流出函数による由良川洪水の解析

正員　石原藤次郎*
准員　高瀬信忠**

FLOOD ANALYSIS OF THE YURA RIVER BY RUNOFF FUNCTION

By Dr. Eng., Tōjirō Ishihara, C.E. Member and
Nobutada Takase, C.E. Assoc. Member

Synopsis : Based on the assumption of unit graph method that runoff phenomena are resulted from the summation of unit runoff produced by unit rainfall, the authors adopt a runoff function, similar to a function of Pearson type but modified by a single exponential function after the secondary point of inflection, in estimating the unit runoff, and determine the values of two coefficients that dominate the runoff function, corresponding to the variation of rainfall conditions. Consequently, the floods of the Yura River are analysed with results of good agreements.

要　旨　本文では，流出現象が単位降雨に基づく単位流出量の累計であるという従来の単位図法的仮定に従うものとし，単位流出量の推定に Pearson 型類似の複合指数函数を用いて，その函数型を支配している二つの係数を降雨条件によつて変化せしめることにした。この方法を由良川洪水に適用した結果は非常に良好であつて，洪水解析の一つの方法として注目すべきものと考えられる。

1. 緒　言

降雨量より河川への流出量を推定する方法は，水文学上最も重要な研究課題であつて，古くより種々の方法が研究されてきたが，単位図法が工学上最も適用性が広く，かつ有用な方法であると考えられている。

本文は，Pearson 型類似の複合指数函数を流出函数として用いて，単位降雨量により生じる単位流出量曲線，すなわち単位図を求め，その特性を考察して既往の洪水資料から函数型を支配する係数値を降雨特性によつて変化させ，実際に由良川における洪水に適用したものである。

地表面に降つた雨水が河道に達する経路によつて，水文学上一般に流出は表面流出，中間流出および地下水流出に分類されている。しかしながら，中間流出は降雨後比較的短い期間に河道へ流れ出るものであるから，ここでは表面流出と中間流出を含めて直接流出とし，これと地下水流出との二成分に分離して考察をすすめることにした。

2. 基礎式の誘導

河道における貯溜量を S，流入流量を I，流出流量を Q とすると，流水の連続式は

$$\frac{dS}{dt}=I-Q \quad\cdots\cdots(1)$$

である。いま，貯溜量と流出流量との間に Horton の貯溜方程式 $S=Q/\alpha$ が成立するものとして，これを (1) 式に代入すると，

$$\frac{dQ}{dt}=\alpha(I-Q),\ \alpha>0 \quad\cdots\cdots(2)$$

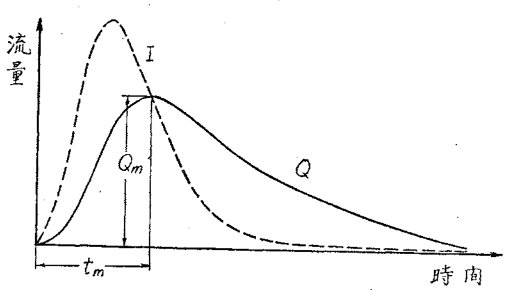
がえられる。ここに，α は河道および降雨条件によつて定まる係数である。つぎに図—1 において，I と Q との間にある時間的関係，すなわち $f(t)=I/Q$ が成立すると考え，これを (2) 式に代入すると，

$$\frac{dQ}{dt}=\alpha Q\{f(t)-1\} \quad\cdots\cdots(3)$$

となり，a を積分常数とすれば，流出流量は

$$Q=ae^{-\alpha t}\cdot e^{\alpha\int f(t)dt} \quad\cdots\cdots(4)$$

図—1　I と Q との関係



---

* 工学博士，京都大学教授，工学部土木工学教室　** 建設技官，建設省宮崎工事々務所

と表わすことができる。従つて，a は初期条件 $t=0$ のとき $Q=0$ によつて決定されるが，この場合問題となるのは未知函数 $f(t)$ である。$f(t)$ については，a が0でない有限実数値であることが予想されるから，初期条件より，$t=0$ で $\int f(t)dt \to -\infty$ となり，また最大流出時 $t=t_m$ で (2) 式より流入流量と最大流出流量 Q_m が等しくなるということから，$f(t_m)=1$ というような性質をもつていなければならない。このような函数型のうちでは指数函数 $f(t)=(t_m/t)^{\mu}$，$\mu \geqq 1$，が最も簡単なものであるが，ここではさらに簡単な $\mu=1$ という形のものを仮定しよう。従つて，(4) 式は，

$$Q=at^n e^{-\alpha t}，\text{ただし } n=\alpha t_m，n \geqq 1 \quad \cdots\cdots (4)'$$

であり，

$$I=f(t)Q=at^{n-1} \cdot t_m \cdot e^{-\alpha t} \quad \cdots\cdots (5)$$

となる。(4)′ 式は Pearson 型類似の指数函数であつて，ここで解析する基本的関係となる。なお，$\mu>1$ の場合についても同様に解析をすすめることができるが，函数形式がきわめて複雑となり，実用上繁雑にたえられず，今後に残されたものということができる。

一方，流出流量の第二変曲点以後の流入流量について考えると，表面流の河道への流入が終り，中間流あるいは地下水流による流入によるものとみなされるから，第二変曲点以後においては実用上流入流量は小さいとみなされよう。従つて，近似的に $I \approx 0$ とすると，このような減水部については (1) 式より，

$$Q=Q_0 e^{-At}，\text{あるいは } q=q_0 e^{-At} \quad \cdots\cdots (6)$$

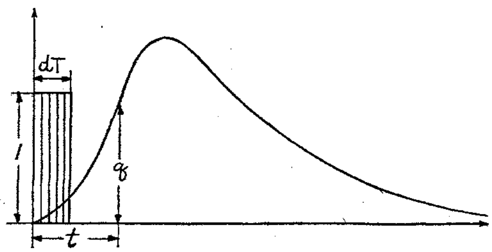
となる。ここに，Q_0 は減水部の初期流量，A はある係数であり，単位面積当りの流量を q，q_0 としている。しかしながら，I と Q との間には $I=(t_m/t)Q$ という関係があり，Q の第二変曲点では $I=\{t_m/(t_m+\sqrt{n}/\alpha)\}Q$ となり，I が比較的小さくない場合も考えられるから，上式はむしろ近似的な仮定であるが，逓減曲線が指数曲線で表わされるという経験的事実をも考慮して，第二変曲点以後では河道貯溜による流出流量が支配的になると仮定したわけである。したがつて，所要の流出函数としては，Pearson 型類似の指数函数 (4)′ を用い，表面流出が終つたとみなされる第二変曲点以後を (6) 式でおきかえることにしたのである。C. G. Edson[1] は等到達時間曲線と河道貯溜の概念から，Pearson 型類似の指数函数で単位図の形を表わしているが，上述のわれわれの考え方をある程度裏付けるものと思われる。

以上の結果から，微小時間 dT の間に単位強度の降雨量があつた場合，任意の下流地点の単位面積当りの流出流量は，比流量の概念と同様に，(4)′ 式を参照して次式のごとく表わされる。

$$q=\frac{Q}{B}=\frac{a}{B} \cdot t^n \cdot e^{-\alpha t} \equiv a_1 t^n e^{-\alpha t} \quad \cdots\cdots (7)$$

ここに，B はいま考慮している地点までの流域面積である。なお，n および α は流域と降雨条件によつて定まる係数であつて，第二変曲点以後の減水部については，後に (6) 式を用いて (7) 式を修正することにした。

図—2　単位流出流量曲線



3.　基礎式の解析

有効雨量を考えることとして，降雨量と流出量の間に損失がないものとすれば，図—2 によつて

$$\int_0^{\infty} q dt=\int_0^{\infty} a_1 t^n e^{-\alpha t} dt=1 \cdot dT$$

となる。いま，q を m³/s/km²，降雨強度を mm/hr の単位で表わし，上式の関係を用いて a_1 を消去すると，(7) 式は

$$q=\frac{0.2778\,\alpha^{n+1}}{\Gamma(n+1)} t^n e^{-\alpha t} dT \quad \cdots\cdots (8)$$

となる。この式で最大流量 q_m になる時刻を t_m とすると，$dq/dt=0$ ならしめる t の値は 0，n/α，∞ であるが，$t=0$，∞ では q_m となりえないから，当然 $t_m=n/\alpha$ でなければならない。この関係を (8) 式に入れて α を消去すると，

$$q_m=\frac{0.2778\,n^{n+1}}{\Gamma(n+1)e^n t_m} dT \quad \cdots\cdots (9)$$

となる。いま，時間 τ_0 の間連続して一様強度の単位降雨があつたとすると，任意時間 t における流量 q は，(8) 式を積分することによつて，

$$q=\frac{0.2778\,\alpha^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\int_0^{\tau_0}(t-T)^n e^{-\alpha(t-T)}dT,\quad t>\tau_0 \cdots\cdots(10)$$

ここで n を正の整数とすれば，部分積分によつて，

$$\int_0^{\tau_0}(t-T)^n e^{-\alpha(t-T)}dT=e^{-\alpha(t-\tau_0)}\left\{\frac{1}{\alpha}(t-\tau_0)^n+\frac{n}{\alpha^2}(t-\tau_0)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\alpha^3}(t-\tau_0)^{n-2}\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{\alpha^{n+1}}\right\}-e^{-\alpha t}\left\{\frac{1}{\alpha}t^n+\frac{n}{\alpha^2}t^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\alpha^3}t^{n-2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{\alpha^{n+1}}\right\}$$

となるから，$n=1,2,3,\cdots$ とした場合，$t'=t-\tau_0$ として (10) 式はつぎのようになる。

$n=1$；$q=0.2778\{e^{-\alpha t'}(\alpha t'+1)-e^{-\alpha t}(\alpha t+1)\}$,

$n=2$；$q=\dfrac{0.2778}{2}\{e^{-\alpha t'}(\alpha^2 t'^2+2\alpha t'+2)-e^{-\alpha t}(\alpha^2 t^2+2\alpha t+2)\}$,

$n=3$；$q=\dfrac{0.2778}{6}\{e^{-\alpha t'}(\alpha^3 t'^3+3\alpha^2 t'^2+6\alpha t'+6)-e^{-\alpha t}(\alpha^3 t^3+3\alpha^2 t^2+6\alpha t+6)\}$,

$n=4$；$q=\dfrac{0.2778}{24}\{e^{-\alpha t'}(\alpha^4 t'^4+4\alpha^3 t'^3+12\alpha^2 t'^2+24\alpha t'+24)-e^{-\alpha t}(\alpha^4 t^4+4\alpha^3 t^3+12\alpha^2 t^2+24\alpha t+24)\}$,

……………………………………

一方，(8) 式において降雨の微小継続時間 dT を τ_0 にとると，

$$q=\frac{0.2778\,\alpha^{n+1}}{\Gamma(n+1)}t^n e^{-\alpha t}\tau_0,\quad t>\tau_0 \cdots\cdots(11)$$

がえられる。この (11) 式は降雨継続時間が τ_0 である場合の近似式であつて，厳密に計算するには (10) 式によらねばならない。そこで，n と α とを種々に変化して両式を比較し，(10) 式の曲線が (11) 式のそれに較べて近似的に時間 $\tau_0/2$ だけ遅れていることがわかつたので，近似式 (11) の値を $\tau_0/2$ だけ遅らせて合成し，その結果を近似的に厳密式 (10) の値を合成したものとみなすことにしたのである。なお，この関係は n が整数（ただし $n\geqq 1$）でなくても成立する。

いま，(9) 式で $dT=\tau_0$ とおいて変形すれば，

$$q_m t_m=\frac{0.2778\,n^{n+1}\tau_0}{\Gamma(n+1)e^n}\cdots\cdots(12)$$

となる。この式からわかるように，τ_0 を定めると $q_m\cdot t_m$ の値は n のみの函数となる。

つぎに，(7) 式で $d^2q/dt^2=0$ とおいて，その変曲点を求めると，つぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\text{第一変曲点；}\ t_r=(n-\sqrt{n})/\alpha=t_m-\sqrt{n}/\alpha,\\&\text{第二変曲点；}\ t_f=(n+\sqrt{n})/\alpha=t_m+\sqrt{n}/\alpha.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

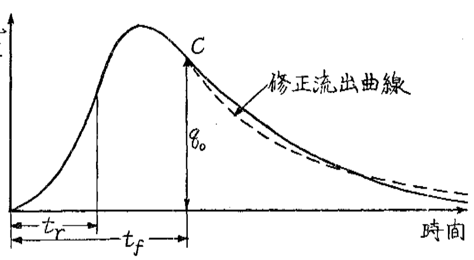
4．第二変曲点以後の基礎式の修正

前に述べたように，表面流出がなくなつたとみなされる第二変曲点 t_f 以後は，(6) 式で表わされる。ここに q_0 は $t=0$（図—3 にてC点を時間の起点と考える）における単位流域面積当りの流量である。一方，修正しない場合のC点以後の面積 s_1 が修正した場合の面積 s_2（実際は流出量であるが，係数を定める計算であるから面積と考えてもよい）に等しくなるように，(6) 式の係数を決定しなければならない。このためにまず s_1, s_2 を計算すると，

$$s_1=a_1\int_{(n+\sqrt{n})/\alpha}^{\infty}t^n e^{-\alpha t}dt=a_1\int_0^{\infty}t^n e^{-\alpha t}dt-a_1\int_0^{(n+\sqrt{n})/\alpha}t^n e^{-\alpha t}dt$$
$$=\frac{a_1}{\alpha^{n+1}e^{n+\sqrt{n}}}\{(n+\sqrt{n})^n+n(n+\sqrt{n})^{n-1}$$
$$+n(n-1)(n+\sqrt{n})^{n-2}+\cdots+n!\}\cdots\cdots(14)$$

$$s_2=q_0\int_0^{\infty}e^{-At}dt=q_0/A\cdots\cdots(15)$$

図—3　修正流出流量曲線



となる。なお，修正しない場合の流出流量曲線の全面積を s_3 とすると，

$$s_3=a_1\int_0^{\infty}t^n e^{-\alpha t}dt=a_1 n!/\alpha^{n+1}\cdots\cdots(16)$$

であつて，$y=s_1/s_3=s_1\alpha^{n+1}/a_1 n!$ として，(14) 式の s_1 を代入するとつぎのようになる。

$$y=\frac{1}{n!\,e^{n+\sqrt{n}}}\{(n+\sqrt{n})^n+n(n+\sqrt{n})^{n-1}+n(n-1)(n+\sqrt{n})^{n-2}+\cdots\cdots+n!\}\cdots\cdots(17)$$

上式の y は α に無関係であつて n のみの函数であるから，$n=1,2,\cdots\cdots$ に対する y の値を計算し，図—4 をえた。したがつて n を与えると，この図から y の値を求めることができる。一方，単位降雨量による流出期間中の単位流域面積当りの流出量は

$$s_2=\int_0^{\infty} q^{\alpha t}=0.2778\,\tau_0$$

であるから，

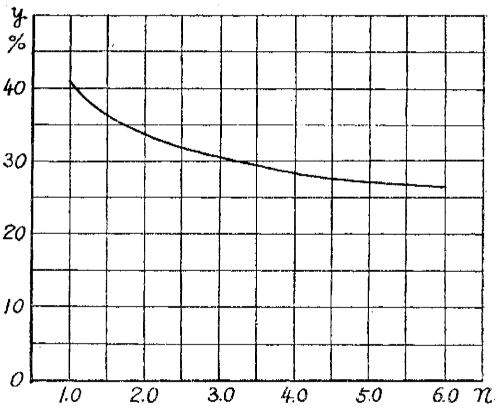
$$s_1=s_2 y=0.2778\,\tau_0 y$$

と表わされ，$s_1=s_2$ なる条件よりつぎの関係がえられる。

$$A=q_0/(0.2778\,\tau_0 y)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

ここに，q_0 はC点における単位流域面積当りの流量であつて，q_0, τ_0 を与えると，上式から A を求めることができる。

図—4　y と n との関係



5.　由良川洪水に対する適用

建設省大野ダム建設地点より上流の由良川流域 350.3 km² について，昭和 27 年以来われわれが収集した多数の洪水資料を用い，上述の流出函数による新解法の適用性を確かめることにした。

（1）　有効雨量の決定と単位時間および単位降雨量のとり方　単位図法を適用するには，流域平均雨量と流域平均時間雨量が必要であり，またこれから損失雨量を差引いて有効雨量を分離しなければならない。この場合従来から流出係数の概念が用いられてきたが，われわれは由良川洪水の解析に Horton 型の浸透能曲線を適用し，有効雨量を都合よく分離して良好な結果をえている[2),3)]。本文でもこの方法で有効雨量を決定し，単位時間を 2 hr，単位降雨量を 20 mm として解析を進めることにした。

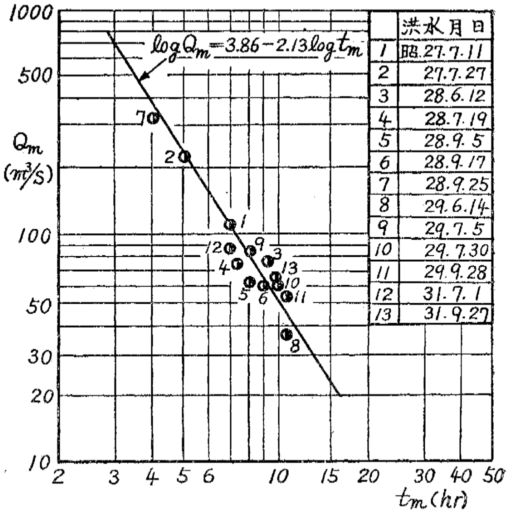
（2）　n の決定　いま，(12) 式に上述の条件を入れると，

$$q_m t_m=\frac{0.2778\,n^{n+1}}{\Gamma(n+1)e^n}\times 2\times\frac{20}{2}=\frac{0.2778\,n^{n+1}}{\Gamma(n+1)e^n}\times 20\equiv M\times 20\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

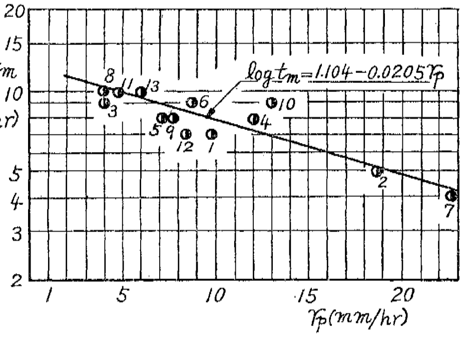
となり，q_m と t_m とを求めなければならない。これらは直接流出流量と有効雨量とから定められるが，なるべく単独降雨による資料によることが望ましい。そこで t_m の推定に当つては，近似的に最大強度の降雨が最大流量に対応するものとして両者の時間差をとり，また q_m の推定には単位図の算定に用いられている幾何学的方法[2)]で近似させることにした。しかしこうした方法はあくまでも近似法であるから，できるだけ単独降雨に近いものから直接 q_m を推定することが望ましいわけである。

由良川の過去の洪水資料から上述のようにして求めた q_m と t_m とを両対数紙にプロットしたのが図—5 であるが，大体において直線的関係にあることがわかる。ここに，Q_m(m³/s) は q_m(m³/s/km²) に由良川の大野ダム上流部の流域面積 350.3 km² をかけたもので，この流域全体からの流出流量に相当するものである。図—6 は

図—5　t_m と Q_m との関係図



図—6　r_p と t_m との関係図



最大降雨強度 r_p とその降雨に対する t_m との関係図であつて，片対数紙上で大体直線的傾向が認められる。こうした性質は，立神博士の木曾川上流部の研究[1]やわれわれの有田川の洪水解析[5]からも確かめられているので，この図—6 を近似的に一般の降雨強度 r とそれに対する t_m との関係図として用いることにした。

いま，図—5 において Q_m を q_m に変換すると，

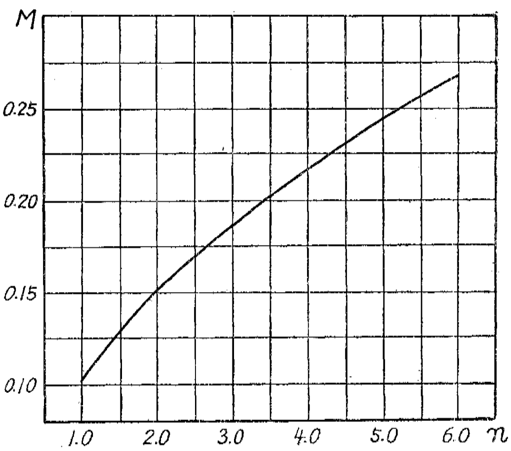
$$\log q_m = 1.32 - 2.13 \log t_m, \quad \therefore \; q_m t_m = 20.89/t_m^{1.13}$$

となり，これを (19) 式に入れるとつぎのようになる。

$$M = \frac{0.2778\, n^{n+1}}{n!\, e^n} = 1.0445/t_m^{1.13} \cdots\cdots (20)$$

図—7 は n と M の関係を図示したもので，降雨強度が定まると図—6 から t_m がわかり，(20) 式から M が計算されるから，図—7 を用いて直ちに n の値が求められるわけである。

図—7 n と M との関係図



(3) α および修正曲線の決定 前述のようにして n が定まると，$\alpha = n/t_m$ によつて α が求められるから，第二変曲点 t_f に相当する流量 q_0 が (11) 式で決定され，さらに (18) 式と図—4 によつて A がわかつて，複合流出流量曲線がきまつたことになる。

いま，2時間継続の有効雨量を r(mm/hr) とすれば，(11) 式および (18) 式はつぎのように改めることが必要である。

$$q = \frac{0.2778\,\alpha^{n+1}}{\Gamma(n+1)} t^n e^{-\alpha t} \tau_0 r$$

$$= \frac{0.5556\,\alpha^{n+1}}{n!} t^n e^{-\alpha t} r, \cdots\cdots (21)$$

$$A = q_0/(0.2778\,\tau_0 y r) = q_0/(0.5556\, y r) \cdots\cdots (22)$$

図—7 によつて求めた n が1より小さくなつた場合には，$n \geqq 1$ という条件から $n=1$ にとるべきであるが，由良川では大体 $r = 11.0$ mm/hr 以下の降雨に対し $n=1$ とした。

以上のようにして，降雨強度 r の変化に応じて，流出函数の各係数を時々刻々と変えていくわけであるが，このことはわれわれがさきに降雨特性に応じて単位図を変化させることを提唱したのと同じ意義をもつものであつて[2),3)]，わが国の急流中小河川に対して流出函数を適用する場合の一方法として示唆に富むものといえよう。

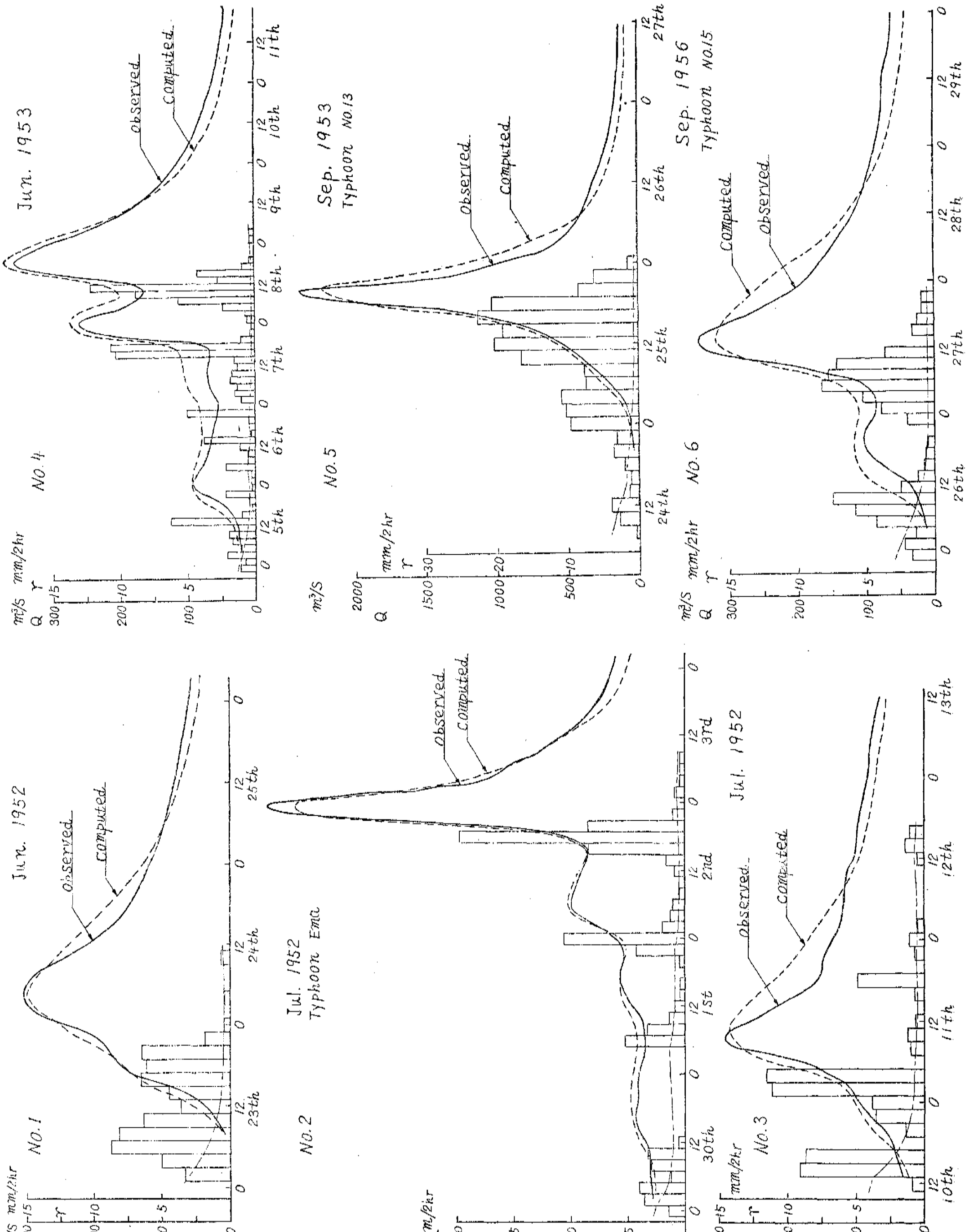
(4) 適用結果 以上の方法を用いて実際の洪水資料を解析したのが図—8 であつて，非常によく適合していることがわかる。この方法は，従来の単位図法が降雨強度に関係なく流域の一地点にただ一つの単位図を決定する関係上，実際河川への適合性が悪かつた欠点を改良し，単位流出流量曲線を降雨強度によつて時々刻々と変化させたわけである。由良川の場合，$r = 11.0$ mm/hr 以下，すなわち $n=1$ としたときには，r を適当な範囲に区切つて，その範囲は一つの流出函数で代表させ，比例配分で解析しても大差がなかつたから，近似的にこうした方法をとると，計算が非常に簡単になつて実用的である。

6. 結　　論

本論文では，流出函数の性質を追求してその理論的裏付を行うとともに，Pearson 型類似の複合流出函数を用いて降雨から流出を推定する方法を提案し，由良川洪水に適用して良好な結果をうることができた。この場合，流出現象が単位降雨量による単位流出量の累計であるという従来の単位図法的仮定に従うものとし，この単位流出量の時間的分布を降雨強度によつて変化させて，単位図法の取扱いの欠点の一つを改めるとともに，Pearson型類似の複合流出函数の各係数を既往の洪水資料によつて求めると，一義的に単位流出流量曲線がえられるようにしたのである。ここでは由良川の洪水資料だけによつたが，さらに他の多くの河川の洪水資料に適用して，流域特性と n, α との関係を究明することができれば，総合単位図的な取扱いも可能となるように思われる。こうして n, α の性格が明らかとなれば，洪水調節において計画降雨量から計画流入流量曲線を推定したり，計画高水流量を決定したりする場合に，有力な新方法として採用されるであろう。この流出函数の支配的要素は，(12) 式からもわかるように q_m と t_m とであつて，とくに t_m の方が重要である。それで本論文で行つたように，まず r と t_m の関係を求めてから，t_m と q_m との関係を見出し，流出函数の各係数を定めるのが最もよいように考えられる。

本研究は文部省試験研究費および京都府の委託研究費による研究の成果の一部であり，小林 茂および木下 博

図—8　由良川洪水の解析結果



の両君の援助をえたことを付記し，謝意を表する次第である。

参考文献

1) C. G. Edson: Parameters for relating Unit Hydrographs to Watershed Characteristics, Trans. A.G.U., Vol. 32, 1951, pp. 591–596.

2) 石原藤次郎，田中要三，金丸昭治：わが国における単位図の特性について，土木学会誌，第41巻，第3号，昭和31，pp. 18–23.

3) 石原藤次郎，金丸昭治：降雨条件の変動による単位図の変化について，土木学会論文集，第32号，昭和31，pp. 50–56.

4) 立神弘洋：洪水流出の新解析法，昭和30，pp. 1–109.

5) 石原藤次郎，高瀬信忠：有田川水文調査報告書（有田川の流出機構の変遷に関する研究），和歌山県土木部，昭和32.

（昭.32.5.23）