不静定構造物の弾性重心の拡張定義について

准員　島　田　静　雄*

DEFINITION OF ELASTIC CENTER IN STATICALLY INDETERMINATE STRUCTURES

By Shizuo Shimada, C.E. Assoc. Member

Synopsis : The elastic structures which have various inner or outer restrictions are statically indeterminate. The equilibrium equations are always simultaneous equations concerning the statically indeterminate forces. A method of affine-transformation induces an idea that is like an elastic center in affine space of n-order. The author shows a general explanation in the solutions of statically indeterminate structures.

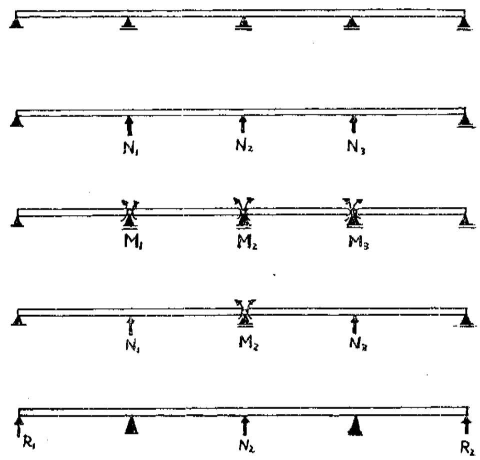
要　旨　平面構造物に限らず，一般に Hook の法則の適用できる弾性構造物が，種々の内的および外的な拘束を受けて不静定となつている時に，この構造物に加わる任意の力に対して不静定力の釣合条件を求める式は多元一次方程式で与えられる。固定アーチの応力を求めるために仮想的に設定した弾性重心の概念をさらに一般化することにより不静定構造物の解を求める一つの方法が提出される。

1. 静定基本形と不静定力

ある高次の不静定構造物の応力を解析するために適当に拘束を除外して構造物を静定状態に支持し，拘束状態でその点に作用していた力を不静定力に考える。このように，ある不静定構造物を静定構造化したものをある不静定構造物の静定基本形と定義し，不静定の拘束条件を与える付加的な力を不静定力と呼ぶ。

ある不静定構造物の静定基本形の撰び方はいく種類もあり，かつその各場合について不静定力の表われ方は異なつてくる。例えば3次の不静定構造物の例として4径間連続桁を考える。通常連続桁の応力解析をするには，中間の支承の支承反力を不静定力に撰ぶか，または中間の支承上の支承モーメントを不静定モーメントと考える。図—1 は4径間連続桁の静定基本形の撰び方と，それに付随した不静定力の撰び方の一例を示したものである。

図-1　4 径間連続桁の静定基本形と不静定力の取り方の一例



不静定構造物の静定基本形は，かならずしも静定構造にする必要はなく，任意の外力に対しての応力状態が既知であるならば，より低次の不静定次数の構造物を静定基本形と考えて差支えはない。例えば2径間の連続桁を4径間連続桁を解く際の基本形に撰ぶことも可能である。この場合に，静定と云う言葉を除いて単に基本形と云うのが言葉の定義としては合理的である。

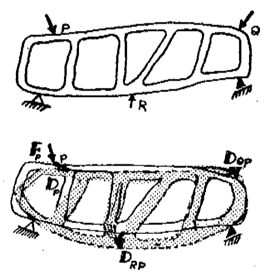
逆に静定を通り越して，実際には不安定な支持状態の桁を基本形と考えると，数式の演算や法則に便利な事もある。例えば総ての支承が弾性的なバネで支持されているバネ支承上の連続桁を解くような時に，この桁の自由振動解に全く外的な支持条件に無関係に誘導する質点系の自由振動を取り扱うと，バネ常数が線型のパラメーターに入るだけで支承反力を求める演算が簡単になる[1]。

不静定構造物の解を求めるには，実際上どのような手段を用いても解く事それ自体は可能であるが，一番簡明で実用になる方法を見出すのが大切である。それには静定基本形の撰び方にもよるが，弾性体の性質を利用した解法の技術も多分に影響を与えるものである。

2. 力と変位の関係を与える行列（変位のマトリツクス）

*　工学修士，東京大学大学院学生，工学部土木教室，

図—2 力とその作用方向への変位



弾性体の２点 P および Q に作用している２つの力を，その方向も考えて $\boldsymbol{F_P},\boldsymbol{F_Q}$ とベクトルで表わす。いま $\boldsymbol{F_P}=1$ の力が P 点に作用し，P 点の位置がベクトル $\boldsymbol{D_P}$ で与えられる方向に変位したとする。同じように $\boldsymbol{F_Q}=1$ の力で Q 点の変位が $\boldsymbol{D_Q}$ で与えられるとする。$\boldsymbol{F_P}=1$ の力によつて P 点が変位するが，Q 点も変位するであろう。$\boldsymbol{F_P}=1$ の力で移動する Q 点の変位を $\boldsymbol{D_{QP}}$ で与え，同じ考えから $\boldsymbol{D_{PQ}}$ も定義づけられる（図—2）。

$\boldsymbol{F_P},\boldsymbol{F_Q},\boldsymbol{D_P},\boldsymbol{D_Q},\boldsymbol{D_{QP}},\boldsymbol{D_{PQ}}$ のベクトル相互の関係を規定するものが弾性体の特質である。$\boldsymbol{F}$ なる力と変位とが対応することにより，弾性体にはエネルギー函数 W が存在し得る。$\boldsymbol{F_P}$ なるベクトルを単位ベクトルと考え，力の大きさをスカラー φ_P で与えることにしよう。$\boldsymbol{F_P},\boldsymbol{F_Q}$ の２種の力が作用した時，弾性体に蓄えられた全内部弾性エネルギーの総和 W は

$$W=\frac{1}{2}\varphi_P{}^2\boldsymbol{F_P}\cdot\boldsymbol{D_P}+\frac{1}{2}\varphi_Q{}^2\boldsymbol{F_Q}\cdot\boldsymbol{D_Q}+\varphi_P\varphi_Q\boldsymbol{F_P}\cdot\boldsymbol{D_{PQ}} \quad\cdots\cdots(1)$$

Maxwell-Betit の法則で $\boldsymbol{F_P}\cdot\boldsymbol{D_{PQ}}=\boldsymbol{F_Q}\cdot\boldsymbol{D_{QP}}$ が成立することは容易に証明できる。力と変位とのスカラー積 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}$ の持つ力学的な意味は，力 $\boldsymbol{F}$ の $\boldsymbol{D}$ 方向に為した仕事と云う意味を持つとともに，変位 $\boldsymbol{D}$ の $\boldsymbol{F}$ の作用方向への成分を与える。$\boldsymbol{F_P},\boldsymbol{F_Q}$ を単位ベクトルとすれば

$$\boldsymbol{F_P}\cdot\boldsymbol{D_P}=\delta_{PP},\ \boldsymbol{F_Q}\cdot\boldsymbol{D_Q}=\delta_{QQ},\ \boldsymbol{F_P}\cdot\boldsymbol{D_{PQ}}=\boldsymbol{F_Q}\cdot\boldsymbol{D_{QP}}=\delta_{PQ} \quad\cdots\cdots(2)$$

と書いて，エネルギー函数 W が書き換えられる。

$$W=\frac{1}{2}\varphi_P{}^2\delta_{PP}+\frac{1}{2}\varphi_Q{}^2\delta_{QQ}+\varphi_P\varphi_Q\delta_{PQ} \quad\cdots\cdots(3)$$

n コの点 1 2 3…n に作用する力を，その作用方向を確実に定義してその大きさを $A_1,A_2,A_3\cdots A_n$ で与える。(2) 式で定義した力とその方向への変位成分を計算すれば，δ_{11} δ_{12} $\delta_{13}\cdots\delta_{1n}$, δ_{21} δ_{22} $\delta_{23}\cdots\delta_{2n}$, δ_{31}, δ_{32}, $\delta_{33},\cdots\delta_{3n}$, $\cdots\delta_{n1}$, δ_{n2}, $\delta_{n3},\cdots\delta_{nn}$ 計 n^2 コの数値が計算される。これを行列の形に表わし，変位のマトリックスと定義する。

$$\{\{\varDelta\}\}\equiv\begin{Bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\cdots\cdots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\cdots\cdots & \varrho_{2n}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\cdots\cdots & \delta_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3}\cdots\cdots & \delta_{nn}\end{Bmatrix} \quad\cdots\cdots(4)$$

この行列は $\delta_{ij}=\delta_{ji}$ の関係があり対称である。この場合にもエネルギー函数が存在することでより有意義な展開を可能にする。

3. エネルギー函数 W と二次形式

変位の行列 (4) を基準として，力 A_1, A_2, $A_3,\cdots A_n$ をベクトルと考えて数式の演算に力学的な意味を与えながら説明を進めてゆく。

A_1, A_2, $A_3,\cdots A_n$ の力が作用した時の各点の変位は

$$\begin{cases}D_1=A_1\delta_{11}+A_2\delta_{12}+A_3\delta_{13}+\ \cdots\cdots\ A_n\delta_{1n}\\ D_2=A_1\delta_{21}+A_2\delta_{22}+A_3\delta_{23}+\ \cdots\cdots\ A_n\delta_{2n}\\ D_3=A_1\delta_{31}+A_2\delta_{32}+A_3\delta_{33}+\ \cdots\cdots\ A_n\delta_{3n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ D_n=A_1\delta_{n1}+A_2\delta_{n2}+A_3\delta_{n3}+\cdots\cdots\ A_n\delta_{nn}\end{cases} \quad\cdots\cdots(5)$$

この演算を簡略に表わすためにベクトルと行列の演算の記法が利用される。

$$\boldsymbol{A}\equiv\{A_1,A_2,A_3,\cdots A_n\},\quad \boldsymbol{D}\equiv\{D_1,D_2,D_3,\cdots D_n\}$$

とおいて

$$\boldsymbol{D}\equiv\{\{\varDelta\}\}\times\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{A}\times\{\{\varDelta\}\} \quad\cdots\cdots(6)$$

さて力 $\boldsymbol{A}$ が弾性体に作用した時に，弾性体に蓄えられエネルギーを W とすれば

$$W=\frac{1}{2}(A_1D_1+A_2D_2+A_3D_3+\cdots\cdots+A_nD_n)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}$$

ここで A と δ とで W を書き換えて表わす。

$$\begin{aligned}2W=\ &A_1{}^2\delta_{11}+A_1A_2\delta_{12}+A_1A_3\delta_{13}+\cdots\cdots+A_1A_n\delta_{1n}\\ &+A_2A_1\delta_{21}+A_2{}^2\delta_{22}+A_2A_3\delta_{23}+\cdots\cdots+A_2A_n\delta_{2n}\\ &+A_3A_1\delta_{31}+A_3A_2\delta_{32}+A_3{}^2\delta_{33}+\cdots\cdots+A_3A_n\delta_{3n}\end{aligned}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+A_nA_1\delta_{n1}+A_nA_2\delta_{n2}+A_nA_3\delta_{n3}+\cdots\cdots+A_n^2\delta_{nn}$$

このAの2重積の和として示される形を，アフィノールの演算の記法に従えば次のごとき簡単な表現形式となる。

$$2W=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\cdot[\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}\times\boldsymbol{A}]=\boldsymbol{A}\times\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}\times\boldsymbol{A}=\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}\times\boldsymbol{A}=\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}:\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ここに $\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\}$ はアフィノールであり，エネルギー W はマトリックス $\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}$ とアフィノール $\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\}$ のスカラー積で与えられる。W を A に関して二度偏微分したものが変位の成分を与える。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial A_i^2}=\delta_{ii}\quad \frac{\partial^2 W}{\partial A_i\partial A_j}=\frac{\partial^2 W}{\partial A_j\partial A_i}=\delta_{ij}=\delta_{ji}$$

さて1組の力 $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ を取り扱う時に，演算は n 次のベクトルと考えた。今この1組の力をその箇々の大きさの比を一定に保つたままで丁度一つの力と同じように取り扱うことを考える。$\boldsymbol{A}_i$ と云うベクトルを単位のベクトルとし，大きさを与えるのは φ_i なるカラーで正負大小を規定させる。これによつて，ある1組の力は $\boldsymbol{A}_i$ なるベクトルの1次式で示される。

$$\boldsymbol{A}\equiv\varphi_1\boldsymbol{A}_1+\varphi_2\boldsymbol{A}_2+\varphi_3\boldsymbol{A}_3+\cdots\cdots\varphi_n\boldsymbol{A}_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$\boldsymbol{A}_i$ $(i=1,2,3,\cdots\cdots n)$ の種々の組合わせであらゆる荷重状態を表わす事が可能であるのは，n コのベクトルは互いに1次独立でなければならない。$\boldsymbol{A}_i$ のように，n コの力を1組に考えて丁度1つの力と同じように取り扱うのが高次の不静定構造物を取り扱う際には便利なことが多い。いま，$\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j$ の2つのベクトルで示される力があつてこの力が作用した時の弾性体のエネルギーを考える。$\boldsymbol{A}_i$ が作用した時の変位を $\boldsymbol{D}_i, \boldsymbol{A}_j$ が作用した時の変位を $\boldsymbol{D}_j$ で表わすと

$$\boldsymbol{D}_i\equiv\boldsymbol{A}_i\times\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\},\ \boldsymbol{D}_j\equiv\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}\times\boldsymbol{A}_j$$

2種のベクトルの組合わせで得られる力 $\varphi_i\boldsymbol{A}_i+\varphi_j\boldsymbol{A}_j$ によつて，弾性体に蓄えられるエネルギーを W とすれば

$$\begin{aligned}2W&=[\varphi_i\boldsymbol{A}_i+\varphi_j\boldsymbol{A}_j]\times\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}\times[\varphi_i\boldsymbol{A}_i+\varphi_j\boldsymbol{A}_j]\\&=\varphi_i^2\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}:\{\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{A}_i\}+\varphi_j^2\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}:\{\boldsymbol{A}_j\times\boldsymbol{A}_j\}+2\varphi_i\varphi_j\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}:\{\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{A}_j\}\\&=\varphi_i^2\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{D}_i+\varphi_j^2\boldsymbol{A}_j\cdot\boldsymbol{D}_j+\varphi_i\cdot\varphi_j\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{D}_j+\varphi_i\varphi_j\boldsymbol{A}_j\cdot\boldsymbol{D}_i\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{D}_j$ は $\boldsymbol{A}_j$ なる力が作用した時に $\boldsymbol{A}_i$ の作用方向に為した仕事であり，$\boldsymbol{A}_j\cdot\boldsymbol{D}_i$ は $\boldsymbol{A}_i$ なる力が作用した時に $\boldsymbol{A}_j$ の作用方向に為した仕事である。これは Maxwell-Betit の法則で $\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{D}_j=\boldsymbol{A}_j\cdot\boldsymbol{D}_i$ が常に成立する。特に i と j が異なる時に $\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{D}_j=\boldsymbol{A}_j\cdot\boldsymbol{D}_i=0$ が常に満たされるように n コのベクトルを撰ぶことができる[2)]。この時には $\boldsymbol{A}_i$ なる力は他の $\boldsymbol{A}_j$ なる力の作用方向には仕事をしない。このような n コの力のベクトルをアフィン力またはアフィン荷重と便宜的に呼んでいるが，ドイツ語の Affinlasten, Affinlastgruppen の適当な邦訳が見つからないのでこの妙な言葉を使用する。アフィン荷重の大きさの単位は適当な単位ベクトルで与えその正負大小はスカラーで決定する。

いま $\boldsymbol{A}_i$ $(i=1,2,3,\cdots n)$ をアフィン荷重とし，任意の力の作用状態が (8) 式で示されるように n コのアフィン荷重の1次形式で与えられる時に，弾性体に蓄えられるエネルギーがどのような形になるかを誘導してみる。

力は　$\boldsymbol{A}\equiv\varphi_1\boldsymbol{A}_1+\varphi_2\boldsymbol{A}_2+\varphi_3\boldsymbol{A}_3+\cdots\cdots\cdots\varphi_n\boldsymbol{A}_n$

変位は　$\boldsymbol{D}\equiv\varphi_1\boldsymbol{D}_1+\varphi_2\boldsymbol{D}_2+\varphi_3\boldsymbol{D}_3+\cdots\cdots\cdots\varphi_n\boldsymbol{D}_n$

よって弾性仕事 W は $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{D}_j=0$, $i\neq j$ を考慮して整理すれば

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\varphi_1^2\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{D}_1+\frac{1}{2}\varphi_2^2\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{D}_2+\frac{1}{2}\varphi_3^2\boldsymbol{A}_3\cdot\boldsymbol{D}_3+\cdots\cdots\frac{1}{2}\varphi_n^2\boldsymbol{A}_n\cdot\boldsymbol{D}_n\\&=\frac{1}{2}\varphi_1^2\{\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_1\}:\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}+\frac{1}{2}\varphi_2^2\{\boldsymbol{A}_2\times\boldsymbol{A}_2\}:\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}+\frac{1}{2}\varphi_3^2\{\boldsymbol{A}_3\times\boldsymbol{A}_3\}:\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}\\&\quad+\cdots\cdots\frac{1}{2}\varphi_n^2\{\boldsymbol{A}_n\times\boldsymbol{A}_n\}:\{\{\boldsymbol{\Delta}\}\}\end{aligned}$$

Wを力で偏微分するには，力がベクトルであっても差しつかえはない。ただ $\boldsymbol{A}_i$ は単位のベクトルを示すから変数をスカラーに置き換えて理解しなければならない。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{A}_i\partial \boldsymbol{A}_j}=\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}=\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{D}_j=0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{A}_i\partial \boldsymbol{A}_i}=\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_i\partial\varphi_i}=\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{D}_i=k_{ii}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

特に k_{ii} の常数をアフィン荷重の個有値と呼び，弾性体である限り $k_{ii}>0$ である。k_{ii} が負になることはあり得ない。k_{ii} は常にアフィン荷重に個有するものであり，もし 0 になる常数が存在するならば，この弾性体の支持が不安定であることを意味する。

4. 変位のマトリツクスのアフィン展開

変位のマトリックス $\{\{\Delta\}\}$ と n コのアフィン荷重 $\boldsymbol{A}_i$ が求まつている時に，変位のマトリックスは次のアフィン展開を可能にする。

$$\{\{\Delta\}\}\equiv\frac{1}{k_{11}}\{\boldsymbol{D}_1\times\boldsymbol{D}_1\}+\frac{1}{k_{22}}\{\boldsymbol{D}_2\times\boldsymbol{D}_2\}+\frac{1}{k_{33}}\{\boldsymbol{D}_3\times\boldsymbol{D}_3\}+\cdots\cdots\frac{1}{k_{nn}}\{\boldsymbol{D}_n\times\boldsymbol{D}_n\}\quad\cdots\cdots(10)$$

変位のマトリックスの逆マトリックスは，アフィン荷重を与えるベクトルで次のアフィン標示となる。

$$\{\{\Delta^{-1}\}\}\equiv\frac{1}{k_{11}}\{\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_1\}+\frac{1}{k_{22}}\{\boldsymbol{A}_2\times\boldsymbol{A}_2\}+\frac{1}{k_{33}}\{\boldsymbol{A}_3\times\boldsymbol{A}_3\}+\cdots\cdots\frac{1}{k_{nn}}\{\boldsymbol{A}_n\times\boldsymbol{A}_n\}\quad\cdots\cdots(11)$$

(10) 式および (11) 式は，対称なマトリックスの逆マトリックスを計算するのに使用される関係式である。

5. 不静定構造物のアフィン荷重

不静定構造物の解を求める際に，ある静定支持状態を基本に考えて，拘束条件と不静定力を対応させる。この時に，この不静定力を計算するための境界条件は，その不静定力が全体の弾性仕事を考えた時に仕事成分を持たないとして与える。すなわち A_1，A_2，A_3，$\cdots A_n$ なる力に対して，外力を含めた全弾性エネルギー W の偏微分が 0 になるとする。

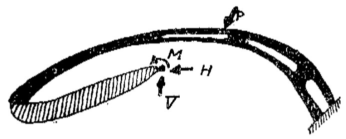
$$\frac{\partial W}{\partial A_1}=\frac{\partial W}{\partial A_2}=\frac{\partial W}{\partial A_3}=\cdots\cdots\frac{\partial W}{\partial A_n}=0$$

力に対しての偏微分は，力の1組を考えたベクトルでも成立しなければならない。

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{A}_1}=\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{A}_2}=\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{A}_3}=\cdots\cdots=\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{A}_n}=0\quad\cdots\cdots(12)$$

いま $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ なる n コの不静定力の相互の変位を変位のマトリックスで与える。力とその作用方向への変位は，基本形で計算されるもので，得られるマトリックスは対称である。$\boldsymbol{A}_i$ $(i=1,2,3,\cdots n)$ をこのマトリックスから導いたアフィン荷重と考える。$\boldsymbol{A}_i$ は弾性体の基本形に関してエネルギーの直交性があるから，アフィン荷重は，n 次元空間の弾性重心に作用する不静定力と考えることができる。固定アーチでは，仮想的な中心を考えてそこに作用する3つの力，水平力 H，垂直力 V，モーメント M を不静定力に撰べば，これら3つの力が互いに独立で他の変位に無関係である性質がある（図—3）。

図—3 弾性重心の想定



仮想的な弾性重心は何も中心を作る必要はなく，弾性重心に作用する力は，支承に作用する1組の力と全く同じであるから，この1組の力が弾性重心に作用する力と同じに，エネルギーの直交性が満たされれば，故意に弾性重心を探す必要は認めない。固定アーチ，固定ラーメンを解く際には，幾何学的に弾性中心を計算することができるが，同じ3次の不静定では，中間の支承の反力を不静定力に撰べば，これらの力は総て同じ方向を向くから幾何学的に弾性重心などは存在し得ないことになる。

そこで，固定アーチの弾性重心に作用する3つの不静定力がエネルギーに関して互に直交する性質のみをより広く利用するために，n 次の不静定構造の不静定力を仮想的に考えに n 次のアフィン空間の弾性重心に働く n コの力に取ることを考え，これをアフィン荷重と名ずけることにした。アフィン荷重はベクトルとして計算されるようにいくつかの力の1組を丁度1つの力と同じように取扱う。

6. アフィン荷重の影響線

$P=1$ の外力が不静定構造物のある任意の場所に作用していた時に，不静定力がどの程度の大きさであるかを求めるのが究極には問題となる。$P=1$ の外力が常に1点だけに留まっていることは稀であり，不静定力の影響線を連続的に知る方法が必要となる。これは非常に常識的な方法で精解が容易に得られる。

いま弾性体には $\varphi_1\cdot\boldsymbol{A}_1$，$\varphi_2\boldsymbol{A}_2$，$\varphi_3\boldsymbol{A}_3$，$\cdots\cdots\varphi_n\boldsymbol{A}_n$ なる不静定力と，外力としての P が加わつて釣合い，かつすべての境界条件を満たしていると考える。すべての境界条件を満たす条件は，P を加えた全弾性エネルギー W に関して (12) 式が成立することを意味している。

$\boldsymbol{A}_i$ に関する偏微分は，次の形になる。

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{A}_i}=\frac{\partial W}{\partial \varphi_i}=\int\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_i\partial\varphi_i}\Delta\varphi_i+\int\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_i\partial P}\Delta P=0$$

$$\therefore\quad\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_i\partial\varphi_i}\varphi_i+\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_i\partial P}P=0\quad\cdots\cdots(13)$$

ここで $\partial^2 W/\partial\varphi_i\cdot\partial\varphi_i$ は (9) 式により k_{ii}。次に $\partial^2 W/\partial\varphi_i\partial P$ であるが，これの持つ力学的な意味は興味がある。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_i \partial P}=[P=1 \text{ がアフィン荷重 } A_i \text{ の作用方向に為した弾性仕事}]$$
$$=[\text{単位のアフィン荷重 } A_i \text{ が，} P=1 \text{ の作用方向に為した弾性仕事}]$$

静定基本形に $P=1$ がある位置に作用した時に，不静定力の方向への変位を

$$\delta_{1P},\ \delta_{2P},\ \delta_{3P},\cdots\cdots\cdots\delta_{nP}$$

アフィン荷重の箇々の力を

$$A_{i1},\ A_{i2},\ A_{i3},\cdots\cdots\cdots A_{in}$$

とすれば

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_i \partial P}=\delta_{1P}\cdot A_{i1}+\delta_{2P}A_{i2}+\delta_{3P}A_{i3}+\cdots\cdots\delta_{nP}A_{in}$$

A_i の単位のアフィン荷重が静定基本形に作用した時の，$P=1$ の作用点の変位を δ_{iP} とすれば

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_i \partial P}=\delta_{iP}$$

よつて φ_i は次式で与えられる。

$$\varphi_i=-\frac{1}{k_{ii}}\delta_{iP}$$

特に $P=1$ が総て鉛直方向の荷重だけである時，$P=1$ が x に作用するとし，A_i が静定基本形に加わつた時の静定基本形のたわみ図を $\delta_i(x)$ で与えれば，アフィン荷重の影響線 $\varphi_i(x)$ は，個有値 k_{ii} と共に

$$\varphi_i(x)=-\frac{1}{k_{ii}}\delta_i(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

アフィン荷重の影響線は，静定基本形に作用させた単位のアフィン荷重による変位図を $(-k_{ii})$ で除した曲線である。

これが法則であり，今後のあらゆる不静定構造物の解法の根幹となる重要な性質である。

7. 連続桁の解法の1例

A) 単純桁を静定基本形に撰んだ場合（図—4）

3径間の連続桁の応力を解析するために，静定基本形は中間の支承を外した両端で単純に支持した桁と考え，不静定力は中間の支承の支承反力 N_1, N_2 に撰ぶ。静定基本形で $N_1=1$，および $N_2=1$ が作用した時のその方向への変位を求める。

$$\{\{\Delta\}\}\equiv\frac{l_1^3}{18EJ}\begin{bmatrix}8 & 7\\ 7 & 8\end{bmatrix}$$

アフィン荷重は $A_1\equiv\{1,\ 1\}$，$A_2\equiv\{1,\ -1\}$ の2種であり，個有値は次の値である。

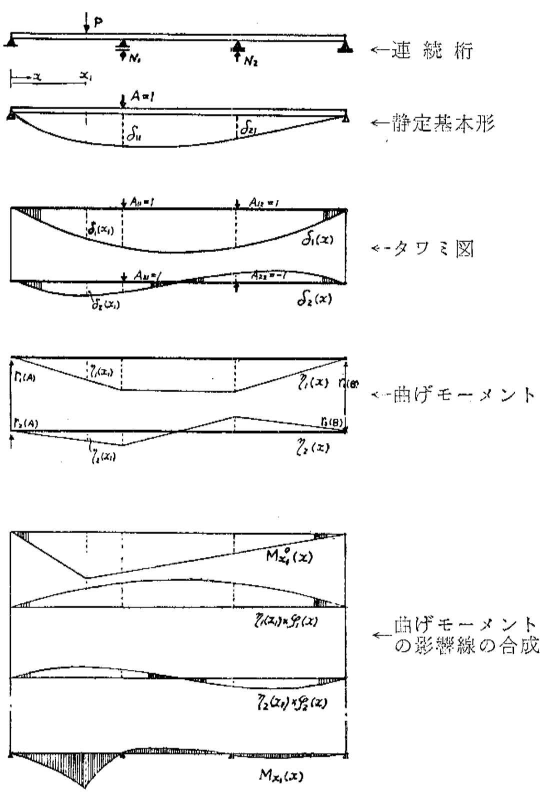
$$k_{11}=\frac{5\,l_1^3}{3EJ}\quad k_{22}=\frac{l_1^3}{9EJ}$$

A_1，A_2 の影響線は，この力を静定基本形に作用させた時の桁の変位図 $\delta_1(x)$，$\delta_2(x)$ をそれぞれの個有値 $(-k_{11},\ -k_{22})$ で除した曲線である。

連続桁の応力の影響線を求めるには，静定基本形にアフィン荷重が作用した時の静定基本形のたわみ，曲げモーメント，せん断力，支承反力等はあらかじめ計算されているものとして，これを $\delta_1(x)$，$\delta_2(x)$，$\eta_1(x)$，$\eta_2(x)$，$\zeta_1(x)$，$\zeta_2(x)$，$r_1(A)$，$r_2(A)$ とする。静定基本形に作用する $P=1$ の荷重による影響線を常に指標0を付して区別する。連続桁の任意の点 x_1 のたわみの影響線

$$\delta(x, x_1)=\delta^0(x, x_1)+\delta_1(x_1)\varphi_1(x)+\delta_2(x_1)\varphi_2(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

図—4



連続桁の任意の点 x_1 の曲げモーメントの影響線

$$M_{x_1}(x)=M_{x_1}{}^0(x)+\eta_1(x_1)\varphi_1(x)+\eta_2(x_1)\varphi_2(x) \quad \cdots\cdots(16)$$

連続桁の任意の点 x_1 のせん断力の影響線

$$S_{x_1}(x)=S_{x_1}{}^0(x)+\zeta_1(x_1)\varphi_1(x)+\zeta_2(x_2)\varphi_2(x) \quad \cdots\cdots(17)$$

支承 A の支承反力 R_A の影響線

$$R_A(x)=R_A{}^0(x)+r_1(A)\varphi_1(x)+r_2(A)\varphi_2(x) \quad \cdots\cdots(18)$$

これらの影響線を求める式の形が総べて同じ形となるのに注意されたい。不静定の支承反力 N_1 を求めるのは。アフィン荷重 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ の各組成 $\boldsymbol{A}_1\equiv\{A_{11},A_{12}\}$, $\boldsymbol{A}_2\equiv\{A_{21},A_{22}\}$ の和で与えられる。

$$N_1(x)=A_{11}\varphi_1(x)+A_{21}\varphi_2(x) \quad \cdots\cdots(19)$$

$$N_2(x)=A_{12}\varphi_1(x)+A_{22}\varphi_2(x) \quad \cdots\cdots(20)$$

B)　3つの連続する単純桁を静定基本形に撰んだ場合（図—5）

3径間の連続桁の不静定力を中間の支承での桁の曲げモーメントに取る。静定基本形は中間の支承上で桁を切断して，ヒンジとみなす。不静定力を支承の曲げモーメント M_1,M_2 とし，静定基本形で $M_1=1$，および $M_2=1$ が作用した時のその方向への変位を求める。力は曲げモーメントであるので，変位は廻転角で与えられる。

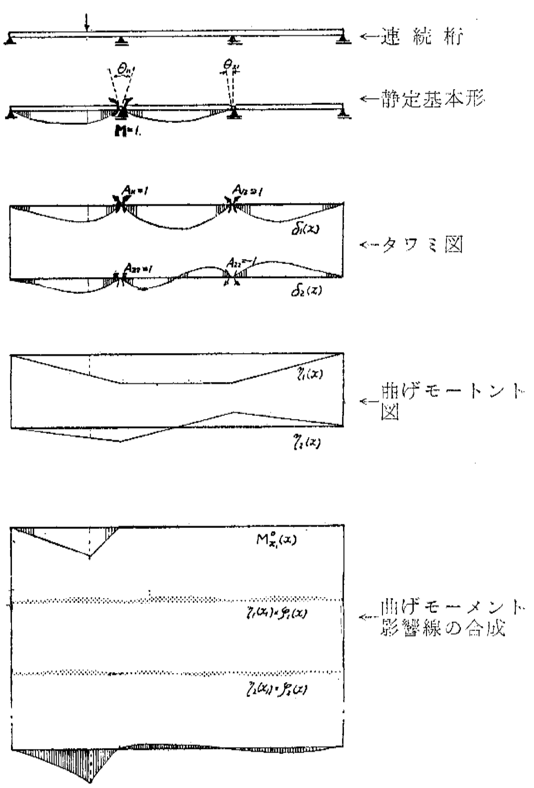
$$\{\{\varDelta\}\}=\frac{l_1}{6EJ}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

アフィン荷重は $\boldsymbol{A}_1\equiv\{1,\ 1\}$, $\boldsymbol{A}_2\equiv\{1,\ -1\}$ の2種に撰べる。個有値は次の値である。

$$k_{11}=\frac{10\,l_1}{6\,EJ}\qquad k_{22}=\frac{l_1}{EJ}$$

アフィン荷重の影響線はアフィン荷重が静定基本形に作用した時のたわみ図を個有値で除した形で与えられる。応力の影響線を求める基本式は (15)～(20) 式である。$\delta(x)$, $\eta(x)$ 等は，静定基本形の撰び方が異なれば違つた形で与えられるが，究極に得られる連続桁の性質は結局同じものが得られる。

図—5



8. 後記

連続桁の応力解析に，3連モーメントの定理が用いられる。この際の釣合条件式は不静定の支承モーメントに関する連立一次方程式を解くことになる。通常その形は下式のように得られる。

$$\begin{aligned}
2(l_1+l_2)M_1 + l_2M_2 &= p_1\\
l_2M_1 + 2(l_2+l_3)M_2 + l_3M_3 &= p_2\\
l_3M_2 + 2(l_3+l_4)M_3 + l_4M_4 &= p_3\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

右辺の荷重項は外力による数値である。この連立方程式の M の係数は，静定基本形を支承の上でヒンジにした形にした時の変位のマトリックスで与えられる。アフィン荷重とそのたわみ図で不静定構造を解析するには，右辺の荷重項を全然考慮する必要がないのが特色である。

参考文献

1) Leohardt, Ardrä: Die Vereinfachte Trägerrostbeechnung, S 65
2) 近藤繁人：立体構造物の静定主系の選び方について，土木学会論文集 35 号

（昭.32.7.17）