

# 衝撃荷重によるハリの塑性変形について

正 員 米 沢 博\*

## ON THE PLASTIC DEFORMATIONS OF BEAMS DUE TO IMPULSIVE LOADING

By Dr. Eng., Hiroshi Yonezawa, C.E. Member

**Synopsis:** In this paper the plastic deformations of cantilevers under the "blast type" loading are discussed. The deformations are divided into four classes according to the position or to the intensity of the load.

The equations of motion to the deformations of each the four classes and the solutions of these equations are introduced under the assumption of negligible elastic strain and of "plastic rigid" behaviour.

As the result of analysis, the approximate final permanent deformations are obtained. Compared with the result in the cases of simple or built-in beams, different one is obtained to the cantilevers and it is interesting to notice that the deformations of the four classes are obtained.

### 1. ま え が き

構造物がいわゆる Blast type の荷重を受けた場合の塑性変形に関する研究が、特に米国において、最近盛んに行われているようである。そのうちでハリに関するものは、無限長バリ、両端自由バリ、単純バリ、両端固定バリなどが、そのスパン中央に Blast type の集中荷重、あるいは全面に等分布荷重を受けた場合の塑性変形が扱われている<sup>1)~7)</sup>。これらはいずれも対称変形の場合で、支持状態や荷重状態が非対称の場合は、まだ扱われていないようである。

ここでは、片持バリが Blast type の集中荷重を任意の位置に受けた場合を、理論的に取り扱ってみた。すなわち、塑性変形に対し弾性変形を無視して、ハ리를完全剛塑性体とみなし、さらに変形中のタワミ角は微小であると仮定して、解析を行なった。

その結果として、荷重の大小、その作用点などによつて、塑性変形を4種類に分類し、それぞれの変形終了後の永久変形として、自由端のタワミ、タワミ角および固定端のタワミ角などが求められた。

### 2. 変形の種類および運動の方程式

片持バリが衝撃荷重により塑性変形する場合、荷重の種類、載荷点などの相違により、種々の変形が考えられる。ここでは、図-1 に示すように、大きさ  $P$  の集中荷重が、時間  $\tau$  の間加わつた場合を考えることにする<sup>8)</sup>。

次に、荷重  $P$  の大小、載荷位置によつて、変形を図-2 に示すような4種類に分類し、それぞれの場合について解析してみよう。すなわち、図-2 の (a) に示すように、固定端だけに塑性ヒンジを生ずる変形 (以後第1変形と呼ぶ)、(b) に示すように、固定端の塑性ヒンジが自由端の方向へ拡大した変形 (以後第2変形と呼ぶ)、(c) に示すように、固定端と載荷点に塑性ヒンジを生ずる変形 (以後第3変形と呼ぶ)、(d) に示すように、第2、第3変形が同時に生ずる変形 (以後第4変形と呼ぶ) の4種類について考える。

これら4種類の塑性変形に対し、それぞれの場合の運動の方程式を誘導すると、次のようになる。ただし、いずれの場合に対しても、ハリの弾性変形を無視し、完全剛塑性体として取り扱う。

#### (1) 第1変形

図-3 に示す片持バリにおいて、固定端から  $a$  の位置に衝撃荷重  $P$  が作用したとする。

図-1 衝撃荷重の型

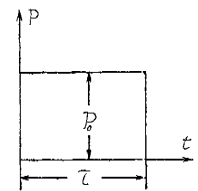
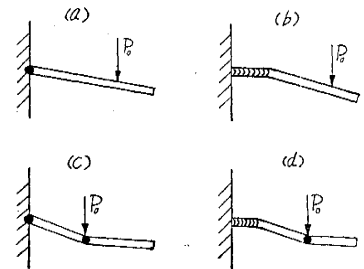


図-2 変形の種類



\* 工学博士，山口大学教授，工学部土木工学教室

以下

$$\mu = P_0 a / M_0 \dots\dots\dots(1)$$

とおく。ただし、 $M_0$  はハリの全塑性モーメントである。

従つて、 $\mu$  の値が

$$\mu \geq \mu_I = 1 \dots\dots\dots(2)$$

になると、第1変形が生ずる。もちろん  $\mu$  の値がさらに大きくなると、第2変形以後の変形が生ずる。

いま、図-4に示すように、ハリの角加速度を  $\dot{\omega}$  とすると、運動の方程式は次のようになる。ただし、ハリの単位長さあたりの質量を  $m$  とする。

$$m l^3 \dot{\omega} / M_0 = 3(\mu - 1) \dots\dots\dots(3)$$

式(3)を二度積分すれば、タワミ角  $\theta$ 、さらにタワミ  $\delta$  が得られる。

次に第1変形が生ずる  $\mu$  の値の上限を考えてみよう。ハりに作用する荷重は、図-5に示すように、 $P_0$ 、並びにハリの各部分の  $\dot{\omega}$  に比例する力である。 $P_0 > m \dot{\omega} l^2 / 2$  および  $P_0 < m \dot{\omega} l^2 / 2$  の二つの場合のせん断力図と曲げモーメント図は図-6のようになる。図からわかるように、 $P_0 < m \dot{\omega} l^2 / 2$  では  $Q=0$  の点で曲げモーメントが最大になり、 $M_0$  より大きな曲げモーメントが生ずることになる。これは第1変形としては起こり得ないことで、第1変形が生ずる  $\mu$  の値の上限は

$$P_0 = m \dot{\omega} l^2 / 2 \dots\dots\dots(4)$$

から得られる。式(3),(4)から、第1変形が生ずる  $\mu$  の上限  $\mu_{II}$  は、次のようになる。

$$\mu_{II} = 3 / (1 - 2n) \dots\dots\dots(5)$$

ただし、 $n = b/a$  である。 $\mu$  の値が  $\mu_{II}$  より大きくなると、第2変形が生ずる。なお  $\mu$  の値が  $\mu_{II}$  より小さくても、荷重位置すなわち  $n$  の値によつては、 $\mu$  が後述の  $\mu_{III}$  より大きくなり、第3変形が生ずる。

(2) 第2変形

$\mu$  の値が  $\mu_{II}$  を超えると、第2変形が生ずると考えられる。いま、 $P_0$  なる荷重が載ると、ただちに図-7(a)に示すような変形が生じ、時間の経過とともに  $\xi$  が次第に1に近づき、かつ  $(\xi a + b)$  の剛体の部分が廻転運動をすると考えられる。 $\xi$  が1になり、さらに固定端の塑性ヒンジが消失した時、運動は終了し、図-7(b)のような永久変形が生ずるわけである。

未知数  $\xi, \omega$  に対し方程式が2コ必要である。まず、剛体の部分の運動量と力積の関係として、次の式が成り立つ。

$$\int_0^t \mu dt = \frac{m \omega}{2 M_0} a^2 (\xi + n)^2 \dots\dots\dots(6)$$

次に、ハリ全体の固定端に関する角力積 (angular impulse) と運動量のモーメント (moment of momentum) の関係式として、次の式が成り立つ。

$$3 \int_0^t \mu dt - 3t = \frac{m \omega}{2 M_0} a^2 (\xi + n)^2 (3 - \xi + 2n) \dots\dots\dots(7)$$

式(6),(7)から、 $\xi, \omega$  が求められる。

(3) 第3変形

$P_0$  の位置が固定端に近づくに従つて、すなわち  $n$  が大きくなると、第2変形よりも第3変形が生じやすくなる。第3変形が生ずる  $\mu$  の下限をまず求めてみよう。載荷点に塑性ヒンジが生ずるためには

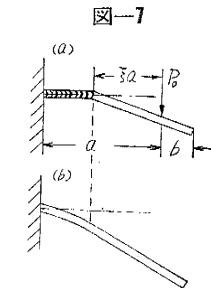
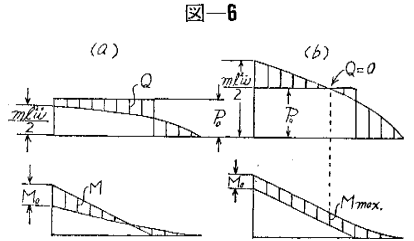
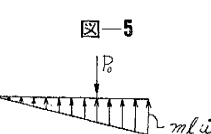
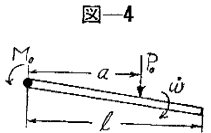
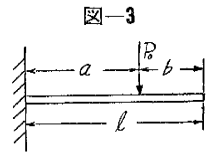
$$M_0 = \frac{m a b^2}{2} \dot{\omega} + \frac{m b^3}{3} \dot{\omega} \dots\dots\dots(8)$$

となる。式(8)に式(3)の  $\dot{\omega}$  を代入すると、 $\mu$  の下限  $\mu_{III}$  として

$$\mu \geq \mu_{III} = \{2(1+n)^3 / (3n^2 + 2n^3)\} + 1 \dots\dots\dots(9)$$

が得られる。すなわち、 $\mu$  の値が式(9)の  $\mu_{III}$  を超えると、第3変形を生じ、ハりは塑性ヒンジで連結された2コの剛体として回転運動を行う。いま、長さ  $a, b$  の部分の角速度を、それぞれ  $\omega_0, \omega_1$  とする。

まず、固定端に繋がるハリ全体の角力積と運動量のモーメントの関係式として



$$\int_0^t \mu dt - t = \frac{ma^3\omega_0}{M_0} \left( \frac{1}{3} + n + \frac{n^2}{2} \right) + \frac{ma^3\omega_1}{M_0} \frac{n^2}{2} \left( 1 + \frac{2n}{3} \right) \dots\dots\dots(10)$$

長さ  $b$  の部分の載荷点に関する角力積と運動量のモーメントの関係式として

$$t = \frac{ma^3\omega_0}{2M_0} n^2 + \frac{ma^3\omega_1}{3M_0} n^3 \dots\dots\dots(11)$$

の二式が得られる。式 (10), (11) から  $\omega_0, \omega_1$  が得られる。

(4) 第4変形

$\mu$  の値が  $\mu_{II}, \mu_{III}$  のいずれよりも大きくなると、第4変形が生ずる。第4変形が生ずる  $\mu$  の値の下限を  $\mu_{IV}$  とすると、 $\mu_{IV}$  の値は次の二つの場合によつて異なる。すなわち、時間の経過とともに、まず  $\xi=1$  になつてから次に載荷点の塑性ヒンジが消える場合と、まず載荷点の塑性ヒンジが消えてから次に  $\xi=1$  になる場合とで、 $\mu_{IV}$  の値が異なる。この二つの場合の変形の順序を図示すると、図-8 (a), (b) のようになる。

図-8 (a) のように、まず  $\xi=1$  になる場合の  $\mu$  の下限を  $\mu_{IV}$  とし、(b) のように、まず載荷点の塑性ヒンジが消える場合の  $\mu$  の下限を  $\mu_{IV}'$  とする。 $\mu_{IV}$  および  $\mu_{IV}'$  の値は、それぞれ次の式のようになる。

$$\mu_{IV} = 3 \left( \frac{1}{2n} + n + 2 \right) \dots\dots\dots(12)$$

$$\mu_{IV}' = \frac{6(1+2\sqrt{2} \cos \pi/12)^2}{(2\sqrt{2} \cos \pi/12)^2 n} \dots\dots\dots(13)$$

次に図-8 において、ハリ全体の力積と運動量との関係式は

$$\int_0^t \mu dt = \frac{ma^3\omega_0}{M_0} \left( \frac{\xi^2}{2} + \xi n \right) + \frac{ma^3\omega_1}{M_0} \frac{n^2}{2} \dots\dots\dots(14)$$

固定端に関するハリ全体の角力積と運動量のモーメントとの関係式は

$$\int_0^t \mu dt - t = \frac{ma^3\omega_0}{M_0} \left\{ \frac{\xi^2}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{3} \right) + \xi n \left( 1 + \frac{n}{2} \right) \right\} + \frac{ma^3\omega_1}{M_0} \frac{n^2}{2} \left( 1 + \frac{2n}{3} \right) \dots\dots\dots(15)$$

載荷点に関する長さ  $b$  の部分の角力積と運動量のモーメントとの関係式は

$$t = \frac{ma^3\omega_0}{M_0} \frac{\xi n^2}{2} + \frac{ma^3\omega_1}{M_0} \frac{n^3}{3} \dots\dots\dots(16)$$

となる。式 (14), (15), (16) から  $\omega_0, \omega_1, \xi$  が決定される。

(5) 載荷位置 ( $n$ ) と  $\mu_I, \mu_{II}, \mu_{III}, \mu_{IV}, \mu_{IV}'$  との関係

載荷位置と荷重の大小によつて、4種類の変形を考えたが、ここでは、 $n$  と生じ得る変形との関係を調べてみよう。すなわち、式 (2), (5), (9), (12), (13) を用いて、 $n$  と  $\mu$  との関係を図示すると、図-9 のようになる。

図-9 において、I, II, III, IV (あるいは IV') と記入してあるのは、それぞれ第1変形から第4変形までが生じ得る領域を示す。 $\mu$  の小さい間は、 $n$  に関係なく第1変形が生ずるが、 $\mu$  が大きくなると、 $n$  の値によつて生ずる変形の種類が異なることがわかる。なお、第2変形と第3変形、第4変形のIVとIV'は  $n$  が 0.36 より大きいか、小さいかによつて生ずる。

3. 基礎方程式の解

それぞれの変形に対し、運動の方程式を誘導したが、次にこれらの方程式の解を誘導し、運動終了後の永久変形として、自由端のタワミ、固定端のタワミ角などを求めてみよう。

(1) 第1変形 ( $\mu_I \leq \mu \leq \mu_{II}, \mu_{III}$ )

式 (3) を積分すると、次のようになる。

$$mI^3\omega/M_0 = 3(I_t - t) \dots\dots\dots(17)$$

ただし

$$I_t = \int_0^t \mu dt \dots\dots\dots(18)$$

図-8 第4変形の経過

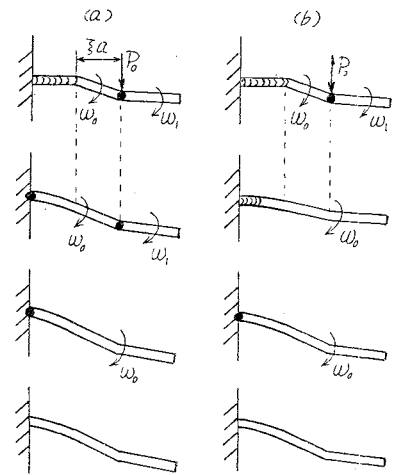
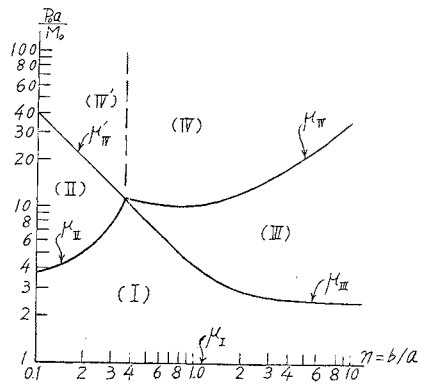


図-9  $n$  と変形との関係



であつて、以下すべて  $I_t$  を用いることにする。

いま、 $\omega=0$  すなわち変形が終了する時刻を  $t_f$  とすると、式 (17) から  $t_f$  は次のようになる。

$$t_f = I_{t_f} = \mu\tau \dots\dots\dots (19)$$

式 (17) をさらに積分すると、 $t=t_f$  における固定端のタワミ角  $\theta_{0,f}$ 、自由端のタワミ  $\delta_{1,f}$  は次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,f} = \frac{3}{2(1+n)^2} \mu(\mu-1)\tau^2 \dots\dots\dots (20)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,f} = \frac{3}{2(1+n)^2} \mu(\mu-1)\tau^2 \dots\dots\dots (21)$$

(2) 第2変形 ( $\mu_{II} \leqq \mu \leqq \mu_{IV}'$ ,  $n < 0.36$ )

式 (6), (7) から  $\xi, \omega$  を求めると次のようになる。

$$\xi = \frac{3t}{I_t} + 2n \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{ma^3}{M_0} \omega = \frac{2I_t}{\left(\frac{3t}{I_t} + 3n\right)^2} \dots\dots\dots (23)$$

式 (22), (23) は  $\xi=1$  になる時刻  $t_{II}$  まで適用される。式 (22) から  $t_{II}$  は次のようになる。

$$t_{II} = I_{t_{II}} \left/ \frac{3}{1-2n} = \frac{I_{t_{II}}}{\mu_{II}} \right. \dots\dots\dots (24)$$

$t=t_{II}$  における自由端のタワミ角  $\theta_{1,II}$  およびタワミ  $\delta_{1,II}$  は式 (23) から次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{1,II} = \int_0^{t_{II}} \frac{2I_t}{\left(\frac{3t}{I_t} + 3n\right)^2} dt \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,II} = \int_0^{t_{II}} \frac{2I_t}{\left(\frac{3t}{I_t} + 3n\right)} dt \dots\dots\dots (26)$$

さらに、 $0 < t < \tau$  に対しては  $I_t = \mu t$ ,  $\tau < t$  に対しては  $I_t = \mu\tau$  である点を考えると、次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{1,II} = \frac{\mu^2}{3} \left\{ \frac{\mu(3+2\mu n)}{3(1+\mu n)^2} - \frac{2}{n+1} \right\} \tau^2 \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,II} = \frac{\mu^2}{3} \left\{ \frac{1}{1+\mu n} + 2 \log \frac{\mu(1+n)}{3(1+\mu n)} \right\} \tau^2 \dots\dots\dots (28)$$

$t > t_{II}$  に対しては、式 (7) において  $\xi=1$  とおけば、第1変形の式 (3) を得る。従つて、 $t=t_{II}$  以後の変形は第1変形と全く同じである。変形終了後の自由端のタワミ角  $\theta_{1,f}$ 、タワミ  $\delta_{1,f}$ 、固定端のタワミ角  $\theta_{0,f}$  を求めると、次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{1,f} = \frac{ma^3}{M_0} \theta_{1,II} + \frac{2\mu^2}{3} \frac{\tau^2}{(1+n)} \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,f} = \frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,II} + \frac{2\mu^2}{3} \tau^2 \dots\dots\dots (30)$$

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,f} = \frac{2\mu^2}{3} \frac{\tau^2}{(1+n)} \dots\dots\dots (31)$$

(3) 第3変形 ( $\mu_{III} \leqq \mu \leqq \mu_{IV}$ ,  $n > 0.36$ )

式 (10), (11) から  $\omega_0, \omega_1$  を求めると、次のようになる。

$$\frac{ma^3 \omega_0}{M_0} = \frac{\frac{n^3}{3} I_t - t \left( \frac{n^2}{2} + \frac{2n^3}{3} \right)}{\frac{n^3}{9} + \frac{n^4}{12}} \dots\dots\dots (32)$$

$$\frac{ma^3 \omega_1}{M_0} = \frac{-\frac{n^2}{2} I_t + t \left( \frac{1}{3} + n + n^2 \right)}{\frac{n^3}{9} + \frac{n^4}{12}} \dots\dots\dots (33)$$

$\omega_0 = \omega_1$  になる時刻を  $t_{III}$  とすると、式 (32), (33) から  $t_{III}$  は次のようになる。

$$t_{III} = It_{III} / \mu_{III} \dots\dots\dots (34)$$

式 (32), (33) は  $t=t_{III}$  まで適用される。 $t=t_{III}$  における自由端、固定端のタワミ角を  $\theta_{1,III}, \theta_{0,III}$ 、自由端およ

び載荷点のタワミを  $\delta_{1,III}, \delta_{0,III}$  とすると、これらは式 (32), (33) を積分して、次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{1,III} = \frac{6\mu}{4n+3n^2} \left\{ \frac{1+3n+3n^2}{n^2\mu_{III}^2} \mu - \frac{3}{\mu_{III}} \mu + \frac{3}{2} \right\} \tau^2 \dots\dots\dots (35)$$

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,III} = \frac{3\mu}{4+3n} \left\{ -\frac{3+4n}{n\mu_{III}^2} \mu + \frac{4}{\mu_{III}} \mu - 2 \right\} \tau^2 \dots\dots\dots (36)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{0,III} = \frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,III} \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,III} = \frac{ma^3}{M_0} \theta_{1,III} \cdot n + \frac{ma^2}{M_0} \delta_{0,III} \dots\dots\dots (38)$$

$t > t_{III}$  に対しては、第3変形の方程式 (10) において、 $\omega_0 = \omega_1$  とおけば、第1変形の方程式が得られる。変形終了時 ( $\omega_0 = 0$ ) の固定端のタワミ角  $\theta_{0,f}$  および自由端のタワミ  $\delta_{1,f}$  は次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,f} = \frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,III} + 3\mu^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_{III}} + \frac{1}{2\mu_{III}^2} \right) \frac{\tau^2}{(1+n)^3} \dots\dots\dots (39)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,f} = \frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,III} + 3\mu^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_{III}} + \frac{1}{2\mu_{III}^2} \right) \frac{\tau^2}{(1+n)^2} \dots\dots\dots (40)$$

(4) 第4変形 ( $\mu \geq \mu_{IV}$  で  $n > 0.36$  あるいは  $\mu \geq \mu_{IV}'$  で  $n < 0.36$ )

式 (14), (15), (16) から  $\omega_0, \omega_1, \xi$  を求めると、次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \omega_0 = \frac{12}{\xi^3} t \dots\dots\dots (41)$$

$$\frac{ma^3}{M_0} \omega_1 = \frac{3}{n^3} t - \frac{18}{n\xi^2} t \dots\dots\dots (42)$$

$$\xi = \frac{3t + \sqrt{3ntI_t + \frac{9t^2}{2}}}{I_t - \frac{3t}{2n}} \dots\dots\dots (43)$$

まず、 $\mu \geq \mu_{IV}$  で  $n > 0.36$  の場合、すなわち  $\xi = 1$  にまずなつてから、載荷点の塑性ヒンジが消える場合を考えよう。 $\xi = 1$  になる時刻を  $t_{IV}$  とすると、式 (43) から  $t_{IV}$  は次のようになる。

$$t_{IV} = \frac{I_{tIV}}{\mu_{IV}} \dots\dots\dots (44)$$

図-10 に示す  $t = t_{IV}$  における各点のタワミ角およびタワミは次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,IV} = 12 \int_0^{t_{IV}} \frac{t}{\xi^3} dt \dots\dots\dots (45)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{0,IV} = 12 \int_0^{t_{IV}} \frac{t}{\xi^2} dt \dots\dots\dots (46)$$

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{1,IV} = \frac{3}{n^3} \frac{t_{IV}^2}{2} - \frac{18}{n} \int_0^{t_{IV}} \frac{t}{\xi^2} dt \dots\dots\dots (47)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,IV} = \frac{ma^2}{M_0} \delta_{0,IV} + \frac{ma^3}{M_0} \theta_{1,IV} \cdot n \dots\dots\dots (48)$$

$t > t_{IV}$  に対しては、第3変形、第1変形を経て、 $t = t_f$  にて変形は終了する。すなわち  $t = t_{III}$  で載荷点の塑性ヒンジが消失し、 $t = t_f$  にて  $\omega_0 = 0$  になる。 $t = t_{III}$  における固定端のタワミ角および自由端のタワミは次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,III} = \frac{12}{4+3n} \int_{t_{IV}}^{t_{III}} I_t dt - \frac{9+12n}{4n+3n^2} (t_{III}^2 - t_{IV}^2) \dots\dots\dots (49)$$

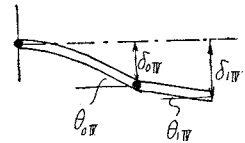
$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,III} = \frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,IV} + \frac{6+9n+6n^2}{4n^2+3n^3} (t_{III}^2 - t_{IV}^2) - \frac{6}{4+3n} \int_{t_{IV}}^{t_{III}} I_t dt \dots\dots\dots (50)$$

$t = t_f$  で変形が終了した時の固定端のタワミ角、自由端のタワミは、第3変形の場合の式 (39), (40) と形式上全く等しく、次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,f} = \frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,III} + 3\mu^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_{III}} + \frac{1}{2\mu_{III}^2} \right) \frac{\tau^2}{(1+n)^3} \dots\dots\dots (51)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,f} = \frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,III} + 3\mu^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu_{III}} + \frac{1}{2\mu_{III}^2} \right) \frac{\tau^2}{(1+n)^2} \dots\dots\dots (52)$$

図-10



次に、 $\mu \geq \mu_{IV}'$  で  $n < 0.36$  の場合、すなわち、荷重点の塑性ヒンジがまず消失して、その後で  $\xi=1$  になる場合を考えよう。 $\omega_1 = \omega_0$  になった時の  $\xi$  および  $t$  は次のようになる。

$$\xi_{IV}' = 2\sqrt{2} n \cos \frac{\pi}{12} \dots \dots \dots (53)$$

$$t_{IV}' = I_{IV}' / \mu_{IV}' \dots \dots \dots (54)$$

従つて、 $t \leq t_{IV}'$  に対しては式(45)~(48)がそのまま適用される。いま  $t = t_{IV}'$  における先端のタワミを求めると、次のようになる。

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,IV}' = \frac{3}{n^2} \frac{t_{IV}'}{2} - 6 \int_0^{t_{IV}'} \frac{t}{\xi^2} dt \dots \dots \dots (55)$$

$t > t_{IV}'$  に対しては、 $t = t_{II}$  にて  $\xi=1$  となり、 $t = t_f$  で変形が終了する。 $t = t_{II}$  における自由端のタワミは、次のようになる。

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,II} = \frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,IV}' + \int_{t_{IV}'}^{t_{II}} \frac{2 I_t}{3 \left( \frac{t}{I_t} + n \right)} dt \dots \dots \dots (56)$$

$t = t_f$  における固定端のタワミ角、自由端のタワミは、形式上は第2変形と全く同じで、次のようになる。

$$\frac{ma^3}{M_0} \theta_{0,f} = \frac{2 \mu^2}{3} \frac{\tau^2}{1+n} \dots \dots \dots (57)$$

$$\frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,f} = \frac{ma^2}{M_0} \delta_{1,II} + \frac{2 \mu^2}{3} \tau^2 \dots \dots \dots (58)$$

4. 計算結果

以上で基礎方程式の解として、自由端あるいは固定端のタワミ、タワミ角などを誘導した。任意の点の、任意の時刻における変形も、全く同様にして求められるわけである。

式(20),(21),(30),(31),(39),(40),(51),(52),(57),(58)などから、衝撃荷重  $u = P_0 a / M_0$  と変形終了後の永久変形との関係を計算すると、図-11(a),(b)、図-12(a),(b)のようになる。図-11は  $n < 0.36$  の場合のタワミおよびタワミ角を示し、 $\mu$  が

大きくなるに従つて、第1変形、第2変形、第4変形(IV')と変化している。図-12は  $n > 0.36$  の場合で、 $\mu$  が大きくなるに従つて、第1変形、第3変形、第4変形(IV)と変化している。図-12(b)にて、 $n$  が大きくなるに従つて、固定端のタワミ角に比較して、自由端のタワミが急激に小さくなるのがわかる。これは第3変形あるいは第4変形において、荷重点の塑性ヒンジが消えるまでは、長さ  $b$  の先端の部分の回転角速度  $\omega_1$  が負になるためである。

これらの図を使用すれば任意寸法および長さの片持バリの永久変形が直ちに求められる。一例として、荷重と永久変形との数値を計算例で示してみよう。いま、断面の寸法  $300 \times 150 \times 10$  のI型鋼よりなる長さ  $5m$  の片持バ리를考えよう。この片持バリ断面の重心を通り、ウエ

図-11(a) 荷重・変形曲線

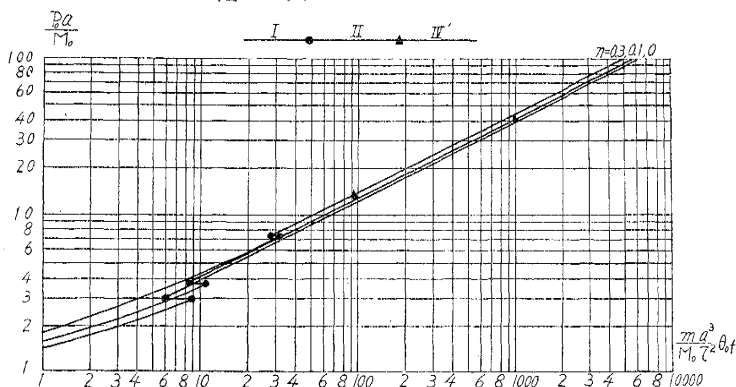
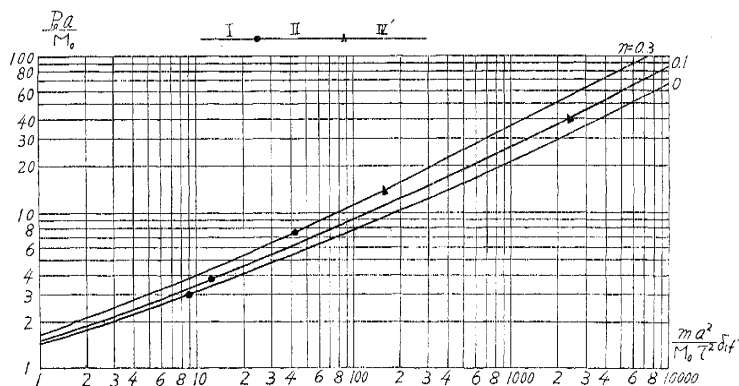


図-11(b) 荷重・変形曲線



ブの方向に平行な荷重に対しては、全塑性モーメント  $M_0$  は約 23.3t-m となる。 $r=1/1000$  sec,  $P_0=10$  t, 50 t, 250 t として、載荷点を種々変化させた場合の固定端のタワミ角および自由端のタワミを求めると、表-1, 2 のようになる。荷重が大きくなるに従い、あるいは載荷点が自由端に近づくに従って、タワミが急に増加することがわかる。

5. むすび

片持バりが衝撃荷重を受けた場合の塑性変形を、ハリが完全塑性材料で構成されており、かつ弾性変形は無視できるものとして、すなわち完全剛塑性体であると仮定して、理論的に解析してみた。せん断力、ヒズミ硬化などの影響は無視されており、また衝撃荷重としても、ここで扱った荷重は厳密な意味では実際上存在しないであろう。

しかし、変形終了まで破壊の生じない延性材料で構成された片持バりの塑性変形を、近似的に知る上には、著者の研究結果は十分参考になるものと考えられる。なお、板その他の土木構造物に、同様な解析を行い、衝撃荷重による塑性変形の様子を

知ることは興味ある問題であり、今後研究を進めるつもりである。

最後に、種々有益な御教示、御激励を頂いた京都大学小西、成岡両教授に感謝の意を表する次第である。

参考文献その他

- 1) E.H. Lee, P.S. Symonds: J. of Appl. Mech., Vol. 19, 1952, p. 308
- 2) P.S. Symonds: J. of Appl. Mech., Vol. 20, 1953, p. 475
- 3) H.H. Bleich, M.G. Salvadori: Proc. ASCE, Vol. 79, No. 287, 1953
- 4) P.S. Symonds, C.F.A. Leth: J. of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 2, 1954, p. 92
- 5) P.S. Symonds: Proc. 2nd U.S. National Congress of Appl. Mech., 1954, p. 505
- 6) B.A. Cotter, P.S. Symonds: Proc. ASCE, Vol. 81, No. 675, 1955
- 7) M.F. Conroy: J. of Appl. Mech., Vol. 23, 1956, p. 239
- 8) ここでは、blast type load として、矩形荷重を用いたが、他の形の荷重でも peak load  $P_0$  と  $\int_0^{\infty} P dt$  が等しければ、終局の変形量はあまり相違しない。2), 4) 参照。

(昭. 32. 12. 28)

図-12(a) 荷重・変形曲線

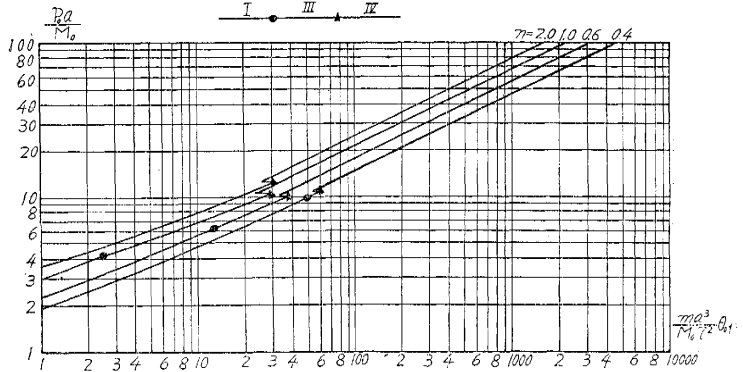


図-12(b) 荷重・変形曲線

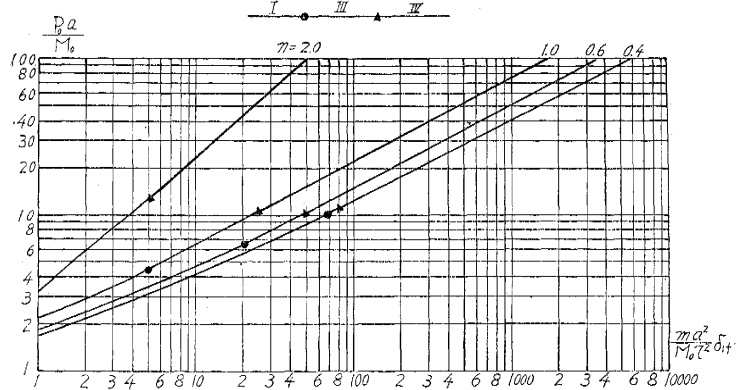


表-1  $\theta_{0f}$  (度)

$P_0 t$	500	455	385	313	250	167
10	0.0057	0.0052	0.0029	—	—	0
50	0.36	0.25	0.18	0.14	0.07	0.06
250	10.5	7.4	4.9	2.9	1.9	0.52

表-2  $\delta_{1f}$  (cm)

$P_0 t$	500	455	385	313	250	167
10	0.05	0.04	0.02	—	—	0
50	3.1	2.0	1.2	0.78	0.34	0.22
250	92	59	33	16	8.4	1.5