部分的に固定された辺を有する単純支持矩形板の曲げについて[1)]

正 員　倉 田 宗 章*
准 員　波 多 野 昭 吾**

BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED PLATE HAVING CLAMPED PORTIONS OF EDGE

By Dr. Eng., Muneaki Kurata, C.E. Member, and
Shogo Hatano, C.E. Assoc. Member

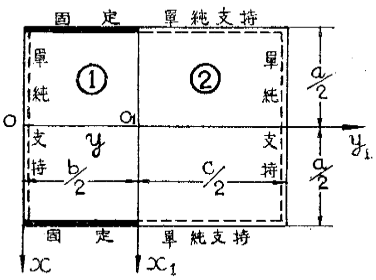
Synopsis : In actual structures we are sometimes encountered with plates having such an edge that the type of supporting is varied within the portions. It would seem that such kinds of mixed boundary value problems are not so often handled.

The solution of a problem of this type is reported in this paper. The simply supported rectangular plate which is clamped partially and symmetrically along the two opposite edges and subjected to some symmetric loads is considered. Some numerical results are shown about a square plate under a uniform load or a point load, whose clamped portions of the edges amount to half a length of these edges.

要　旨　矩形平板の曲げ問題は，周辺条件の様々な組合せに対して多くの研究があるが一辺の中途において支持条件の変るようなものは見かけない様である。実際構造物においては支持条件の不完全性又は特殊な構造部分において上記の如き周辺状態となつている場合がある様である。このようなものの解法の一つの試みとして標題の如き場合を取扱つてみた。本文では簡単の為周辺単純支持の矩形板につきその相対する一対の辺が対称的に部分固定された場合の対称曲げに対する解式を導き二，三の数値的結果を挙げてこのような板の特異性を示したものである。

1. 基本解式

図—1　板と座標系



考える板及び座標系を図—1に示すようにとる。即ち，$x=\pm\frac{a}{2}$ なる相対二辺において対称的に部分固定されているものとし，これらの固定部分，単純支持部分につきそれぞれ図示の如く領域を分け①，②とする。

i) 部分①に対して用うべき解式——まず相隣る二辺がそれぞれ a，$\frac{b}{2}$ なる矩形板を考え $y=\frac{b}{2}$ なる辺において

線　荷　重：$\sum\limits_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}} p_m \cos\frac{m\pi x}{a}$，

分布モーメント：$\sum\limits_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}} M_m \cos\frac{m\pi x}{a}$

を受け残りの三辺単純支持なる板のたわみを w_1 とすればこれは容易に求められて次式で与えられる。

$$w_1=\frac{a^2}{D\pi^2}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}[p_m f_m(y)-M_m g_m(y)]\cos\frac{m\pi x}{a} \quad\cdots\cdots(1)$$

但し

$$f_m(y)=\frac{1}{m^2\varepsilon_m}\left\{\frac{a\varepsilon_m'}{(1-\nu)m\pi}\sinh\frac{m\pi y}{a}-y\sinh\beta_m\cosh\frac{m\pi y}{a}\right\}$$

$$g_m(y)=\frac{1}{m^2\varepsilon_m}\left\{\frac{1+\nu}{1-\nu}\cosh\beta_m\sinh\frac{m\pi y}{a}-\beta_m\sinh\beta_m\sinh\frac{m\pi y}{a}+\frac{m\pi y}{a}\cosh\beta_m\cosh\frac{m\pi y}{a}\right\}$$

*　工学博士，大阪市立大学教授，理工学部土木教室
**　　同　上　助手，　同　上

$\varepsilon_m=(3+\nu)\sinh\beta_m\cosh\beta_m+(1-\nu)\beta_m$

$\varepsilon_m'=2\sinh\beta_m+(1-\nu)\beta_m\cosh\beta_m$

$\beta_m=\dfrac{m\pi b}{2a}$, D=板の曲げ剛度, ν=ポアソン比

次に相隣る二辺が a, b なる四辺単純支持の矩形板が $x=\pm\dfrac{a}{2}$ なる相対二辺において $y=\dfrac{b}{2}$ 線に対して対称分布をなす。

$$\text{分布モーメント：}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}} E_n\sin\frac{n\pi y}{b}$$

を受ける場合のたわみ w_2 は熟知の次式で与えられる[2)]。

$$w_2=\frac{b^2}{2\pi^2 D}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{\sin\frac{n\pi y}{b}}{n^2\cosh\alpha_n}E_n\left(\alpha_n\tanh\alpha_n\cosh\frac{n\pi x}{b}-\frac{n\pi x}{b}\sinh\frac{n\pi x}{b}\right)\cdots\cdots(2)$$

$$\text{但し}\quad \alpha_n=\frac{n\pi a}{2b}$$

後の計算の便宜のため上式右辺括弧内を余弦奇数級数に展開しておく。即ち,

$$w_2=\frac{4a^2}{\pi^3 D}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}E_n\sin\frac{n\pi y}{b}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}\frac{m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\rho_{mn}^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cdots\cdots(2)'$$

$$\text{但し}\quad \rho_{mn}=m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2$$

更に $x=\pm\dfrac{a}{2}$ の辺に沿つて固定され残りの相対二辺 $y=0$, $y=b$ で単純支持された板が荷重を載せた場合のたわみは容易に求められこれを w_0 とする。本文においては x 方向の対称曲げを取扱つているのであるから当然荷重も x 方向に対称分布するもののみを考える訳であるが, y 方向には任意分布で差支えない。しかし解法の便宜上,所与の荷重を領域①, ②の境界線で分割し①上の部分荷重を 2 コ, $y=\dfrac{b}{2}$ 線に関し対称に突合せ並べた形の荷重を仮想し, これを以て w_0 を与える荷重とする。しかる時は w_0 は一般に次の形に表わされる。

$$w_0=\frac{1}{D}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}V_n(x)\sin\frac{n\pi y}{b}\cdots\cdots(3)$$

例えば分布強度 q なる等布荷重の場合には上式中 $V_n(x)$ は次の形をとる[2)]。

$$V_n(x)=\frac{4qb^4}{\pi^5}\cdot\frac{1}{n^5R_n}\left\{R_n-(\alpha_n+\tanh\alpha_n)\frac{\cosh\frac{n\pi x}{b}}{\cosh\alpha_n}+\tanh\alpha_n\frac{\frac{n\pi x}{b}\sinh\frac{n\pi x}{b}}{\cosh\alpha_n}\right\}\cdots\cdots(3)'$$

$$\text{ここに}\quad R_n=\alpha_n-\tanh\alpha_n(\alpha_n\tanh\alpha_n-1)$$

なお後の計算の便宜の為上式を余弦奇数級数に展開しておかなくてはならない。即ち

$$V_n(x)=\frac{16qb^4}{\pi^6}\frac{1}{n^5R_n}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}\frac{m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\rho_{mn}}S_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cdots\cdots(3)''$$

但し

$$S_{mn}=\frac{R_n\rho_{mn}}{m^2}-\alpha_n\operatorname{sech}^2\alpha_n-\frac{m^2+3\frac{a^2n^2}{b^2}}{\rho_{mn}}\tanh\alpha_n,$$

又もし板中央点に集中荷重 P が載つている場合を考えるならば, 同様にして次式をうる。

$$V_n(x)=\frac{4Pa^3}{\pi^4 b}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}\frac{1}{\rho_{mn}^2}\left(1-\frac{8a}{\pi b}\frac{m^2n}{\rho_{mn}^2\delta_n}\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\cdots\cdots(3)'''$$

$$\text{ここに}\qquad \delta_n=\tanh\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\cosh^2\alpha_n}$$

以上三種の式を重ね合せ $w_1+w_2+w_0$ を以て部分①に対する撓度式とするのであるが w_0 は当初より $x=\pm\dfrac{a}{2}$ で固定の条件, 即ち $\dfrac{\partial w_0}{\partial x}=0$ を満足しているからなお y に無関係に

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=\pm\frac{a}{2}}=0$$

が成りたたねばならない。よつてこれに (1), (2) 式を代入し

$$f_m(y)=\frac{4b}{m^2\pi^2\varepsilon_m}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\rho_{nm}}\phi_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$g_m(y)=\frac{4b}{m\pi a\varepsilon_m}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\rho_{nm}}\psi_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

と展開出来る事を考慮すると (2) 式中の E_n は次の様に定められる。

$$E_n=-(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\frac{8a}{\pi\delta_n}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\rho_{nm}\varepsilon_m}\left(\frac{\phi_{mn}}{m\pi}p_m-\frac{\psi_{mn}}{a}M_m\right)\cdots\cdots(4)$$

但し

$$\phi_{mn}=\beta_m+\left\{\frac{2}{1-\nu}-\frac{n^2-\frac{b^2m^2}{a^2}}{\rho_{nm}}\right\}\sinh\beta_m\cosh\beta_m$$

$$\psi_{mn}=\frac{2}{1-\nu}\,\frac{n^2+\nu\frac{b^2m^2}{a^2}}{\rho_{nm}}\cosh^2\beta_m$$

$$\rho_{nm}=n^2+\frac{b^2}{a^2}m^2$$

又，$w_1+w_2+w_0$ は明らかに $y=0$ で単純支持の条件を満足している。

ii) 部分②に対して用うべき解式――この部分に対しては 図—1 に示す如き座標軸 x_1, y_1 を用いる事とする。

先づ相隣る二辺が夫々 a 及び $\frac{c}{2}$ なる矩形板を考え $y_1=0$ なる辺において

$$\text{線荷重}: -\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}p_m\cos\frac{m\pi x_1}{a}$$

$$\text{分布モーメント}: \sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}M_m'\cos\frac{m\pi x_1}{a}$$

を受け残りの三辺単純支持なる板のたわみを $\bar{w}_1$ とすればこれは周辺条件の類似性により先に求めた w_1 の表式より求められる。即ち (1) 式において p_m, M_m, b の代りに夫々 $-p_m, M_m', c$ とおき又 $x=x_1$, $y=-y_1+\frac{c}{2}$ なる変換を施せばよい。結局次式をうる。

$$\bar{w}_1=\frac{a^2}{\pi^2D}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}[-p_mh_m(y_1)+M_m'k_m(y_1)]\cos\frac{m\pi x_1}{a}\cdots\cdots(5)$$

但し

$$h_m(y_1)=\frac{a}{m^3\pi\mu_m}\left[\left\{\gamma_m(\tanh\gamma_m-\coth\gamma_m)-\frac{2}{1-\nu}\right\}\sinh\frac{m\pi y_1}{a}+\frac{2}{1-\nu}\tanh\gamma_m\cosh\frac{m\pi y_1}{a}\right.$$
$$\left.-\frac{m\pi y_1}{a}\tanh\gamma_m\sinh\frac{m\pi y_1}{a}+\frac{m\pi y_1}{a}\cosh\frac{m\pi y_1}{a}\right]$$

$$k_m(y_1)=\frac{1}{m^2\mu_m}\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}\coth\gamma_m\sinh\frac{m\pi y_1}{a}+\frac{2-\mu_m}{1-\nu}\cosh\frac{m\pi y_1}{a}-\frac{m\pi y_1}{a}\sinh\frac{m\pi y_1}{a}\right.$$
$$\left.+\frac{m\pi y_1}{a}\coth\gamma_m\cosh\frac{m\pi y_1}{a}\right]$$

$$\mu_m=(3+\nu)+(1-\nu)\frac{\gamma_m}{\cosh\gamma_m\sinh\gamma_m}$$

$$\gamma_m=\frac{m\pi c}{2a}$$

次に $x_1=\pm\frac{a}{2}$, $y_1=\pm\frac{c}{2}$ で単純支持された周辺を有する相隣る二辺がそれぞれ a, c なる矩形板を考え，これが荷重を載せた場合のたわみを $\bar{w}_0$ とする。この場合も荷重は x_1 方向に対称分布をするもののみであるが，y_1 方向には所与の荷重において領域②上にある部分荷重を 2 コ，x_1-軸に関し対称に突合せ並べた形の荷重を仮想し，これを以て $\bar{w}_0$ を与える荷重とする。しかる時は $\bar{w}_0$ は一般に次の形に表わされる。

$$\bar{w}_0=\frac{1}{D}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{V}_n(x_1)\cos\frac{n\pi y_1}{c}\quad\cdots\cdots(6)$$

上式中 $\bar{V}_n(x_1)$ は等分布荷重 q の場合は熟知の如く[4])

$$\bar{V}_n(x_1)=\frac{4qc^4}{\pi^5}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5}\left\{1-\frac{\bar{\alpha}_n\tanh\bar{\alpha}_n+2}{2\cosh\bar{\alpha}_n}\cosh\frac{n\pi x_1}{c}+\frac{1}{2\cosh\bar{\alpha}_n}\frac{n\pi x_1}{c}\sinh\frac{n\pi x_1}{c}\right\}\cdots(6)'$$

ここに $\bar{\alpha}_n=\dfrac{n\pi a}{2c}$

前同様余弦級数に展開したものは（Navier の解）

$$\bar{V}_n(x_1)=\frac{16qa^4}{\pi^6 n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m\bar{\rho}_{mn}^2}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\quad\cdots\cdots(6)''$$

但し $\bar{\rho}_{mn}=m^2+\dfrac{a^2}{c^2}n^2$

又中央点に集中荷重 P が載つている場合は[5])

$$\bar{V}_n(x_1)=\frac{4Pa^3}{\pi^4 c}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}\frac{1}{\bar{\rho}_{mn}^2}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\quad\cdots\cdots(6)'''$$

さて (5), (6) の二式を重ね合せ $\bar{w}_1+\bar{w}_0$ を以て部分②に対する撓度式とすれば $x_1=\pm\dfrac{a}{2}$, $y_1=\dfrac{c}{2}$ の三辺で単純支持の条件は満されている。

2. 連続の条件

前節で誘導した①，②両部分に対する解式が両者の接続線に沿つて，即ち $y=\dfrac{b}{2}$, $y_1=0$ で連続の条件を満足する如く解式中の未定常数 p_m, M_m, M_m' を決定出来れば解式は完全に決定する訳である。連続の条件は次の 4 つである。

1) 撓度は連続する。即ち $x(=x_1)$ に無関係に次式が成立たねばならぬ。

$$|w_1+w_2+w_0|_{y=\frac{b}{2}}=|\bar{w}_1+\bar{w}_0|_{y_1=0}\quad\cdots\cdots(7)$$

上式に前節の各式 (1), (2)′, (3), (5), (6) を代入し各項を $\cos\dfrac{m\pi x}{a}$ でくくるため荷重項 $V_n(x)$, $\bar{V}_n(x)$ がそれぞれ余弦級数で

$$\left.\begin{aligned}V_n(x)&=\frac{a^3}{\pi^2}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}W_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\\\bar{V}_n(x)&=\frac{a^3}{\pi^2}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}\bar{W}_{mn}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(8)$$

の形に展開出来るものとすると (7) 式が x に無関係に成立する為の係数間の関係式が求められ次式をうる。

$$p_m\cdot\frac{1}{a}\left\{f_m\left(\frac{b}{2}\right)+h_m(0)\right\}-\frac{M_m}{a}g_m\left(\frac{b}{2}\right)-\frac{M_m'}{a}k_m(0)-\frac{32}{\pi^2}\frac{b^4}{a^4}m(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum_{\substack{s\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\varepsilon_s}\left\{\frac{p_s}{s\pi}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n\phi_{sn}}{\delta_n\rho_{nm}^2\rho_{ns}}\right.$$

$$\left.-\frac{M_s}{a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n\psi_{sn}}{\delta_n\rho_{nm}^2\rho_{ns}}\right\}=-\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}W_{mn}+\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{W}_{mn}\quad\cdots\cdots(9)$$

2) 撓曲面の勾配は連続する。即ち $x(=x_1)$ に無関係に

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}}=\left|\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y_1}+\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial y_1}\right|_{y_1=0}$$

が成立しなければならない。ところで使用した基本解式の対称性により当初より

$$\left|\frac{\partial w_2}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}}=\left|\frac{\partial w_0}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}}=0,\qquad \left|\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial y_1}\right|_{y_1=0}=0$$

が成立するから条件式は簡単に

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}}=\left|\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y_1}\right|_{y_1=0}$$

と書かれる。従つてこの式に (1), (5) 式を代入して前同様

$$p_m\cdot\frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{\varepsilon_m}\left\{\frac{1+\nu}{1-\nu}\sinh\beta_m\cosh\beta_m+\beta_m\right\}+\frac{1}{\mu_m}\left\{\gamma_m(\tanh\gamma_m-\coth\gamma_m)-\frac{1+\nu}{1-\nu}\right\}\right]$$
$$-\frac{M_m}{a}\frac{2\pi}{(1-\nu)m\,\varepsilon_m}\cosh^2\beta_m-\frac{M_m'}{a}\frac{2\pi}{(1-\nu)m\,\mu_m}\coth\gamma_m=0\cdots\cdots(10)$$

なる係数間の関係式をうる。

3) 曲げモーメントは連続する。即ち $x(=x_1)$ に無関係に

$$|M_1+M_2+M_0|_{y=\frac{b}{2}}=|\bar{M}_1+\bar{M}_0|_{y_1=0}$$

が成立たねばならない。処で基本解の性質により当初より

$$[M_1]_{y=\frac{b}{2}}=\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}M_m\cos\frac{m\pi x}{a},\quad [\bar{M}_1]_{y_1=0}=\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}M_m'\cos\frac{m\pi x_1}{a}$$

である。その他のモーメントについてはそれぞれの解式を

$$[M_2]_{y=\frac{b}{2}}=-D\left\{\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right\}_{y=\frac{b}{2}},\qquad [M_0]_{y=\frac{c}{2}}=-D\left\{\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right\}_{y=\frac{b}{2}}$$

$$[\bar{M}_0]_{y_1=0}=-D\left\{\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial y_1^2}+\nu\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial x_1^2}\right\}_{y_1=0}$$

に代入して計算する。かくてこれ等の表式を用いると前同様係数間の関係式として次式をうる。

$$\frac{M_m}{a}-\frac{M_m'}{a}-\frac{32\,b^2}{\pi^2a^2}m(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum_{\substack{s\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\varepsilon_s}\left\{\frac{p_s}{s\pi}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n\left(n^2+\nu\frac{b^2m^2}{a^2}\right)}{\delta_n\rho_{nm}{}^2\rho_{ns}}\phi_{sn}\right.$$
$$\left.-\frac{M_s}{a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n\left(n^2+\nu\frac{b^2m^2}{a^2}\right)}{\delta_n\rho_{nm}{}^2\rho_{ns}}\psi_{sn}\right\}=-\frac{1}{a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}U_{mn}+\frac{1}{a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{U}_{mn}\cdots\cdots(11)$$

但し，U_{mn}，$\bar{U}_{mn}$ は荷重に関する項で前記のモーメント式に解式を代入して得た式を余弦級数に展開した時の Fourier 係数である。即ち (3)，(6)，(8) の各式を用いて

$$[M_0]_{y=\frac{b}{2}}=\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2V_n(x)-\nu\frac{\partial^2V_n(x)}{\partial x^2}\right\}=\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}W_{mn}\left(\frac{n^2a^3}{b^2}+\nu am^2\right)\cos\frac{m\pi x}{a}$$
$$=\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}U_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$[\bar{M}_0]_{y_1=0}=\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\left\{\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2\bar{V}_n(x_1)-\nu\frac{\partial^2\bar{V}_n(x_1)}{\partial x_1^2}\right\}=\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}\bar{W}_{mn}\left(\frac{n^2a^3}{c^2}+\nu am^2\right)\cos\frac{m\pi x_1}{a}$$
$$=\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}}\bar{U}_{mn}\cos\frac{m\pi x_1}{a}$$

これより

$$U_{mn}=a\left(\frac{n^2a^2}{b^2}+\nu m^2\right)W_{mn},\qquad \bar{U}_{mn}=a\left(\frac{n^2a^2}{c^2}+\nu m^2\right)\bar{W}_{mn}\cdots\cdots(12)$$

4) セン断力及びねじりモーメントは連続する。換言すればいわゆる代用セン断力 (Ersatzscherkraft) は連続する。即ち $x(=x_1)$ に無関係に

$$|R_1+R_2+R_0|_{y=\frac{b}{2}}=|\bar{R}_1+\bar{R}_0|_{y_1=0}$$

但し，　$R_i=-D\left\{\frac{\partial^3 w_i}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w_i}{\partial x^2\partial y}\right\}$，$(i=1,2,0)$；$\bar{R}_i=-D\left\{\frac{\partial^3\bar{w}_i}{\partial y_1^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3\bar{w}_i}{\partial x_1^2\partial y_1}\right\}$，$(i=1,0)$

が成立たねばならない。然るに使用した基本解の対称的性質より

$$|R_2|_{y=\frac{b}{2}}=|R_0|_{y=\frac{b}{2}}=0,\qquad |\bar{R}_0|_{y_1=0}=0$$

が成立するから条件式は簡単となり

$$|R_1|_{y=\frac{b}{2}}=|\bar{R}_1|_{y_1=0}$$

と書かれる。ところが基本解の性質より当初から

$$|R_1|_{y=\frac{b}{2}}=\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}} p_m\cos\frac{m\pi x}{a},\quad |\bar{R}_1|_{y1=0}=\sum_{\substack{m\\(1,3,5\cdots)}} p_m\cos\frac{m\pi x_1}{a}$$

の関係にあるから上の条件は恒等的に満足されている。

従つて，以上4コの条件式中3コ，即ち (9),(10),(11) の三系の関係式が満足される様に三系の未定常数 p_m, M_m, M_m' を（計算上は p_m, $\frac{M_m}{a}$, $\frac{M_m'}{a}$, を未定常数として取扱う方が便利）決定出来れば各解式は確定する。従つてそれ等を重合する事により所与の板の撓度，其他が求められる訳である。

3. 計　算　例

実際に数値的結果を検討する為，正方形板を例にとり $a=b=c$ なる場合を考える。即ち y 軸に平行する相対二辺において固定区間と単純支持区間の等しい場合である。この場合は $\gamma_m=\beta_m$ となるから

$$\mu_m=\frac{\varepsilon_m}{\sinh\beta_m\cosh\beta_m}$$

と書かれ，従つて (10) 式より $M_m'=-M_m$ をうる。故に p_m, M_m を (9), (11) の二式より決定すれば良い事になる。この際，なお

$$f_m\left(\frac{a}{2}\right)=h_m(0),\quad g_m\left(\frac{a}{2}\right)=-k_m(0)$$

なる関係にあるから結局 (9), (10) 式は次の如く書かれる。

$$p_m\left[\frac{2}{a}f_m\left(\frac{a}{2}\right)\right]-\frac{M_m}{a}\left[2g_m\left(\frac{a}{2}\right)\right]-\frac{32}{\pi^2}m(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum_{\substack{s\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\varepsilon_s}\left\{\frac{p_s}{s\pi}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n\phi_{sn}}{\delta_n\rho_{nm}^2\rho_{ns}}\right.$$
$$\left.-\frac{M_s}{a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n\psi_{sn}}{\delta_n\rho_{nm}^2\rho_{ns}}\right\}=-\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}W_{mn}+\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{W}_{mn}\cdots\cdots(9)_1$$

$$\frac{M_m}{a}-\frac{16}{\pi^2}m(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum_{\substack{s\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\varepsilon_s}\left\{\frac{p_s}{s\pi}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n\phi_{sn}}{\delta_n\rho_{nm}^2\rho_{ns}}(n^2+\nu m^2)-\frac{M_s}{a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n\psi_{sn}}{\delta_n\rho_{nm}^2\rho_{ns}}(n^2+\nu m^2)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}U_{mn}+\frac{1}{2a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{U}_{mn}\cdots\cdots(11)_1$$

ここに，　$\rho_{nm}=n^2+m^2=\rho_{mn}$, $\rho_{ns}=n^2+s^2$

以下計算例では，ポアソン比：$\nu=0.3$，なるものとし，又未定常数 p_m, $\frac{M_m}{a}$ はそれぞれ最初の4項までで打切る事としてその係数を計算し，且簡単の為

$$Y_m=-\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}W_{mn}+\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{W}_{mn},\quad Y_m^1=-\frac{1}{2a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}U_{mn}+\frac{1}{2a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{U}_{mn}$$

と書けば $(9)_1$ 式よりは

$$-1.009372\frac{M_1}{a}+0376\ 502\,P_1-0.025980\frac{M_3}{a}\div0.008738\,P_3+0.009172\frac{M_5}{a}$$
$$-0.002169\,P_5-0.004617\frac{M_7}{a}+0.000833\,P_7=Y_1$$

$$-0.033616\frac{M_1}{a}+0.014260\,P_1-0.118327\frac{M_3}{a}+0.018828\,P_3-0.002821\frac{M_5}{a}$$
$$+0.000467\,P_5+0.001498\frac{M_7}{a}-0.000204\,P_7=Y_3$$

$$0.011170\frac{M_1}{a}-0.004215\,P_1-0.003145\frac{M_3}{a}+0.000567\,P_3-0.043547\frac{M_5}{a}$$
$$+0.020414\,P_5-0.000843\frac{M_7}{a}+0.000097\,P_7=Y_5$$

$$-0.005197\frac{M_1}{a}+0.001816P_1+0.001770\frac{M_3}{a}-0.000295\,P_3-0.000908\frac{M_5}{a}$$
$$+0.000113\,P_5-0.022425\frac{M_7}{a}+0.001562\,P_7=Y_7$$

又 $(11)_1$式よりは

$$1.187987\frac{M_1}{a}-0.078458\,P_1-0.042676\frac{M_3}{a}+0.008936\,P_3+0.019977\frac{M_5}{a}$$
$$-0.002818\,P_5-0.011740\frac{M_7}{a}+0.001271\,P_7=Y_1'$$

$$-0.131886\frac{M_1}{a}+0.043017\,P_1+1.053527\frac{M_3}{a}-0.007446\,P_3-0.030591\frac{M_5}{a}$$
$$+0.003001\,P_5+0.019940\frac{M_7}{a}-0.001561\,P_7=Y_3'$$

$$0.102967\frac{M_1}{a}-0.030826\,P_1-0.050977\frac{M_3}{a}+0.006104\,P_3+1.032415\frac{M_5}{a}$$
$$-0.002699\,P_5-0.022631\frac{M_7}{a}+0.001500\,P_7=Y_5'$$

$$-0.084701\frac{M_1}{a}+0.024353\,P_1+0.046515\frac{M_3}{a}-0.005118\,P_3-0.031684\frac{M_5}{a}$$
$$+0.002383\,P_5+1.023195\frac{M_7}{a}-0.001373P_7=Y_7'$$

を得る。これ等の式を 8 元 1 次連立方程式として解く事により p_m, $\dfrac{M_m}{a}$ の初めの 4 項計 8 コの未定係数が定められる訳であるが，応用の便を考慮して各式左辺の係数行列よりその逆行列を求めて反転公式を作ると行列の記法に従い次の (13) 式を得る。従て荷重項に $W_{mn}, \bar{W}_{mn}, U_{mn}, \bar{U}_{mn}$ を決定して代入する事により直に $p_m, \dfrac{M_m}{a}$ が算出される。

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{M_1}{a} \\ p_1 \\ \dfrac{M_3}{a} \\ p_3 \\ \dfrac{M_5}{a} \\ p_5 \\ \dfrac{M_7}{a} \\ p_7 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.0249010 & 0.259497 & -0.0213559 & -0.669651 & 0.0143257 & 0.954412 & -0.0100592 & -1.163017 \\ 2.751305 & 3.448143 & -0.136459 & -3.206457 & 0.0779010 & 4.280036 & -0.0502364 & -5.017497 \\ 0.0149773 & -0.145930 & 0.997658 & 0.502327 & -0.00348325 & -0.867986 & 0.00461466 & 1.189563 \\ -0.156124 & -3.203397 & 6.339787 & 57.934205 & -0.165379 & -13.319255 & 0.129775 & 16.837430 \\ -0.0189769 & 0.105457 & 0.00933243 & -0.399441 & 0.997785 & 0.747761 & -0.000514714 & -1.088708 \\ -0.134794 & 4.272116 & -0.0942139 & -13.313309 & 10.375467 & 248.49179 & -0.174358 & -29.549701 \\ 0.0181931 & -0.0834112 & -0.0116551 & 0.329733 & 0.00517239 & -0.646060 & 0.997822 & 0.973335 \\ 0.424748 & -5.030358 & -0.000664722 & 17.336878 & -0.166509 & -30.149681 & 14.381854 & 659.47931 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1' \\ Y_1 \\ Y_3' \\ Y_3 \\ Y_5' \\ Y_5 \\ Y_7' \\ Y_7 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(13)$$

1) 等分布荷重 q を受ける場合——この場合 W_{mn} は (3)″ 式と (8) の第 1 式を比較する事により

$$W_{mn}=\frac{16\,qb^4}{\pi^4 a^3}\,\frac{1}{n^5 R_n}\,\frac{m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\rho_{mn}}S_{mn}$$

を得る。又 $\bar{W}_{mn}$ は (6)″ と (8) の第 2 式を比較して

$$\bar{W}_{mn}=\frac{16\,qa}{\pi^4 n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m\,\bar{\rho}_{mn}{}^2}$$

を得る。故に

$$-\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}W_{mn}+\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{W}_{mn}=-\frac{16\,qa}{\pi^4}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left\{m\frac{b^4}{a^4}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5R_n}\frac{S_{mn}}{\rho_{mn}}-\frac{1}{m}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\,\bar{\rho}_{mn}{}^2}\right\}$$

と書ける。ところで上式右辺括弧内の第二項の級数は

$$\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(n^2+\lambda^2)^2}=\frac{\pi}{4\lambda^4}\left(1-\frac{1}{\cosh\frac{\pi\lambda}{2}}-\frac{\pi\lambda}{4}\,\frac{\tanh\frac{\pi\lambda}{2}}{\cosh\frac{\pi\lambda}{2}}\right)$$

なる総和公式を用いてまとめられるから，結局

$$Y_m=-\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}W_{mn}+\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{W}_{mn}=-\frac{16\,qa}{\pi^4}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left\{m\frac{b^4}{a^4}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5R_n}\frac{S_{mn}}{\rho_{mn}}\right.$$

$$-\frac{\pi}{4m^5}\left(1-\frac{1}{\cosh\gamma_m}-\frac{\gamma_m\tanh\gamma_m}{2\cosh\gamma_m}\right)\Bigg\}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

となる。故に只今の例では $a=b=c$, $\gamma_{mn}=\beta_{mn}$ なる事を考慮して上式を計算すれば

$$Y_1=0.0234359\,qa,\qquad Y_3=-0.00276694\,qa,$$
$$Y_5=0.000671321\,qa,\qquad Y_7=-0.000251988\,qa,$$

を得る。次に U_{mn}, $\bar{U}_{mn}$ は (12) 式に前に求めた $\bar{W}_{mn}$, W_{mn} を代入して求められる。即ち

$$U_{mn}=a\left(\frac{n^2a^2}{b^2}+\nu m^2\right)W_{mn}=\frac{16\,qb^2}{\pi^4}\frac{1}{n^3R_n}\frac{m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\rho_{mn}}S_{mn}\left(1+\nu\frac{b^2m^2}{a^2n^2}\right)$$

同様に

$$\bar{U}_{mn}=a\left(\frac{n^2a^2}{c^2}+\nu m^2\right)\bar{W}_{mn}=\frac{16\,qa^2}{\pi^4}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\bar{\rho}_{mn}{}^2}\left(\frac{a^2n}{c^2m}+\nu\frac{m}{n}\right)$$

これより

$$\frac{1}{2a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}U_{mn}=\frac{8\,qb^2}{\pi^4a}m(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3R_n\rho_{mn}}S_{mn}\left(1+\nu\frac{m^2b^2}{n^2a^2}\right)$$

及び

$$\frac{1}{2a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{U}_{mn}=\frac{8\,qa}{\pi^4}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\bar{\rho}_{mn}{}^2}\left(\frac{a^2}{c^2}\frac{n}{m}+\nu\frac{m}{n}\right)=\frac{8\,qa}{\pi^4}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left\{\frac{a^2}{c^2m}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\bar{\rho}_{mn}{}^2}+\nu m\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\,\bar{\rho}_{mn}{}^2}\right\}$$

を得る。然るに最後の式右辺括弧内の各級数は前出の総和公式及び

$$\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n^2+\lambda^2)^2}=\frac{\pi^2}{16\lambda}\frac{\sinh\frac{\pi\lambda}{2}}{\cosh^2\frac{\pi\lambda}{2}}$$

なる公式を用いてまとめられて

$$\frac{1}{2a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{U}_{mn}=\frac{2\,qa}{\pi^3}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2\cosh\gamma_m}\left\{(1-\nu)\frac{\pi b}{4a}\tanh\gamma_m+\frac{\nu}{m}(\cosh\gamma_m-1)\right\}$$

の様に書かれるから結局,

$$Y_m'=-\frac{1}{2a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}U_{mn}+\frac{1}{2a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{U}_{mn}$$

$$=\frac{2\,qa}{\pi^3}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[-\frac{4b^2}{\pi a^2}\frac{m}{\rho_{mn}}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3R_n}S_{mn}\left(1+\nu\frac{m^2b^2}{n^2a^2}\right)+\frac{1}{m^2\cosh\gamma_m}\left\{(1-\nu)\frac{\pi b}{4a}\tanh\gamma_m\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\nu}{m}(\cosh\gamma_m-1)\right\}\right]$$

前同様 $a=b=c$, $\gamma_{mn}=\beta_{mn}$ なる事を考慮して計算すると

$$Y_1'=0.0149476\,qa\qquad Y_3'=-0.00492728\,qa$$
$$Y_5'=0.00277203\,qa\qquad Y_5'=-0.00194194\,qa$$

を得る。かくて8コの常数項が求められたからこれ等を (13) 式に代入すると

$$\frac{M_1}{a}=0.024352\,qa\qquad p_1=0.13593\,qa$$

$$\frac{M_3}{a}=-0.010403\,qa\qquad p_3=-0.28284qa$$

$$\frac{M_5}{a}=0.0067903\,qa\qquad p_5=0.33877\,qa$$

$$\frac{M}{a}=-0.0051403\,qa\qquad p_7=-0.37432\,qa$$

更にこれ等の値を (4) 式に代入して E_n を求めると

$$E_1=-0.03454\,qa^2\qquad E_{11}=0.00511\,qa^2$$
$$E_3=0.01877\,qa^2\qquad E_{13}=-0.00424\,qa^2$$
$$E_5=-0.01185\,qa^2\qquad E_{15}=0.00368\,qa^2$$

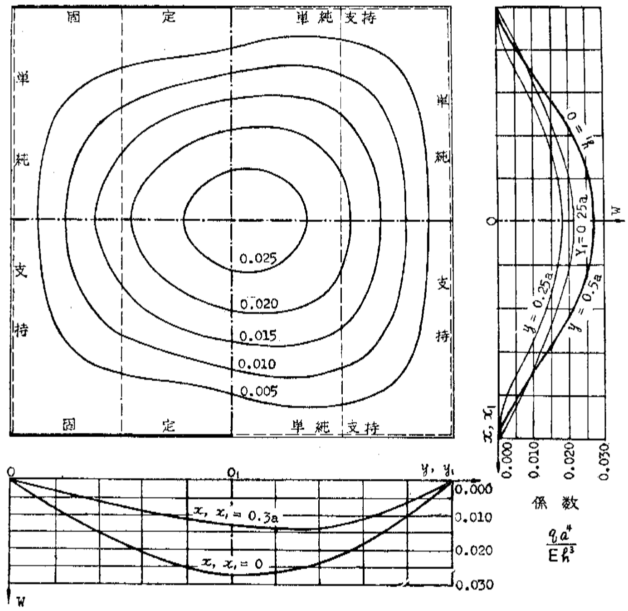
$E_7 = 0.00834\,qa^2$ $\qquad E_{17} = -0.00323\,qa^2$

$E_9 = -0.00634\,qa^2$ $\qquad E_{19} = 0.00289\,qa^2$

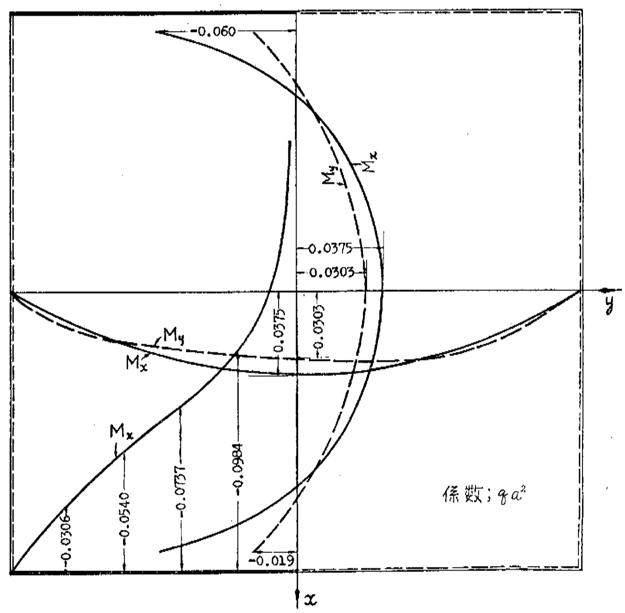
ここに E_n の値は撓度 w_2 の計算に対しては精々5コ程度で十分であるが，曲げモーメントの計算に対しては級数の収斂が悪くなる為，可成多数の値が必要となる。ところが E_n の値は (4) 式の級数によつて算出されるもので n の小なる時は容易に計算出来るが，n の値の大となるにつれ極めて収斂の遅い交項級数となり計算困難となる。然るにかかる交項級数については項毎の差分をとつて急速に収斂する級数に書き直す Euler の変換と称する総和法を用いれば計算出来るものである[6]。

上に求めた未定常数の値を用いて (1), (2), (3), (3)′ より $w_1+w_2+w_0$ の値を (5), (6), (6)′ より $\bar{w}_1+\bar{w}_0$ をそれぞれ算出して等撓度曲線図を描くと 図—2 の如き有様となる。なお周辺及び板中央点を通る直交二軸に沿つて曲げモーメントの分布を図示すれば 図—3 に示す如くであつて，周辺条件の急変するカ所で固定モーメントの

図—2 等分布荷重 q を受ける場合の等撓度曲線図



図—3 等分布荷重 q を受ける場合の曲げモーメント図



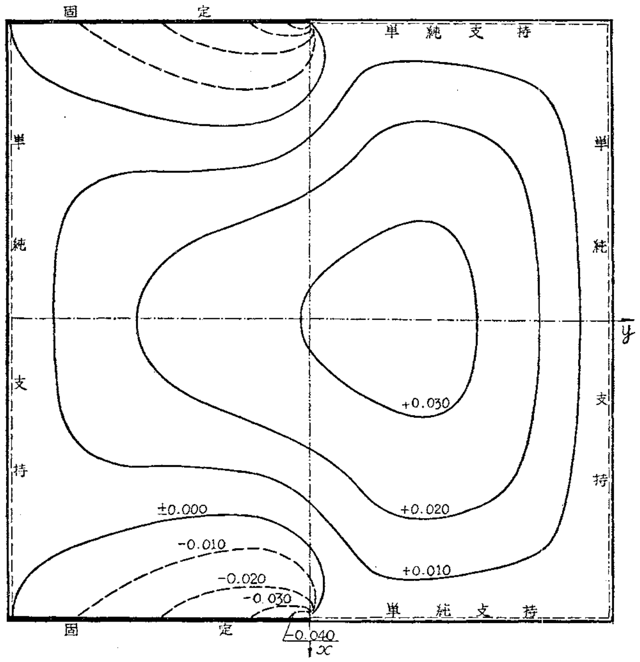
急激な増大が認められる。又曲げモーメントは y 方向，x 方向をそれぞれ M_y, M_x とすれば

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(w_1+w_2+w_0),\quad \bar{M}_{y_1}=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}\right)(\bar{w}_1+\bar{w}_0)$$

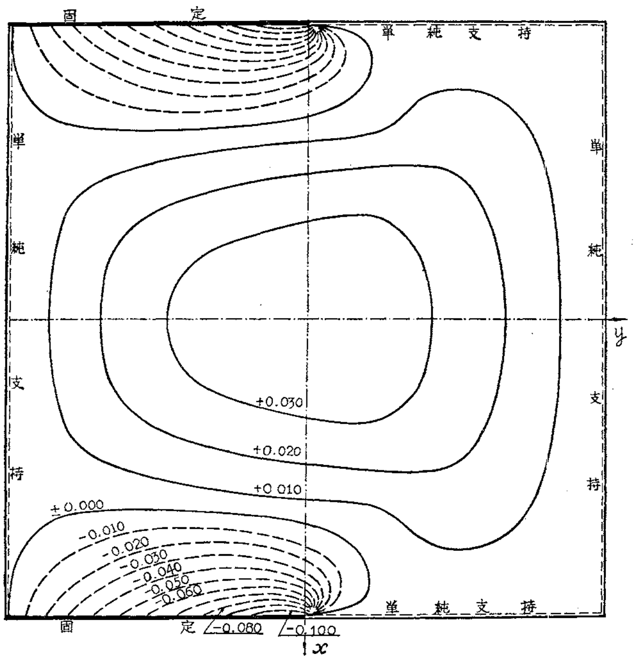
$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(w_1+w_2+w_0),\quad \bar{M}_{x_1}=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2}\right)(\bar{w}_1+\bar{w}_0)$$

で計算されその分布状態を見る為等値曲線を描くと図—4，図—5 を得る。

図—4　等分布荷重 q を受ける場合の M_y 等値曲線図（係数：qa^2）



図—5　等分布荷重 q を受ける場合の M_x 等値曲線図（係数：qa^2）



2)　中央点に集中荷重 P を受ける場合——この場合は (3)′′′ 式と (8) の第1式を比較して

$$W_{mn}=\frac{4P}{\pi^2 b}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\rho_{mn}{}^2}\left(1-\frac{8a}{\pi b}\frac{m^2n}{\rho_{mn}{}^2\delta_n}\right)$$

又 (6)''' と (8) の第2式とを比較して

$$\bar{W}_{mn}=\frac{4P}{\pi^2 c}\frac{1}{\bar{\rho}_{mn}{}^2}$$

を得る。故に

$$-\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}W_{mn}+\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\bar{W}_{mn}=\frac{4P}{\pi^2}\left\{-\frac{1}{b}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{1}{\rho_{mn}{}^2}\left(1-\frac{8\,am^2n}{\pi\, b\,\rho_{mn}{}^2\delta_n}\right)+\frac{1}{c}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{1}{\bar{\rho}_{mn}{}^2}\right\}$$

只今の例では $a=b=c$，$\rho_{mn}=\bar{\rho}_{mn}$ だから上式は簡単になり結局

$$Y_m=\frac{32P}{\pi^3 a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{m^2n}{\rho_{mn}{}^4\delta_n}$$

これを計算すると

$$Y_1=0.0556114\frac{P}{a}\qquad Y_3=0.0011036\frac{P}{a}$$

$$Y_5=0.0001356\frac{P}{a}\qquad Y_7=0.0000353\frac{P}{a}$$

を得る。次に前記 W_{mn}，$\bar{W}_{mn}$ を用いて

$$U_{mn}=a\left(\frac{n^2a^2}{b^2}+\nu m^2\right)W_{mn}=\frac{4Pa}{\pi^2 b}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\rho_{mn}{}^2}\left(1-\frac{8a}{\pi b}\frac{m^2n}{\rho_{mn}{}^2\delta_n}\right)\left(\frac{n^2a^2}{b^2}+\nu m^2\right)$$

$$\bar{U}_{mn}=a\left(\frac{n^2a^2}{c^2}+\nu m^2\right)\bar{W}_{mn}=\frac{4Pa}{\pi^2 c}\frac{1}{\bar{\rho}_{mn}{}^2}\left(\frac{n^2a^2}{c^2}+\nu m^2\right)$$

故に

$$Y_m'=\frac{2P}{\pi^2}\left[-\frac{1}{b}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{1}{\rho_{mn}{}^2}\left(1-\frac{8a}{\pi b}\frac{m^2n}{\rho_{mn}{}^2\delta_n}\right)\left(\frac{n^2a^2}{b^2}+\nu m^2\right)+\frac{1}{c}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{1}{\bar{\rho}_{mn}{}^2}\left(\frac{n^2a^2}{c^2}+\nu m^2\right)\right]$$

$a=b=c$，$\rho_{mn}=\bar{\rho}_{mn}$ とおけば上式は簡単になり

$$Y_m'=\frac{16P}{\pi^3 a}\sum_{\substack{n\\(1,3,5\cdots)}}\frac{m^2n}{\rho_{mn}{}^4\delta_n}(n^2+\nu m^2)$$

これを計算すると

$$Y_1'=0.0375616\frac{P}{a}\qquad Y_3'=0.0037520\frac{P}{a}$$

$$Y_5'=0.0015671\frac{P}{a}\qquad Y_7'=0.0006977\frac{P}{a}$$

以上8コの常数項 Y_m, Y_m' を (13) 式に代入すると

$$\frac{M_1}{a}=0.052213\frac{P}{a}\qquad p_1=0.29154\frac{P}{a}$$

$$\frac{M_3}{a}=-0.0033332\frac{P}{a}\qquad p_3=-0.097667\frac{P}{a}$$

$$\frac{M_5}{a}=0.0063722\frac{P}{a}\qquad p_5=0.26626\frac{P}{a}$$

$$\frac{M_7}{a}=-0.0029839\frac{P}{a}\qquad p_7=-0.21569\frac{P}{a}$$

従て前例同様 (4) 式より E_n を求めると

$$E_1=-0.06196\,P\qquad E_{11}=0.00576\,P$$

$$E_3=0.02180\,P\qquad E_{13}=-0.00481\,P$$

$$E_5=-0.01291\,P\qquad E_{15}=0.00413\,P$$

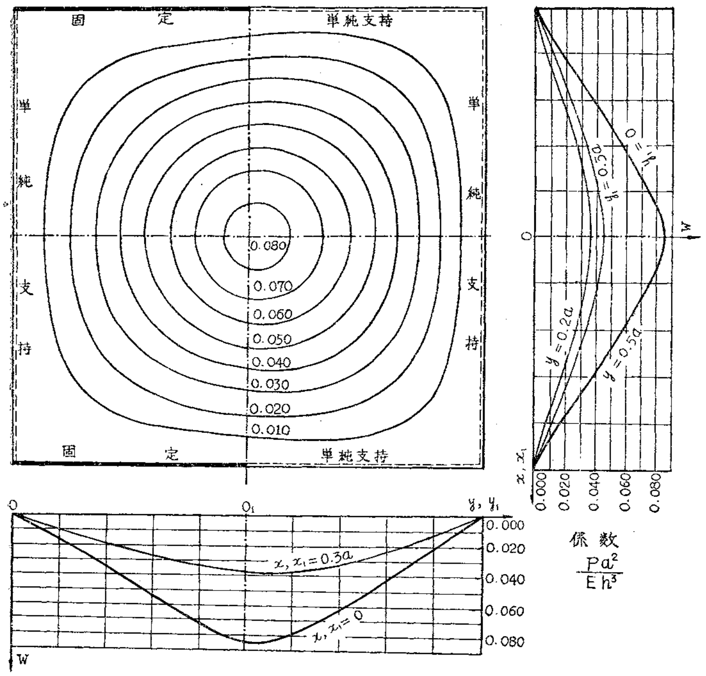
$$E_7=0.00935\,P\qquad E_{17}=-0.00359\,P$$

$$E_9=-0.00718\,P\qquad E_{19}=0.00316\,P$$

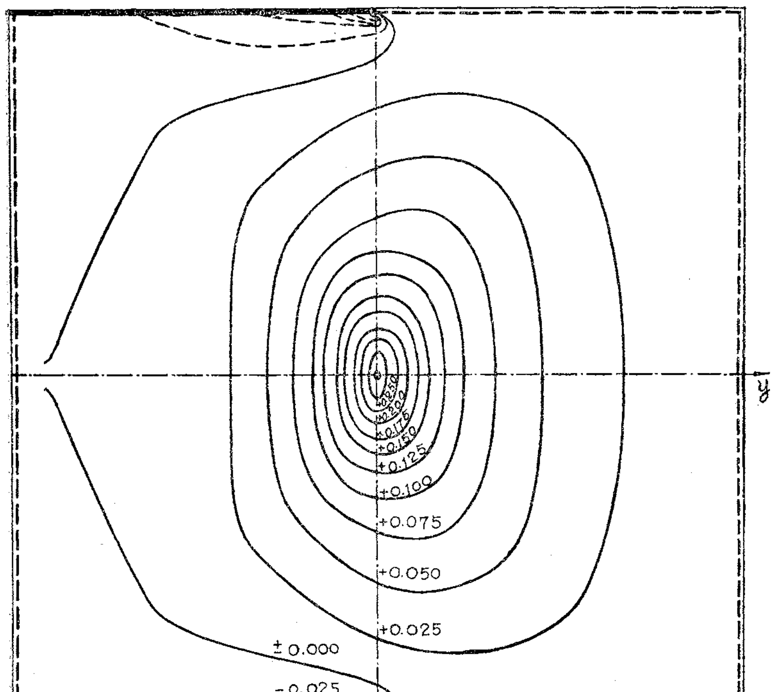
以上の各係数値を用いて等撓度曲線図を描くと図—6 を得る。

又この場合に対する曲げモーメントの等値曲線図を描くと図—7，図—8 の如くである。

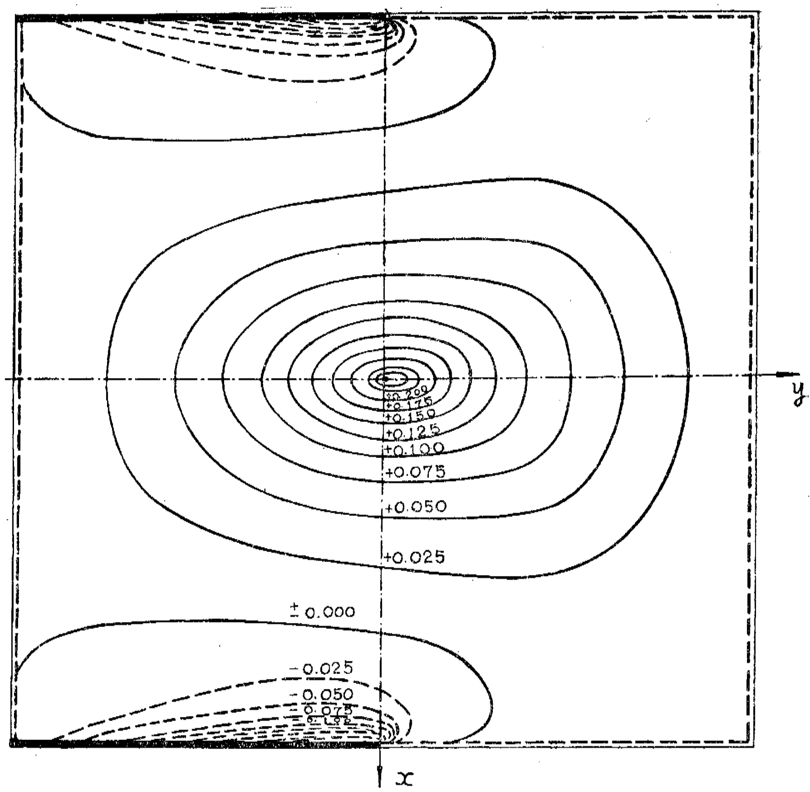
図—6 中央位置に集中荷重 P を受ける場合の等撓度曲線図



図—7 中央位置に集中荷重 P を受ける場合の M_y 等値曲線図（係数：P）



図―8　中央位置に集中荷重 P を受ける場合の M_x 等値曲線図（係数：P）

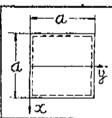
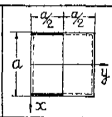
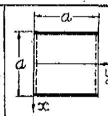
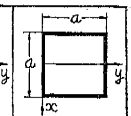


上の二計算例につき板中央点のたわみ及び曲げモーメントの値を他の熟知の周辺条件をもつ板の同様な荷重状態の下におけるそれ等の値と比較してみると図―9 に示す如くであつて常識的に首肯しうる範囲にある事が確められる。

む す び

以上特異な周辺条件を有する矩形板の一例に就き一解法を提案し解決の可能性を示したもので，併せて計算例に示す如き板に対しては他の荷重状態の場合でも簡単にその数値解を求め得る如き形に整頓して解説した。本文では簡単のため専ら x 方向対称荷重による対称曲げを論じたが斜対称荷重による斜対称曲げも全く同様に論ずる事が出来，従つて両者の合成とみなされる一般荷重による曲げも両解の重合によつて得られる事は云うまでもない。

図―9　他の周辺条件の場合との比較（ポアン比 ν はすべて 0.3 となすものとす）

荷重状態 ＼ 周辺条件					
中央点の撓み	等分布荷重 q を載荷せる場合	※ $0.0443\,\frac{qa^4}{Eh^3}$	$0.0270\,\frac{qa^4}{Eh^3}$	※ $0.0209\,\frac{qa^4}{Eh^3}$	※ $0.0138\,\frac{qa^4}{Eh^3}$
	中央点に集中荷重 P を載荷せる場合	※ $0.1265\,\frac{pa^2}{Eh^3}$	$0.0851\,\frac{pa^2}{Eh^3}$	$0.0768\,\frac{pa^2}{Eh^3}$	$0.0611\,\frac{pa^2}{Eh^3}$
中央点の曲げモーメント	等分布荷重 q を載荷せる場合の M_x	※ $+0.0479\,qa^2$	$+0.0375\,qa^2$	※ $+0.033\,qa^2$	$+0.0229\,qa^2$
	等分布荷重 q を載荷せる場合の M_y	※ $+0.0479\,qa^2$	$+0.0303\,qa^2$	※ $+0.024\,qa^2$	$+0.0229\,qa^2$
※の値は Timoshenko " Theory of Plates and Shells " より採る。					

因に本文中に遭遇する如き連立方程式を処理する事は従来甚だ煩らわしい仕事であつたが昨今わが国でも高性能自動計算機の利用が可能となり極めて雑作なく各種の数値を得る事が出来る様になつた事は一つの障壁が取除かれたものと云うべく，著者もその有難味を体験した。最後に本文は文部省科学研究費による研究の一部なる事を付記する。

参 考 文 献

1)　第 6 回応用力学連合講演会にて一部発表
2)　S. Timoshenko "Theory of Plates and Shells", Eq. (151), p. 201, 1940
3)　同　上 pp. 204～207
4)　同　上 Eq.(126), p.128
5)　同　上 Eq.(125), p.122
6)　K. Knopp "Theory and Application of Infinite Series", p.244 London & Glasgow.

（昭.32.9.11）