

連続箱桁の Shear Lag について

—横肋材の剛性を無限大と考えた時の一解法—

正員 小松 定夫*

ON SHEAR LAG IN CONTINUOUS BOX GIRDER

By Sadao Komatsu, C.E. Member

Synopsis : On the basis of the sufficiently accurate approximate solutions obtained by using generalized Galerkin's method, both the stress distribution and the variation of shear lag extending over the total length are investigated with respect to the continuous box girder, having the steel deck.

Since it is readily seen that this phenomenon has a general tendency to become violent at the middle supports, the practical formula for design is favorably derived with the object of determining the remarkable maximum bending stress in the vicinity of these supports.

Furthermore, to make clear the relation between shear lag and the cross-sectional shape of the box girder, the ratio of the maximum bending stress to the fiber stress given by means of primary bending theory is calculated against the various proportions among the cross-sectional dimensions.

1. 緒 言

鋼構造物、鉄筋コンクリート構造物などの各種構造物に用いられる桁のフランジの有効幅についての理論的研究は Kármán および Bortsch に端を発し、その後 J.N. Goodier¹⁾、E. Reissner²⁾、E. Chwalla³⁾ は、平面応力問題として、部材内の応力分布が初等バリ理論からどのように偏倚するかを調べた。さらに E. Chwalla⁴⁾ は T 桁、合成桁、肋材付鋼板などの実用断面に関し、有効幅の簡易化理論を発表した。

この研究では、フランジ内の垂直応力の分布は Reissner に従い、放物線状と仮定している。わが国では、柳本 武⁵⁾が防撓された板の有効幅について考察し、有効幅の諸性質を明白にした。

一般閉断面においてもセン断ヒズミの影響を受け、桁軸方向垂直応力は初等曲げ理論の値から相当偏差を生じる。箱桁ではカバープレートにおいて垂直応力がほぼ放物線状分布をなし、ウェブとの接合部で最大となり、板中央で低下している。両者の差は、箱桁の幅とスパンの比、断面形状、荷重状態、支持条件などによつてきまる。

箱桁の Shear Lag については、まず G. Schnadel⁶⁾の研究があげられる。彼は4枚の等方性薄板からなる2重対称断面の単純桁に関して、平面応力問題として、応力関数の sin 級数解を与えた。しかしこの問題の級数解は収束が緩慢で実用性に乏しいというらみがある。この欠点を補う意味で、E. Reissner はカバープレートの応力分布が2次曲線によつて近似しうることを主張した。これは問題を簡易化し、実用解を与えるのに有用な仮定であつて、画期的提唱といふことができる。彼は最初、最小仕事の原理を利用して片持バリの解を求めた⁷⁾。後ポテンシャルエネルギー極小の原理に基づき、単純バリ、固定バリなどにも応用しうる解を求めた⁸⁾。

箱桁についての以上の解は、いずれもウェブの平面保持を仮定し、また補強材としての肋材の存在は考えていない。実在の構造物においては、薄板が原因して起こる種々の不利な破損現象を防止するため、箱桁の外内に、縦横に補強材を取りつける。仮に縦肋材を含めて、厳密に解析すれば、横肋材の伸び剛性を無限大としても、解には幾つかの積分常数が入ることになる。肋材の数が増加すると、この常数の決定には、かなりの煩雑さともなる。それで W.J. Goodey⁹⁾は、この未知常数を系統的に定めるべき公式を与えた。

一方 Shear Lag の問題の電気回路相似法を考案したのは、R.E. Newton¹⁰⁾と Robert D. Ross¹¹⁾である。一辺を固定した肋材つき板に対し、縦方向の引張力を肋材に作用した場合、薄板部に生じる Shear Lag を求める器械をつくつた。

これらとは異なつた考え方で、実用的見地から、Paul Kuhn^{12),13),14),15)}は片持バリの Shear Lag について詳細な研究を行つた。多数の縦肋材を等価な3本の縦桁でおき代えた等価断面について解析することを提案した。また変断面バリの場合に対しては、近似解として構造力学でよく遭遇するような漸化式を与えている。

* 大阪市立大学理工学部講師，土木工学教室

わが国では倉西博士¹⁶⁾らがエネルギー法により筒状片持桁の一般的解をえた。

一般に集中荷重の場合には、この現象は載荷点付近において局部的に激しく現われる傾向がある。それで、その近傍における応力分布状態を綿密かつ詳細に調べるには Relaxation 法などによつて数値計算すると好都合である。この方法により J. Orr¹⁷⁾ は I 形クレーン桁について計算した。

箱桁を橋梁構造物として利用するに際しては、長スパン鋼床板連続桁構造とすれば、その経済性を大いに発揮できる。すでにしばしば引用されたドイツの長大箱桁橋は、全てこの形式のものである。橋梁の主桁として用いられた場合、上部カバープレートには、自動車の輪荷重が作用し、局部的に大きい集中力を受ける。これによる板としての曲げ作用に抵抗するため、薄い床板の裏側に形鋼の肋材を縦方向に等間隔に溶接し、さらに横断面方向には、かなり強固な横肋材が等間隔に配列され floor beam の役割をしている¹⁸⁾。従つてカバープレートは事実上平面応力問題の範囲では、直交異方性板の性格がますます濃厚である。また下部カバープレートは、中間支点付近において、局部座屈の心配があるので、やはり強固な防撓材が設けられている。

Shear Lag の問題において、横肋材の伸び剛性が桁軸方向の垂直応力にどの程度の影響があるであろうか。K. Marguerre¹⁹⁾は曲げを受ける π 断面を持つた単純桁のフランジ部の応力分布について考察し、横肋材の伸び剛性を無限大とみなしても、有効幅には実質的にさ程大きい影響をおよぼさないと述べている。また多くの研究者は、箱桁についても同じ事実を認めている。

箱桁橋の補剛横肋材は桁断面形状を保持するに十分なだけの板に垂直方向の曲げ剛性を有するが、板面内曲げ剛性は、普通小さいような形状をしている。それでこのような場合には、横肋材の板面内曲げ剛性への影響は考えないことにする。その反面、横肋材の存在により、断面形状不変の仮定が成立するものと考えられる。

本文では、鋼床板連続箱桁の Shear Lag が全長にわたつていかに変化するか、特に中間支点付近における値はどうかを調べる。そして最も注目すべき支点付近における最大応力の値を簡潔に求める実用公式を与える。

解析に際しては、上記の理由によつて、横肋材の伸び剛性は無限大と仮定する。一方縦肋材については、直交異方性板理論の中に包含し、かつ薄板の内側に偏心的に溶接されていることを考慮に入れた。これは、桁高が低い程結果に影響するようであり、かつ計算手数も、さ程繁雑とならないので都合よく算入された。

従来主としてエネルギー法が有力な手段として用いられた。本文では、解析の簡明化を目的として、Galerkin 法の一般化したものを用い、原偏微分方程式を常微分方程式の問題に帰することができた。

数値計算例としては、まず解の正当性を確認するため、文献(16)に掲載された2つの断面について、片持バリの固定端における最大応力の値を比較する。これによつて本理論が妥当であることがわかる。次に Bürgermeister-Smidt 橋^{20), 21)}と同じスパン割の4スパン鋼床板連続箱桁について計算する。さらに断面の形状寸法と Shear Lag の関係を明らかにするため、各種寸法比の断面について検討する。

2. 基礎微分方程式

図-1 に示す断面を有する箱桁について考える。カバープレート内任意点の垂直応力 σ_x および α セン断力 τ_{xy} は、

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{xy} = G \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad \dots (1)$$

ここに w : 曲げによる桁のたわみ, u_1 : x 方向(桁軸方向)の変位, ν : ポアソン比, E : ヤング率 G : セン断弾性係数, 従つてカバープレートを直交異方性板と考える時、単位長さあたりの垂直力 N_x およびせん断力 T_{xy} は、それぞれ

$$N_x = Et_e \frac{\partial u_1}{\partial x} - E \frac{S}{b} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad T_{xy} = Gt_u \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad \dots (2)$$

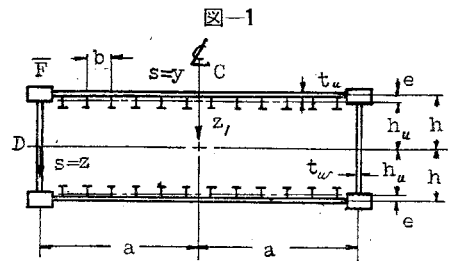
ここに t_u : 板厚, $t_e = \frac{t_u}{1-\nu^2} + \frac{A}{b}$, A : 縦肋材1コの断面積, b : 縦肋材の間隔
よつて釣合条件式

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0$$

に式(2)を代入すれば、

$$E \frac{t_e}{t_u} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + G \frac{\sigma^2 u_1}{\partial y^2} = E \frac{S}{bt_u} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad \dots (3)$$

これは縦肋材の偏心を考慮したカバープレートに関する微分方程式である。



橋桁においては、桁高がかなり大となるので、ウェブにもせん断変形の影響が現われる。厚さ t_w の等方性板とみなして、次の微分方程式をうる。

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここに u_2 : ウェブプレート of x 方向変位

これらの方程式の実用的近似解として、次のものを採用する。

$$u = u_0(x, s) + f(x) \cdot \bar{u}(s) \dots\dots\dots (5)$$

解 (5) 中の u_0, \bar{u} は座標関数で、次のように想定する。

$$u_0 = \begin{cases} h \frac{dw}{dx} & \text{カバープレート} \\ -z \frac{dw}{dx} & \text{ウェブプレート} \end{cases}$$

$$\bar{u} = \begin{cases} 1 - \frac{y^2}{a^2} & \text{カバープレート} \\ \omega \left(\frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} \right) & \text{ウェブプレート} \end{cases}$$

ここに

$$\omega = \frac{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \bar{p} z}}{\bar{p}}$$

かつ

$$\kappa = 2 \left[\frac{t_w h^3}{5(1-\nu^2)} + h_u t_e a^2 \right]$$

$$z = \frac{t_u}{t_w} (4 h_u t_e a h - \bar{J}),$$

$$\bar{p} = \frac{a}{5} \left(\frac{4 t_w h^2}{1-\nu^2} - \frac{3 \bar{J}}{h} \right), \quad \bar{J} = J - 4 h^2 \bar{F}$$

\bar{F} : 隅角部交線の断面積

これらの座標関数は、 u に課せられた2つの境界条件

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial y} \right]_{y=0} = 0, \quad [u_2]_{z=0} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

を満足し、さらに次の関係式を持つ。

$$[u_1]_{y=a} = [u_2]_{z=-h}, \quad \int_F \tau_{xz} dF = Q$$

いま近似解 (5) を原微分方程式 (3), (4) に代入した時の誤差関数を $\varepsilon(x, s)$ とすれば、Galerkin 法の一般化を行い、次の条件式を与えることができる。

$$\oint \varepsilon(x, s) \bar{u}(s) t ds = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここに $\oint ds$ は、箱桁を一周する積分を表わす。カバープレート上では、 $s=y$ 、ウェブでは $s=z$ とすれば、条件式 (7) より、次の常微分方程式をうる。

$$\frac{8 S_1}{15 a} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{4 G t_u \mu}{E a} f - \frac{S_2}{4} \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

ここに

$$S_1 = a^2 t_e + \frac{t_w h a \omega^2}{7(1-\nu^2)}, \quad S_2 = \frac{8}{3} \left[h_u a t_e - \frac{t_w h^2 \omega}{5(1-\nu^2)} \right],$$

$$\mu = \frac{1}{3} + \frac{t_w a \omega^2}{5 t_u h}, \quad h_u = h - e, \quad e = \frac{S}{t_e b} \dots\dots\dots (8)'$$

一方、任意断面における曲げモーメント M は、定義より

$$M = \int_F \sigma_{xz} dF$$

この式に式 (1), (5) を代入して、次の常微分方程式をうる。

$$S_2 \frac{df}{dx} + J \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{M}{E} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここに

$$J = 4 \left[h^2 t_e a + \frac{t_w h^3}{3(1-\nu^2)} + I_u \frac{a}{b} + \bar{F} h^2 \right] \dots\dots\dots (10)$$

I_u : 1 縦肋材間についての、直交異方性板自身の断面 2 次モーメント
 従つて未知関数 w, f は連立微分方程式 (8), (9) の解として容易に求める。
 端末条件としては、桁の両端において、単純支持されているので、

$$w=0, \frac{d^2w}{dx^2}=0 \text{ および } \frac{df}{dx}=0 \dots\dots\dots(11)$$

また中間支点において、

$$w=0 \dots\dots\dots(11)'$$

この後の条件から不静定反力 R がわかる。

いま方程式 (8), (9) から f を消去して、 w についての 4 階の微分方程式をうる。

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\alpha^2}{EJ} M + r \frac{d^2M}{dx^2} \dots\dots\dots(12)$$

ここに

$$\alpha^2 = 240 \frac{G}{E} \frac{I_u J \mu}{32 S_1 J - 15 S_2^2 a}, \quad r = \frac{-32 S_1}{E(32 S_1 J - 15 S_2^2 a)} \dots\dots\dots(13)$$

同じようにして、 w を消去すれば、 f に関して

$$\frac{d^2f}{dx^2} - \alpha^2 f = \eta \frac{dM}{dx} \dots\dots\dots(14)$$

ここに

$$\eta = \frac{15 S_2 a}{E(32 S_1 J - 15 S_2^2 a)} \dots\dots\dots(15)$$

3. 桁のタワミ w と変位関係 f

両端単純支持の端末条件(11)を満足する微分方程式(12), (14)の解を代表的な 2 つの荷重状態に対して求める。

(1) 集中荷重 $P \cdot U_i(x-c)$

$x=c$ の点に集中荷重 P が作用する場合タワミの微分方程式は具体的に与えられる。

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\alpha^2}{EJ} P \left\{ \frac{l-c}{l} x - (x-c) \cdot U(x-c) \right\} - r P \cdot U_i(x-c)$$

U_i : 単位衝撃関数

これを解いて $w = P \cdot \Gamma(x, c)$

ここに $\Gamma(x, c) = \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha^3} + \frac{r}{\alpha} \right) \left[\sinh \alpha(l-c) \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \alpha l} - \frac{l-c}{l} \alpha x \right] + \frac{\beta}{6} \frac{l-c}{l} x (2lc - c^2 - x^2) \right\},$
 $0 \leq x \leq c$ に対し $\dots\dots\dots(16)_1$

あるいは $\Gamma(x, c) = \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha^3} + \frac{r}{\alpha} \right) \left[\sinh \alpha(l-x) \frac{\sinh \alpha c}{\sinh \alpha l} - \frac{l-x}{l} \alpha c \right] + \frac{\beta}{6} \frac{l-x}{l} c (2lx - x^2 - c^2) \right\},$
 $c \leq x \leq l$ に対し $\dots\dots\dots(16)_2$

そして

$$\beta = \frac{\alpha^2}{EJ}$$

載荷点 c , 測定位置 x が両端末付近になければ、 αl がある値以上を持つ普通の箱桁においては、双曲線関数の項は簡単化し、また { } 内第 2 項は、曲げ剛性 EJ を持つ桁に集中荷重 $P=1$ が作用した時の初等曲げ理論によるタワミ $\Gamma_e(x, c)$ に等しい。

$$\Gamma(x, c) = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\beta}{\alpha^3} + \frac{r}{\alpha} \right) \left(\frac{e^{\alpha(x-c)}}{2} - \frac{l-c}{l} \alpha x \right) + \Gamma_e(x, c), \quad 0 \leq x \leq c,$$

あるいは

$$\Gamma(x, c) = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\beta}{\alpha^3} + \frac{r}{\alpha} \right) \left(\frac{e^{\alpha(c-x)}}{2} - \frac{l-x}{l} \alpha c \right) + \Gamma_e(x, c), \quad c \leq x \leq l$$

次に f については

$$\frac{d^2f}{dx^2} - \alpha^2 f = P \eta \left\{ \frac{l-c}{l} x - U(x-c) \right\}$$

これを解いて、 $P=1$ に対して解を f_c とかくと、

$$f_c(x, c) = \frac{\eta}{\alpha^2} \left\{ \frac{\sinh \alpha(l-c)}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha x - \frac{l-c}{l} \right\}, \quad 0 \leq x \leq c \dots\dots\dots(17)_1$$

あるいは、

$$f_c(x, c) = \frac{-\eta}{\alpha^2} \left\{ \frac{\sinh \alpha c}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha(l-x) - \frac{c}{l} \right\}, \quad c \leq x \leq l \dots\dots\dots(17)_2$$

この場合も x, c が両端付近になければ、

$$f_c(x, c) = \frac{\eta}{\alpha^2} \left(\frac{e^{\alpha(x-c)}}{2} - \frac{l-c}{l} \right), \quad 0 \leq x \leq c$$

あるいは

$$f_c(x, c) = \frac{-\eta}{\alpha^2} \left(\frac{e^{\alpha(c-x)}}{2} - \frac{c}{l} \right) \quad c \leq x \leq l$$

(2) 等分布荷重 $q = \text{一定}$

満載等分布荷重に対し、タワミ w の微分方程式は

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = q \left[\frac{\beta}{2} x(l-x) - r \right]$$

この解を w_q とかけば、

$$w_q(x) = \frac{q}{\alpha^2} \left(\frac{\beta}{\alpha^2} + r \right) \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} - \cosh \alpha x + \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \alpha l} (\cosh \alpha l - 1) \right] - \frac{lx}{2} \right\} + w_{qe} \quad \dots (18)$$

この w_{qe} は、満載等分布荷重を受ける場合の初等曲げ理論による剛性 EJ の桁のタワミである。この場合も通常の箱桁橋では、 $e^{-\alpha l}$ がきわめて小さいので、 w_q は簡単になる。

$$w_q(x) = \frac{q}{\alpha^2} \left(\frac{\beta}{\alpha^2} + r \right) \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \left[1 - \frac{\alpha^2 x^2}{2} - e^{-\alpha x} - e^{-\frac{\alpha}{l}(l-x)} \right] - \frac{lx}{2} \right\} + w_{qe}$$

次に f に関して微分方程式は、

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \alpha^2 f = \frac{\eta ql}{2} \left(1 - \frac{2x}{l} \right)$$

これを解いて、解 f_q は、

$$f_q = \frac{\eta ql}{2\alpha^2} \left\{ \frac{2}{\alpha l} \left[\frac{\cosh \alpha x}{\sinh \alpha l} (\cosh \alpha l - 1) + \alpha x - \sinh \alpha x \right] - 1 \right\} \quad \dots (19)$$

これも同じ理由で簡略できる。

$$f_q = \frac{q \eta l}{2\alpha^2} \left\{ \frac{2}{\alpha l} (\alpha x + e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(l-x)} - 1) \right\}$$

他の荷重状態についても同様に解をうるができるがここでは省略しよう。

4. 連続箱桁の中間支点反力と応力

図-2 に示す $\rho+1$ スパンを有する連続箱桁の第 r 番目の中間支点が $x=l_r$ の所に位置し、その反力を R_r とすれば任意点のタワミ $w(x)$ は

$$w(x) = w_p(x) - \sum_{r=1}^{\rho} R_r \Gamma(x, l_r)$$

ここに w_p は与えられた荷重によるスパン l の単純桁のタワミで式 (16), (18) で求まる。

中間支点における $w=0$ の条件より

$$\sum_{r=1}^{\rho} R_r \Gamma(l_s, l_r) = w_p(l_s) \quad (s=1, 2, \dots, \rho) \quad \dots (20)$$

連立方程式 (20) を R_r について解けば、反力が定まる。

任意断面におけるカバプレート上の垂直応力 σ_x およびせん断応力 τ_{xy} は、式 (1) に (5) を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(h-z_1) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{df}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{2Gf}{a^2} y \end{aligned} \right\} \quad \dots (21)$$

またウェブプレートにおいては、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -z \frac{d^2 w}{dx^2} + \omega \frac{df}{dx} \left(\frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} \right) \right\} \\ \tau_{xz} &= \frac{G}{h} \left\{ \frac{Q}{4Gt_w} + \omega f \left(1 - \frac{3z^2}{h^2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots (22)$$

以上の諸応力を表わす式 (21), (22) に必要な導関数の値は式 (16)~(19) より次のように求める。

集中荷重

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= P \frac{d^2 \Gamma(x, c)}{dx^2} - \sum_{r=1}^{\rho} R_r \frac{d^2 \Gamma(x, l_r)}{dx^2} \\ \frac{df}{dx} &= P \frac{df_c(x, c)}{dx} - \sum_{r=1}^{\rho} R_r \frac{df_c(x, l_r)}{dx} \end{aligned} \right\} \quad \dots (23)$$

図-2



上式に要する各項は、 αl がある程度大きい通常の連続箱桁に対しては、

$$P \frac{d^2 \Gamma(x, c)}{dx^2} = \frac{P}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha^2 + \gamma} \right) \frac{e^{-\alpha \lambda}}{2} \frac{M_p}{EJ} \dots\dots\dots (24)_1$$

ここに λ : 集中荷重と測定点との距離

M_p : 与えられた荷重によるスパン l の単純桁の曲げモーメント

同じように

$$\frac{df_c(x, c)}{dx} = \frac{\eta}{2\alpha} e^{-\alpha \lambda} \dots\dots\dots (24)_2$$

等分布荷重

導関数は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{d^2 w_q}{dx^2} - \sum_{r=1}^p R_r \frac{d^2 \Gamma(x, l_r)}{dx^2} \\ \frac{df}{dx} &= \frac{df_q}{dx} - \sum_{r=1}^p R_r \frac{df_c(x, l_r)}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここにおいて

$$\frac{d^2 w_q}{dx^2} = \frac{q}{\alpha^2} \left(\frac{\beta}{\alpha^2 + \gamma} \right) (1 - e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(l-x)}) - \frac{M_p}{EJ} \dots\dots\dots (26)_1$$

$$\frac{df_q}{dx} = \frac{q\eta}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(l-x)}) \dots\dots\dots (26)_2$$

測定点が端末よりある程度離れると e の項は無視しうる。

5. 実用公式

4. の各式を利用すれば、支点反力および各部応力が、ある程度正確に計算できる。ところで設計計算を行なうに当り、迅速簡明に断面内の応力を算定できることが大切である。この要求に適するような公式を誘導しよう。

さて、不静定反力 R_r が Shear Lag のため初等理論の値とどの程度差異があるかを調べるため、次のような3スパン連続箱桁について計算してみた。すなわち $t_u/t_w=1$, $a/h=2.5$ として縦肋材はないものとする。この場合 a/l を種々変化して、等分布荷重満載の時の支点反力の変化を表-1に示す。スパン割は 1:1:1, 3:4:3, 1:2:1 の3種について調べたがいずれも初等理論でえた値とほとんど差異がない。強いて比較すれば、 a/l が大なる程初等理論値から偏倚する。また側スパンが短くなる程、差が生ずるようである。いずれにしても後述の数値計算例からもわかるように Shear Lag の効果は中間支点の付近に限られているので、箱桁の実質的曲げ剛性の低下は桁全体にわたつては小である。従つて不静定反力も大して変動しないのはもつともである。これより縦肋材を有する任意断面のものについても同じことがいえると思う。それで実用計算においては、不静定量の値は周知の慣用法で求めたものを用いても大過がない。

表-1

スパン比	a/l	0.3	0.1	0.05	0.03	0.01	初等理論
1:1:1		0.365	0.366	0.366	0.367	0.367	0.367
3:4:3		0.390	0.391	0.392	0.392	0.392	0.392
1:2:1		0.439	0.442	0.444	0.445	0.445	0.445

単位: ql

一般に中間支点において、 σ_x が急激に大きくなるので、この断面における最大応力がどれ位に増加するか注目せねばならない。いま中間支点 $x=l_r$ における $\frac{d^2 w}{dx^2}$ の値を式 (23) あるいは式 (25) から求めうる。ところが、第2項の Σ の中で、 $x=l_r$ に対して、 r の項以外は微小であるから、

$$\left[\frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=l_r} = -\frac{M_r}{EJ} + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{EJ} + \gamma \right) \left(P e^{-\alpha \lambda} - R_r + \frac{2q}{\alpha} \right) \dots\dots\dots (27)$$

ここに M_r : 第 r 支点における曲げモーメント

しかるにカバープレート最大応力 $\sigma_{x \max}$ は、 $y=a$, $z_1=-t_u/2$ の点で生ずるから、関係式 (21)₁ より、

$$\sigma_{x \max} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(h + \frac{t_u}{2} \right) \left[\frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=l_r}$$

上式に式 (27) を代入すれば、

$$\sigma_{x \max} = m \sigma_{e \max} \dots\dots\dots (28)$$

ここに

$$m = \begin{cases} 1 + \frac{(R_r - 2q/\alpha)(1 + \bar{r} J)}{2\alpha M_r} & \text{等分布荷重} \\ 1 + \frac{(R_r - P e^{-\alpha \lambda})(1 + \bar{r} J)}{2\alpha M_r} & \text{集中荷重} \end{cases}$$

$$\bar{r} = E\gamma = \frac{-32 S_1}{32 S_1 J - 15 S_2^2 a} \dots\dots\dots (29)$$

m は初等理論より計算される最大縁応力 $\sigma_{e\max}$ に対する実在最大応力 $\sigma_{x\max}$ の比である。そして m の影響線は次式で求まる。 R_r, M_r の影響線縦距を $k, \mathfrak{M}l$ とすると、

$$m = 1 + \frac{k - e^{-\alpha\lambda}}{\mathfrak{M}} \varphi \frac{a}{l} \dots\dots\dots (30)$$

ここに

$$\varphi = \frac{1 + rJ}{2ca} \dots\dots\dots (31)$$

φ は断面特有の常数である。集中荷重 P の作用点 $x=c$ の m 値は、その荷重に近い支点 r として

$$m = 1 - \frac{1 - ke^{-\alpha\lambda}}{\mathfrak{M}c} \varphi \frac{a}{l} \dots\dots\dots (32)$$

ここに載荷点における曲げモーメント M_c を $M_c = \mathfrak{M}cPl$ とした。もちろん公式 (30)~(32) は単純桁およびゲルバー桁に準用しうるものである。

特にウェブのセン断剛性を無限大と仮定すれば、

$$\left. \begin{aligned} rJ &= \frac{-1}{1 - \frac{5I_s}{6J}} & \text{ここに } I_s &= 4h_w^2 t_e a \\ \alpha &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{-5Gt_e}{2Et_e}} rJ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

そして

で与えられる。

6. 数値計算例

例 1 単純桁

まず本理論の特別の場合として単純桁の中央に集中荷重が作用する場合について計算する。図-3 (a) (b) に示す 2 種の断面について、スパンはともに $l = 4.40$ m である。

この載荷点 $x=l/2$ における m 値は、スパン 2.20 m の片持バリの自由端に集中荷重が作用する場合の固定端断面の m 値に相等しい。これらの断面を持つ片持バリは、文献 (16) の例題に用いられたものであつて、両者の結果を比較することによつて、本理論の合理性が認められる。その結果を表-2 に示す。表中 $G_w = \infty$ とあるのは、ウェブのセン断剛性を無限大とした場合を示す。また () 内の値は Reissner 理論によるものである。本断面は桁高がかなり小さく、ウェブのセン断変形の影響がほとんどないと考えられ、 $G_w = \text{有限の場合}$ と $G_w = \infty$ の場合の差が微小となつた。

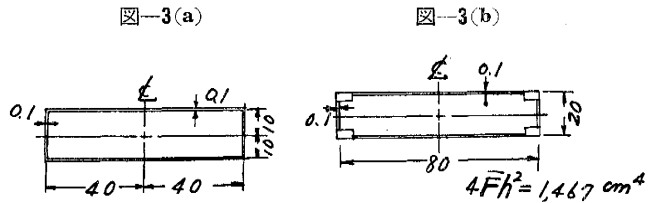


表-2

(a) 断 面				(b) 断 面			
距離	本理論	文献(16)	$G_w = \infty$	距離	本理論	文献(16)	$G_w = \infty$
0 cm	1.318	1.398	(1.300) 1.316	0 cm	1.115	1.112	1.115
44	1.038	1.040	—	44	1.030	1.035	—
88	1.005	1.005	—	88	1.008	1.013	—
132	1.001	1.000	—	132	1.002	1.005	—
176	1.000	1.000	—	176	1.001	1.005	—

無限大とした場合を示す。また () 内の値は Reissner 理論によるものである。本断面は桁高がかなり小さく、ウェブのセン断変形の影響がほとんどないと考えられ、 $G_w = \text{有限の場合}$ と $G_w = \infty$ の場合の差が微小となつた。

例 2 4 スパン連続箱桁

図-4 のような 4 スパンの縦横肋材を有する連続箱桁に等分布荷重が作用する場合について考える。断面常数の値は表-3 のごとくなる。これより R の連立方程式は、

$$1.66432 R_1 + 4.82500 R_2 + 3.64504 R_3 = 7.63435 \times 10^4 g$$

$$4.82500 R_1 + 24.53502 R_2 + 19.86193 R_3 = 34.45832 \times 10^4 g$$

図-4 (a)

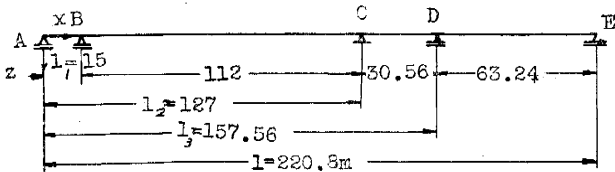
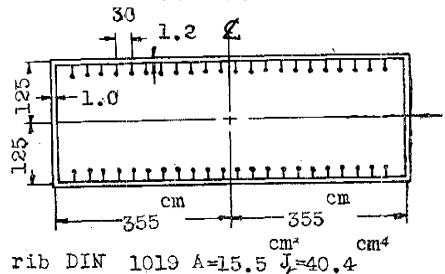


図-4 (b)



$$3.64504R_1 + 19.86193R_2 + 17.17782R_3 = 27.89912 \times 10^4 q$$

これを解いて、 $R_1 = 1.30678 \times 10^4 q$ ($1.33182 \times 10^4 q$ 1.88%)

$$R_2 = 0.88543 \times 10^4 q$$
 ($0.88923 \times 10^4 q$ 0.43%)

$$R_3 = 0.31389 \times 10^4 q$$
 ($0.31360 \times 10^4 q$ 0.09%)

() 内は初等理論にもとづいて算出した値で、%はその誤差の程度を表す。

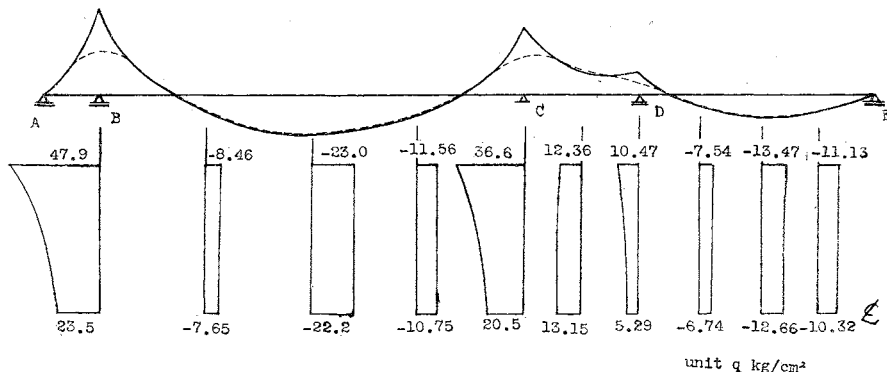
次に上部カバープレートにおける垂直応力 σ_x の変化状態が 図-5 のようにえられた。支点 CD 間の中央部では Negative Shear Lag の傾向を示している。これは等分布荷重を受ける片持りに類似した現象である。

一般に中間支点付近の小領域で Shear Lag が特にいちじるしいが、他の部分では全く小さい。いま支点 B における m 値を実用公式から求めれば、 $m = 1.466$ となった。またウェブのセン断変形を無視し、式 (33) を用いて計算すれば、 $m = 1.461$ で少し小さい程度である。この例でもウェブのセン断変形は無視して差支えない。

表-3

t_e	1.83535 cm
J	$4.17411 \times 10^7 \text{cm}^4$
ω	-0.0210443
S_2	$2.12191 \times 10^5 \text{cm}^3$
S_1	$2.31303 \times 10^5 \text{cm}^3$
μ	0.333543
α	$0.470470219 \times 10^{-2} \text{cm}^{-1}$
β	$2.52242 \times 10^{-19} \text{kg}^{-1} \text{cm}^{-4}$
γ	$-5.09360 \times 10^{-14} \text{kg}^{-1} \text{cm}^{-2}$
η	$7.77571 \times 10^{-12} \text{kg}^{-1} \text{cm}^{-3}$

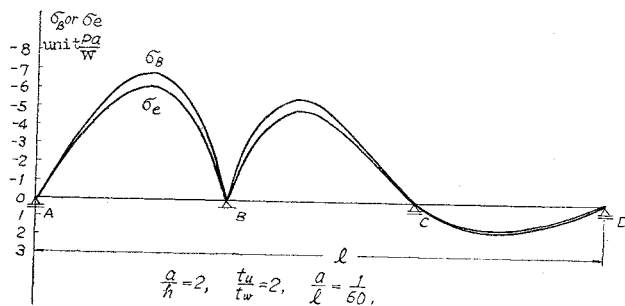
図-5



例 3 最大縁応力の影響線

3等スパン連続箱桁の中間支点断面における最大縁応力 σ_B の影響線を 図-6 に示す。断面は $a/h=2$, $t_u/t_w=2$, $a/l=1/60$ である。図中 σ_e は初等理論による影響線である。また $\sigma_B = \sigma_e + \sigma_0$ とした時、縁応力増加量 σ_0 の影響線を 図-7 に示す。荷重が支点 B に近づくにつれて σ_0 は増大し、B の近傍で急激に減少して支点 B 上において 0 となる。

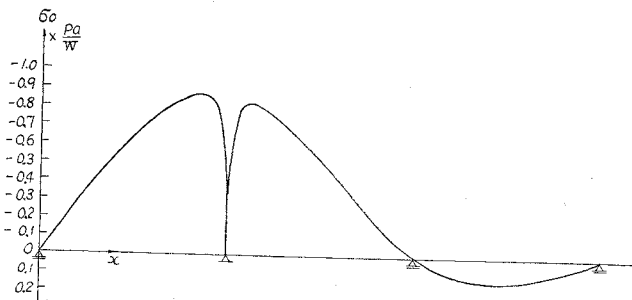
図-7



例 4 断面形状による phi の変化

式 (30) よりわかるように断面形状が m に与える影響を知るには、 ϕ の変化を調べればよい。簡単のため、縦肋材のない断面について、 $\xi = a/h$, $\zeta = t_u/t_w$ の 2 量に対し、 ϕ をプロットすれば、 図-8 のごとくなる。

図-8



次にウェブのセン断剛性を無限大なりと仮定し、式 (33) を用いてえた値を ϕ_∞ と書く。そして ϕ_∞/ϕ を求めれば、 図-9 のごとくなる。この図より $G_w = \infty$ として簡略計算してよい ξ, ζ の範囲が判明する。

図-8

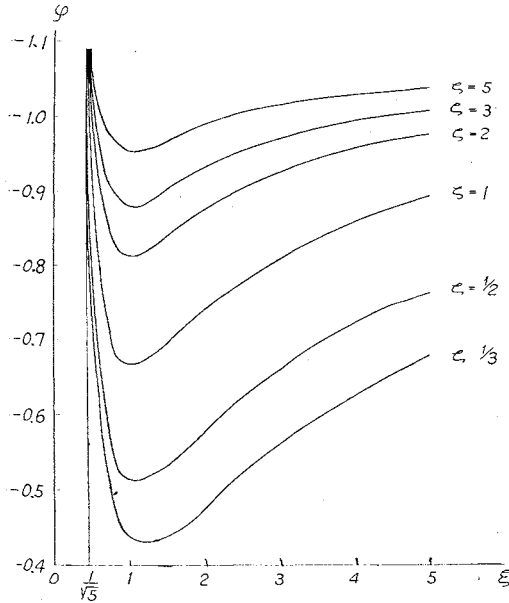
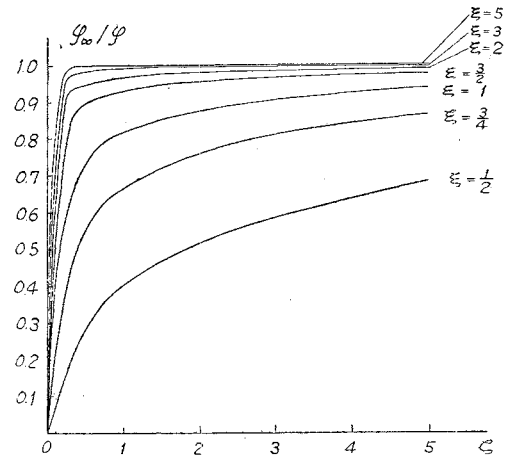


図-9



8. 結 言

(1) Galerkin 法を一般化することにより、縦横肋材を有する連続箱桁の Shear Lag に関する合理的な近似解を与えた。

(2) 連続箱桁においては、中間支点付近において特にいちじるしい Shear Lag が現われるので、それに対し断面を補強せねばならない。しかしその範囲は支点の近傍に限られている。

(3) 中間支点および集中荷重作用点における最大縁応力の初等曲げ応力に対する増加率を与える実用公式を誘導した。さらにこれより支点における最大縁応力の影響線を求めた。

(4) 箱桁の断面寸法比と応力増加率の関係を明らかにし、ウェブのせん断変形がどのように影響するか調べた。

以上は簡単のため 2 重対称断面について論じた。しかし一般断面への理論の拡張は困難でない。けれど実在箱桁に使用されている上下カバープレートの差異の程度であれば、応力増加率は上下のカバープレートでそれ程いちじるしい差異がないと云うことが本計算例からも推察できる。

最後に本研究に関してご指導を賜った京都大学教授小西博士に心から感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) S. Timoshenko and J.N. Goodier: Theory of elasticity 2nd edition 1951 p.171-177
- 2) E. Reissner: Stahlbau 7 Jahrg. 1934 S 206-208
- 3) E. Chwalla: Stahlbau 9 Jahrg. 1936 S 73
- 4) E. Chwalla: Alfons-Leon-Gedenkschrift 1952
- 5) 柳本 武: 造船協会会報, No.54/55 1934 p.65-99, p.19-56
- 6) G. Schnadel: Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1926
- 7) E. Reissner: Jour. of the Aeronautical Sciences Vol.8 No.7 1941 p.248
- 8) E. Reissner: Quart. of Applied Math. Vol.4 No.3 1946 p.268-278
- 9) W.J. Goodey: Aircraft Engg. Vol.18 No.213 1946
- 10) R.E. Newton: Proc. Soc. Exptl. Stress. Anal. Vol.2 No.2 1945
- 11) R.D. Ross: NACA TR No.1129 1953
- 12) P. Kuhn: NACA TR No.608 1937
- 13) P. Kuhn: NACA TR No.636 1938
- 14) P. Kuhn: NACA TN No.739 1939
- 15) P. Kuhn and Chiarito Patrick: NACA TR No.739 1942
- 16) 倉西正嗣, 宮川松男: 機械学会論文集 Vol.16 No.55 1950 p.109-113
- 17) J. Orr: Publ. IABSE Vol.8 1947 p.161-169
- 18) J. Schöttgen: Stahlbau 26 Jahrg. Heft 2 1957 S29-39
- 19) K. Marguerre: Stahlbau 21 Jahrg. Heft 8 1952 S129-132
- 20) A. Lamster und W.Stoltenburg: Stahlbau 21 Jahrg. Heft 11 1952 S207-212
- 21) H. Meyer-Larssen: Bauing. 27 Jahrg. Heft 11 1952 S389-398