27)$$

従つて  $\left. \begin{matrix} (\varphi_1 + \varphi_2) = \psi_2 \\ \text{または} & (\varphi_1 + \varphi_2) = -\psi_2 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (28)$

この第 28 式 の第 1 式および第 2 式がそれぞれ、前出の第 22 式 の第 1 式および第 2 式に相当することは、簡単な演算により直ちにわかる。ただし、S. Timoshenko の  $l_2$  は中央スパンの全長であり、著者の  $l_2$  は中央スパンの長さの半分である。

III. ゲルバー桁グループ

図-7 (1) に示すような 3 スパン・ゲルバー桁の振動数方程式は、対称振動型、斜対称振動型の場合に対して第 29 式 のようになる。

$$\left. \begin{matrix} T(kl_1) \\ C(kl_1) \end{matrix} \right\} = F(kl_2, kl_3) \dots\dots\dots (29)$$

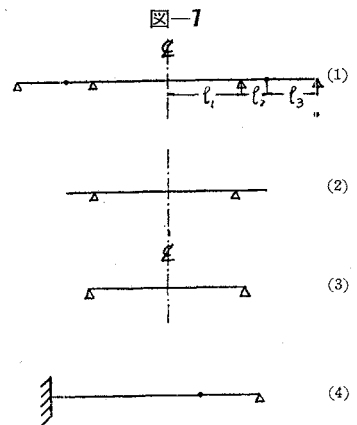
$$F(kl_2, kl_3) = \frac{2A(kl_2) - C(kl_2) \cdot C(kl_3)}{C(kl_2) + C(kl_3)}$$

ここに、

$$A(kl) = \text{Cosech } kl_2 \times \text{Cosec } kl_2 + \text{Coth } kl_2 \times \text{Cot } kl_2$$

図-7 (1) のグループとして、同図の (2), (3) のような桁が考えられそれらの振動数方程式は、それぞれ第 29 式 の  $l_3 \rightarrow 0, l_2 \rightarrow 0$  の極限形式を考えることによつて求められる。

すなわち、(2) の両端張出桁の場合は、対称振動型、斜対称振動型に対して、第 30 式 のような振動数方程式がえられる。



$$\left. \begin{matrix} T(kl_1) \\ C(kl_1) \end{matrix} \right\} = F(kl_2) \dots\dots\dots(30)$$

$$F(kl_2) = \frac{2A(kl_2)}{C(kl_2)}$$

ここで、両端張出桁の特別な場合として、両張出先端に集中質量 ( $M$ ) が存在するときの振動数方程式を求めると、第 31 式 のようになる。

$$\left. \begin{matrix} T(kl_1) \\ C(kl_1) \end{matrix} \right\} = F(kl_2, M, m) \dots\dots\dots(31)$$

$$F(kl_2, M, m) = \frac{2A(kl_2) - 2E \cdot C(kl_2)}{C(kl_2) + 2E}$$

$$E = (M/ml_2) \cdot kl_2$$

$m$  : 桁の単以長さ当りの質量

さて、図-1 (1) のゲルバー桁の吊桁質量の半分を、集中質量 ( $M$ ) として張出先端に作用させた桁を考えると、第 31 式 は、第 32 式 のように変形される。ただし、同図 (1) のゲルバー桁は全長にわたり等断面とする。

$$\left. \begin{matrix} T(kl_2) \\ C(kl_1) \end{matrix} \right\} = F(kl_2, kl_3) \dots\dots\dots(32)$$

$$F(kl_2, kl_3) = \frac{2A(kl_2) - C(kl_2) \cdot kl_3}{C(kl_2) + kl_3}$$

第 29 式 および 第 32 式 を比較し、ゲルバー桁とその吊桁を集中質量に置換した桁との自由振動数の差異を理論的に考察することができるが、これについてはその応用と共に稿を改めて報告する。

次に 図-1 (3) の単純支持桁を考えてみる。これは、 $l_2 \rightarrow 0$  更らに  $l_3 \rightarrow 0$  の極限形式であり、振動数方程式は、第 33 式 のようになる。

$$\left. \begin{matrix} T(kl_1) \\ C(kl_1) \end{matrix} \right\} = \infty \dots\dots\dots(33)$$

また、別に 図-1 (4) のような形式の桁を考えてみる。これは、 $l_1 \rightarrow 0$  の極限状態を考えることによつて近似できる。この場合の振動数方程式は 第 34 式 のようになる。

$$C(kl_3) = F(kl_2) \dots\dots\dots(34)$$

$$F(kl_2) = \frac{2(1 + \text{Cosh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2)}{\text{Cosh } kl_2 \times \text{Sin } kl_2 - \text{Sinh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2}$$

次に、図-8 (1) に示すようなゲルバー桁を考える。振動数方程式は、第 35 式 で与えられる。

$$\left. \begin{matrix} T(kl_3) \\ C(kl_3) \end{matrix} \right\} = F(kl_2, kl_1) \dots\dots\dots(35)$$

$$F(kl_2, kl_1) = \frac{2A(kl_2) - C(kl_2) \cdot C(kl_1)}{C(kl_2) + C(kl_1)}$$

さて、ここで、図-8 (2) に示すような桁を考えてみる。これは、 $l_1 \rightarrow 0$  の極限状態であるから、その振動数方程式は、第 36 式 のようになる。

$$\left. \begin{matrix} T(kl_3) \\ C(kl_3) \end{matrix} \right\} = F(kl_2) \dots\dots\dots(36)$$

$$F(kl_2) = \frac{2A(kl_2)}{C(kl_2)}$$

または 
$$= \frac{2(1 + \text{Cosh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2)}{\text{Cosh } kl_2 \times \text{Sin } kl_2 - \text{Sinh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2}$$

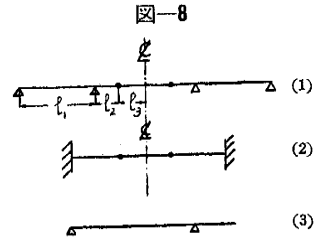
この結果は、前出の例題と一致した 図-1 (4) はこの、図-8 (2) の斜対称振動型であることから、これらの結果の対応を知ることができる。

次に、図-8 (3) の片側張出桁を考える。この場合の振動数方程式は、第 37 式 のようになる。

$$C(kl_1) = F(kl_2) \dots\dots\dots(37)$$

$$F(kl_2) = \frac{2A(kl_2)}{C(kl_2)}$$

または 
$$= \frac{2(1 + \text{Cosh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2)}{\text{Cosh } kl_2 \times \text{Sin } kl_2 - \text{Sinh } kl_2 \times \text{Cos } kl_2}$$



ここで、再び、片側張出桁の特別な場合として張出先端に、集中質量 ( $M$ ) が作用するときの振動数方程式を求めると、第 38 式 のようになる。

$$C(kl_1) = F(kl_2, M, m) \dots\dots\dots(38)$$

$F(kl_2, M, m)$  : 第 31 式 のときと同じ

更らに、図-8 (3) の張出部分の長さ、 $l_2 \rightarrow 0$  の状態を考えると、スパン  $l_1$  なる単純支持桁となりこの場合の振動数方程式は、第 39 式 のようになる。

$$C(kl_1) = \infty \dots\dots\dots(39)$$

この第 39 式 は、前出の第 33 式 すなわち、スパンの長さ  $2l_1$  なる単純支持桁の斜対称振動型に相当している。

なお、これら第 33 式 と第 39 式 とは、単純支持桁を解析する場合に、対称軸を考えるとときと考えないときとの相異を示す例であり、前者は第 1 式 の形式で後者は第 2 式 の形式でそれらの振動数方程式が表わされる。

結 語

- (1) 多スパン桁の振動数方程式を統一的に考察してみた。すなわち、対称軸を持つ形式のときは、第 1 式 でそれらの振動数方程式が表わされる。
- (2) このような考え方で、振動数方程式を形成する行列式を整理すると、結局、第 21 式 のような行列式を解けばよいことがわかり演算の簡略化ができた。
- (3) 数種の連続桁およびゲルバー桁に応用してみた。また、それらの桁の極限移行を行ひ、振動数方程式を考察した。なお、引続いて多スパン桁の自由横振動を解析している。

参 考 文 献

- 1) S. Timoshenko: Vibration Problems in Engineering.
- 2) 妹沢克雄: 振動学

(昭.33.1.23)

昭和 33 年 9 月 5 日 印刷	土木学会論文集第 58 号	定価 120 円 (〒 20 円)
昭和 33 年 9 月 10 日 発行		
編 集 者	東京都新宿区四谷 1 丁目	国 分 正 胤
印 刷 所	東京都港区赤坂溜池 5 番地	株式会社 技 報 堂
<p>発 行 所 社 団 土 木 学 会</p> <p>東京 都 新 宿 区 四 谷 1 丁 目 電 話 (35) 5130・5138・5139 振 替 東 京 16828 番</p>		