

大口径単円筒構造物による非線形回折波の 2次近似理論

真田 武¹・岩田好一朗²・水谷法美³

¹正会員 工修 日本港湾コンサルタント(株) 環境部 (〒150 東京都渋谷区恵比寿南1-15-1 JT 恵比寿南ビル)

²正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)

³正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科 (同上)

本研究では、単円筒構造物による非線形回折波の速度ポテンシャルの2次近似解を解析解の形で誘導し、その解の構造を明らかにするとともに、円筒周りの水位変動の特性について考究した。入射波高が大きくなると、波の非線形性が無視できなくなり、円筒周辺の水位変動や波峰高を正確に予測するためには、非線形理論を使う必要があることを再確認した。また、本研究で誘導した解はGreen関数を使わない解析解であるため、解の構造が明確である。

Key Words : diffraction theory, cylindrical structure, nonlinear wave diffraction

1. 緒言

沿岸海域の多目的有効利用および環境創造が近年提唱され、それに伴って多くの種類の海域構造物が建設されるようになってきた。大口径円筒構造物もその中の一構造物であるが、最近浅海域に複数基近接して建設されており¹⁾、構造物周辺の環境の保全・管理のためにも、大口径円筒構造物による波の変形、特に波高の大きい非線形波の変形を正確に把握しておくことは工学的にも極めて重要である。

大口径の単一円筒構造物による線形波の回折理論は既にMacCamy-Fuchs²⁾により導かれていることは周知のとおりである。一方、非線形波の回折理論については、Chakrabarti³⁾、山口・土屋⁴⁾をはじめいくつかの研究がなされてきているが、多くの理論は全ての境界条件を完全には満足していない。

Molin⁵⁾、Taylor-Hung⁶⁾らは、2次オーダーの速度ポテンシャルを直接誘導しないで、1次オーダー(線形理論)の速度ポテンシャルと2倍周波数を持ち斉次の水面境界条件のもとで解かれたラディエーションポテンシャルを用いてハスキンドの相反性により、2次オーダーの波力を直接求める方法を提案した。この方法はGhalayini-Williams^{7), 8)}によって任意形状構造物、さらには複数の任意形状構造物にまで拡張されている。また、Taylor⁹⁾は物体を微小要素に分割しそれぞれの要素に働く2次オーダーの波力をラディエーションポテンシャルを用いて求め、その2次オーダー波力から微小要素に働く2次波圧の平均値を逆算する方法を示して

いる。しかし、これらの方法は2次のポテンシャルを求めてはいないため構造物周辺の波浪変形や構造物への波の打ち上げ高を求めることはできない。

最近、Kriebel¹⁰⁾、Chau-Taylor¹¹⁾はグリーン関数を使って、全ての境界条件を満す2次オーダーの回折散乱波ポテンシャルの解析解を導いている。Kriebelは、回折散乱波問題の2次オーダーの水面境界条件が自由水面上に与えられた圧力分布により発生する波の問題における水面境界条件に類似していることから、Wehausen-Laitone¹²⁾が導いた積分形のグリーン関数と水面境界条件の右辺の非斉次項との積を自由水面の全領域で積分して2次オーダーの回折散乱波ポテンシャルを導いている。Chau-Taylorは連続式、斉次の水面境界条件、底面の不透過条件、Sommerfeldの放射条件の他に円筒表面の不透過条件も満足するグリーン関数を導き、グリーン公式を使って2次オーダーの回折散乱波ポテンシャルを導いている。この解は、2次成分波を、1次オーダーの入射波と1次オーダーの回折散乱波との干渉により生じる拘束波などに分離して表すことができないため2次オーダーの回折散乱波の発生機構が分からないなどの問題点を持っている。

また、上記の両解析法とも対象とする構造物は鉛直な円柱に限定されているため、任意形状の構造物への拡張は不可能である。村上¹³⁾は、グリーン関数とグリーン公式を使用することにより、任意断面形状の構造物による2次オーダーの速度ポテンシャルを求めている。彼らの解は、任意形状構造物へ適用可能な汎用

性の高いものである反面、すべての境界条件を満たしているものの連続性を厳密には満たしていない近似解である。

鉛直な円筒構造物による2次オーダーの速度ポテンシャルの厳密解を誘導する際の困難な点として、1次の速度ポテンシャルの r, θ, z に関する微分を含んだ複雑な自由表面の境界条件の取り扱いが挙げられる。そのため、従来から多くの理論は、自由表面の境界条件の1次オーダーの解で表記される右辺の関数を、2次の速度ポテンシャルの核となる関数として扱うのではなく、単なる自由表面上に与えられた外力としての境界条件として扱うグリーン関数法を使わざるを得なかったと考えられる。

そこで、本研究では、まず自由表面での境界条件の右辺の関数に1次のMacCamy・Fuchsの解を代入し、円筒関数の微分公式を使用してこれを簡潔な形に整理し、グリーン関数を用いずに2次オーダーの回折散乱波の速度ポテンシャルの厳密解を誘導し、その解の特性を水面変動を中心に考究するものである。

なお、本研究で誘導した厳密解は鉛直な円筒構造物を対象としているが、2次の速度ポテンシャルの自由波成分には、円筒の不透過条件により決められる未定係数を含んでいる。したがって、この定数を用いて内部領域での数値解と外部領域での厳密解を仮想境界（開境界）において接続させるいわゆるハイブリッド法を採用することにより、鉛直柱体に限らず、没水した構造物も含めた任意形状の構造物による非線形回折散乱波の解析にも適用可能となる。

2. 理論解析

(1) 基礎方程式および境界条件

Fig.1に示すように一定水深 d の海域に半径 a の鉛直な円柱が水面から突出して海底に固定されているものとし、 x の負の方向から波高 H_I 、周期 T の波が入射する場合を考える。座標系として、原点を静水面上に、 z 軸を鉛直上向きを正にとった円筒座標系 (r, θ, z) を採用する。

流体を非圧縮性完全流体、運動を非回転運動と仮定すると、速度ポテンシャル $\Phi(r, \theta, z; t)$ は以下の基礎方程式、境界条件の解として得られる。

・基礎方程式:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

・自由水面で与えられる運動学的境界条件:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad ; z = \eta(r, \theta; t) \quad (2)$$

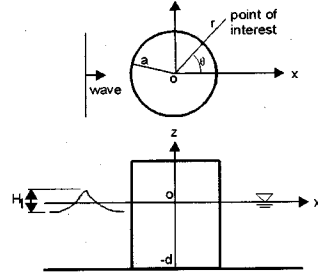


Fig.1 定義図

・自由水面で与えられる力学的境界条件:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad ; z = \eta(r, \theta; t) \quad (3)$$

・底面不透過条件:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad ; z = -d \quad (4)$$

・円柱表面不透過条件:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad ; r = a \quad (5)$$

ここに、 η は水位変動、 g は重力加速度、 t は時間を表す。

境界条件として式(2)~式(5)の他に、遠方領域において回折散乱波は構造物より外側に向かう進行波でなければならないという放射条件が加わる。

微分演算子 $(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z})$ を式(3)に施し、 g で除した式から式(2)を引くと次式となる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \\ & + \frac{2}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \right) \\ & + \frac{1}{g} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} \right\} = 0 \quad ; z = \eta(r, \theta; t) \quad (6) \end{aligned}$$

式(6)を静水面 $z=0$ まわりにテーラー展開すると次式となる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \\ & + \frac{2}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \right) \\ & + \frac{1}{g} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{2 \partial \Phi}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{2 \partial \Phi}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} \\
& + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} \left. \right\} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \right. \\
& + \frac{2}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \right) \\
& + \frac{1}{g} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{2 \partial \Phi}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{2 \partial \Phi}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} \right. \\
& + \left. 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} \right\} \\
& + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \dots \right] + \dots = 0 \\
& ; z = 0 \quad (7)
\end{aligned}$$

速度ポテンシャル $\Phi(r, \theta, z; t)$, 水位変動 $\eta(r, \theta; t)$ が微小パラメータ $\varepsilon(=k_1 H_1, k_1; 1$ 次の入射波ポテンシャルの波数)により, 次のように振動展開ができるものと仮定する.

$$\Phi(r, \theta, z; t) = \varepsilon \Phi_1(r, \theta, z; t) + \varepsilon^2 \Phi_2(r, \theta, z; t) + \dots \quad (8)$$

$$\eta(r, \theta; t) = \varepsilon \eta_1(r, \theta; t) + \varepsilon^2 \eta_2(r, \theta; t) + \dots \quad (9)$$

さらに調和振動を仮定し, $\Phi_1(r, \theta, z; t)$ と $\Phi_2(r, \theta, z; t)$ を以下のように空間と時間の関数に分離する.

$$\Phi_1(r, \theta, z; t) = \text{Real}\{\phi_1(r, \theta, z)e^{-i\sigma t}\} \quad (10)$$

$$\Phi_2(r, \theta, z; t) = \text{Real}\{\phi_2(r, \theta, z)e^{-2i\sigma t} + \overline{\phi_2}(r, \theta, z)\} \quad (11)$$

ここに, Real は実数部を, σ は角周波数を, $\overline{\phi_2}(r, \theta, z)$ は定常ポテンシャルを表す. 定常ポテンシャル $\overline{\phi_2}(r, \theta, z)$ は流速場に対しては定常流速を与えるが, 2次オーダーまでの水位変動, 圧力, 波力, モーメントには寄与しない. したがって, 以後では, $\overline{\phi_2}(r, \theta, z)$ を対象とせず, $\phi_2(r, \theta, z)$ のみを求めることとする.

式(8)~式(11)を式(1), (4), (5), (7)に代入し, ε の1次, 2次に関する項でまとめると, 以下の式が得られる.

a) ε の1次のオーダーの基礎方程式と境界条件

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \nu \phi_1 = 0 ; z = 0 \quad (13)$$

ここに, $\nu = \sigma^2/g$ であり沖波相当波数を表す.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 ; z = -d \quad (14)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = 0 ; r = a \quad (15)$$

放射条件はSommerfeldにより次式のように与えられている.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_1^s}{\partial r} - ik_1 \phi_1^s \right) = 0 \quad (16)$$

ここに, ϕ_1^s は1次の回折散乱波ポテンシャルである. MacCamy-Fuchsは, 式(12)~(16)より次式の解を得ている.

$$\phi_1(r, \theta, z) = -\frac{ig}{2\sigma k_1} \frac{\cosh k_1(z+d)}{\cosh k_1 d} \sum_m i^m A_m e^{im\theta} \quad (17)$$

ここに, $\sum_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty}$ を示し, 式中の A_m と α_m は次式で与えられる.

$$A_m = J_m(k_1 r) - \alpha_m H_m^{(1)}(k_1 r) \quad (18)$$

$$\alpha_m = J'_m(k_1 a) / H_m^{(1)'}(k_1 a) \quad (19)$$

ここに, J_m は m 次のベッセル関数, $H_m^{(1)}$ は m 次の第1種ハンケル関数であり, 'は微分を意味する. また, k_1 は $\nu = k_1 \tanh k_1 d$ を満たす正の固有値である. 式(18)の第1項が入射波に関する項, 第2項が回折散乱波に関する項である. なお, 以後, ベッセル関数とハンケル関数の変数が $k_1 r$ であるときは, 変数を省略して表示する.

b) ε の2次のオーダーの基礎方程式と境界条件

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} - 4\nu \phi_2 = \frac{i\sigma}{2g} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 - \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \frac{\sigma^2}{g} \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right\} ; z = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 ; z = -d \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial r} = 0 ; r = a \quad (23)$$

Sommerfeldの放射条件式は自由波に対するものであるため, 一般に拘束波を含む2次近似問題には適用できない. しかし, 1次の回折散乱波と同様に2次の回折散乱波も遠方領域においては構造物より外側に向かう進行波であることには変わらない.

式(17)~式(19)を式(21)の右辺に代入すると次式を得る(付録I参照).

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} - 4\nu \phi_2 = -\frac{ig}{8\sigma} \sum_n i^n \{ g_n^{II}(k_1 r) + g_n^{IS}(k_1 r) + g_n^{SS}(k_1 r) \} e^{in\theta} ; z = 0 \quad (24)$$

ここに,

$$g_n^{II}(k_1 r) = 3(\tanh^2 k_1 d - 1) J_n(2k_1 r) \quad (25)$$

$$g_n^{IS}(k_1 r) = \sum_m C_m J_{n-m} H_m^{(1)} \quad (26)$$

$$C_m = 2 \{ \alpha_{m+1} - (3 \tanh^2 k_1 d - 1) \alpha_m + \alpha_{m-1} \} \quad (27)$$

$$g_n^{SS}(k_1 r) = \sum_m D_{n,m} H_{n-m}^{(1)} H_m^{(1)} \quad (28)$$

$$D_{n,m} = - \{ \alpha_{n-(m+1)} \alpha_{m+1} - (3 \tanh^2 k_1 d - 1) \alpha_{n-m} \alpha_m + \alpha_{n-(m-1)} \alpha_{m-1} \} \quad (29)$$

(2) 2次近似の速度ポテンシャルの誘導

式(24)との対応から2次近似の速度ポテンシャル ϕ_2 を次のように表す。

$$\phi_2 = -\frac{ig}{8\sigma} \sum_n i^n \psi_n(r, z) e^{in\theta} \quad (30)$$

上式を式(20), (22)~(24)に代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \psi_n + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z^2} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial z} - 4\nu \psi_n = g_n^{II}(k_1 r) + g_n^{IS}(k_1 r) + g_n^{SS}(k_1 r) \quad ; z = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial z} = 0 \quad ; z = -d \quad (33)$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial r} = 0 \quad ; r = a \quad (34)$$

a) 2次近似の入射波の速度ポテンシャル Φ_{2L}^{II}

式(35)の水面境界条件のもとで式(31)を式(33)を満たすように解くと式(36)を得る。

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial z} - 4\nu \psi_n = g_n^{II}(k_1 r) \quad (35)$$

$$\psi_n = \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{2k_1 \sinh 2k_1 d - 4\nu \cosh 2k_1 d} g_n^{II}(k_1 r) \quad (36)$$

式(36)を分散関係式

$$\nu = k_1 \tanh k_1 d \quad (37)$$

を用いて変形すると次式となる。

$$\psi_n = -\frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1 d} g_n^{II}(k_1 r) \quad (38)$$

したがって、式(30)より2次近似の入射波の速度ポテンシャルは次式となる。

$$\phi_{2L}^{II} = \frac{ig}{8\sigma} \frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1 d} \cdot \sum_n i^n g_n^{II}(k_1 r) e^{in\theta} \quad (39)$$

ここで、さらに式(25), 分散関係式(37)と

$$e^{ix \cos \theta} = \sum_n i^n J_n(x) e^{in\theta} \quad (40)$$

の関係を用いると、よく知られた形の2次近似の入射波の速度ポテンシャルが得られる。

$$\phi_{2L}^{II} = -\frac{i3\sigma}{32k_1^2} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\sinh^4 k_1 d} e^{i2k_1 r \cos \theta} \quad (41)$$

b) 2次近似の回折散乱波の速度ポテンシャル Φ_2^S

式(42)の水面境界条件のもとで式(31)を式(33)と式(34)を満たすように解く。

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial z} - 4\nu \psi_n = g_n^{IS}(k_1 r) + g_n^{SS}(k_1 r) \quad (42)$$

まず ψ_n を次のように2つに分ける。

$$\psi_n(r, z) = \tilde{\varphi}_n(r, z) + \varphi_n(r, z) \quad (43)$$

ここに、 $\tilde{\varphi}_n(r, z)$ は水面境界条件式(42)と底面不透過条件式(33)のみを満たす関数で式(38)と同様に次式で表される。

$$\tilde{\varphi}_n = -\frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1 d} \cdot \{ g_n^{IS}(k_1 r) + g_n^{SS}(k_1 r) \} \quad (44)$$

なお、 $\tilde{\varphi}_n$ が放射条件を満たしていることは付録IIを参照されたい。式(43)を式(31), (33)と(42)に代入すると、 $\varphi(r, z)$ に対する以下の境界値問題に帰着する。

$$L\{\varphi_n\} + L\{\tilde{\varphi}_n\} = 0 \quad (45)$$

ここに、

$$L\{\cdot\} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} - 4\nu \varphi_n = 0 \quad ; z = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0 \quad ; z = -d \quad (48)$$

式(45)の左辺第2項は容易に計算でき、式(45)は次の非同次2回微分方程式となる(付録III参照)。

$$L\{\varphi_n\} = -\frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1 d} \cdot \{ f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r) \} \quad (49)$$

ここに、

$$f_n^{IS}(k_1 r) = k_1^2 \sum_m \{ C_{m+1} - 2C_m + C_{m-1} \} \cdot J_{n-m} H_m^{(1)} \quad (50)$$

$$f_n^{SS}(k_1 r) = k_1^2 \sum_m \{ D_{n,m+1} - 2D_{n,m} + D_{n,m-1} \} \cdot H_{n-m}^{(1)} H_m^{(1)} \quad (51)$$

水面境界条件式(47)と底面不透過条件式(48)を満たすように $\varphi_n(r, z)$ を次式で表す。

$$\varphi_n(r, z) = \frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2 d} R_{n,0}(r) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos \kappa_{2l}(z+d)}{\cos \kappa_{2l} d} R_{n,l}(r) \quad (52)$$

ここに、 $k_2, \kappa_{2l}(l=1, 2, 3, \dots)$ は次の分散関係式を満たす値である。

$$4\nu = k_2 \tanh k_2 d = -\kappa_{2l} \tan \kappa_{2l} d \quad (53)$$

式(52)を式(49)に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2 d} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_2^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right\} R_{n0}(r) \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos \kappa_{2l}(z+d)}{\cos \kappa_{2l} d} \\ & \cdot \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\kappa_{2l}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \right\} R_{n0}(r) \\ & = -\frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1 d} \\ & \cdot \{f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r)\} \quad (54) \end{aligned}$$

$\cosh k_2(z+d)$, $\cos \kappa_{2l}(z+d)$ の直交性を利用して上式を変形すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_2^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right\} R_{n,0}(r) \\ & = Z_0 \{f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r)\} \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\kappa_{2l}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \right\} R_{n,l}(r) \\ & = Z_l \{f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r)\} \\ & \quad (l=1, 2, 3, \dots) \quad (56) \end{aligned}$$

ここに、 Z_0 , Z_l は次式で与えられる。

$$Z_0 = -\frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh k_2 d}{\cosh 2k_1 d} \frac{Z_{1,2}}{Z_{2,2}} \quad (57)$$

$$Z_l = -\frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cos \kappa_{2l} d}{\cosh 2k_1 d} \frac{\tilde{Z}_{1,l}}{\tilde{Z}_{l,l}} \quad (58)$$

ここに、

$$\begin{aligned} Z_{1,2} &= \int_{-d}^0 \cosh 2k_1(z+d) \cosh k_2(z+d) dz \\ & \quad (2k_1 \sinh 2k_1 d \cdot \cosh k_2 d \\ & \quad - k_2 \cosh 2k_1 d \cdot \sinh k_2 d) \\ & = \frac{-k_2 \cosh 2k_1 d \cdot \sinh k_2 d}{4k_1^2 - k_2^2} \quad (59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{2,2} &= \int_{-d}^0 \{\cosh k_2(z+d)\}^2 dz \\ & = \frac{\sinh 2k_2 d + 2k_2 d}{4k_2} \quad (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{1,l} &= \int_{-d}^0 \cosh 2k_1(z+d) \cos \kappa_{2l}(z+d) dz \\ & \quad (2k_1 \sinh 2k_1 d \cdot \cos \kappa_{2l} d \\ & \quad + \kappa_{2l} \cosh 2k_1 d \cdot \sin \kappa_{2l} d) \\ & = \frac{2k_1 \sinh 2k_1 d \cdot \cos \kappa_{2l} d + \kappa_{2l} \cosh 2k_1 d \cdot \sin \kappa_{2l} d}{4k_1^2 + \kappa_{2l}^2} \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{l,l} &= \int_{-d}^0 \{\cos \kappa_{2l}(z+d)\}^2 dz \\ & = \frac{\sin 2\kappa_{2l} d + 2\kappa_{2l} d}{4\kappa_{2l}} \quad (62) \end{aligned}$$

式(55)と(56)を放射条件を考慮して定数変化法により解くと次式を得る。

$$\begin{aligned} R_{n,0}(r) &= -\frac{\pi i}{4} Z_0 \left[\int_a^r s \{f_n^{IS}(k_1 s) + f_n^{SS}(k_1 s)\} \right. \\ & \quad \left. \cdot H_n^{(2)}(k_2 s) ds \cdot H_n^{(1)}(k_2 r) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_r^\infty s \{f_n^{IS}(k_1 s) + f_n^{SS}(k_1 s)\} \\ & \cdot H_n^{(1)}(k_2 s) ds \cdot H_n^{(2)}(k_2 r) + E_{n,0} H_n^{(1)}(k_2 r) \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{n,l}(r) &= -Z_l \left[\int_a^r s \{f_n^{IS}(k_1 s) + f_n^{SS}(k_1 s)\} \right. \\ & \quad \left. \cdot I_n(\kappa_{2l} s) ds \cdot K_n(\kappa_{2l} r) \right. \\ & + \int_r^\infty s \{f_n^{IS}(k_1 s) + f_n^{SS}(k_1 s)\} \\ & \quad \left. \cdot K_n(\kappa_{2l} s) ds \cdot I_n(\kappa_{2l} r) + E_{n,l} K_n(\kappa_{2l} r) \right] \\ & \quad (l=1, 2, 3, \dots) \quad (64) \end{aligned}$$

ここに、 $H_n^{(2)}$ は n 次の第2種ハンケル関数、 I_n , K_n はそれぞれ n 次の第1種、および第2種変形ベッセル関数であり、 $E_{n,0}$, $E_{n,l}$ はまだ未定の定数である。なお、式(63), (64)が放射条件を満たすことは付録IVに示されている。最終的に2次近似の回折散乱波ポテンシャルは次式となる。

$$\begin{aligned} \phi_2^S &= -\frac{ig}{8\sigma} \sum_n i^n \left[-\frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1 d} \right. \\ & \quad \left. \cdot \{g_n^{IS}(k_1 r) + g_n^{SS}(k_1 r)\} \right. \\ & - \frac{\pi i}{4} Z_0 \frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2 d} \\ & \quad \cdot \left\{ \int_a^r s \{f_n^{IS}(k_1 s) + f_n^{SS}(k_1 s)\} \right. \\ & \quad \left. \cdot H_n^{(2)}(k_2 s) ds \cdot H_n^{(1)}(k_2 r) \right. \\ & + \int_r^\infty s \{f_n^{IS}(k_1 s) + f_n^{SS}(k_1 s)\} \\ & \quad \left. \cdot H_n^{(1)}(k_2 s) ds \cdot H_n^{(2)}(k_2 r) \right. \\ & \quad \left. + E_{n,0} H_n^{(1)}(k_2 r) \right\} \\ & - \sum_{l=1}^{\infty} Z_l \frac{\cos \kappa_{2l}(z+d)}{\cos \kappa_{2l} d} \\ & \quad \cdot \left\{ \int_a^r s \{f_n^{IS}(k_1 s) + f_n^{SS}(k_1 s)\} \right. \\ & \quad \left. \cdot I_n(\kappa_{2l} s) ds \cdot K_n(\kappa_{2l} r) \right. \\ & + \int_r^\infty s \{f_n^{IS}(k_1 s) + f_n^{SS}(k_1 s)\} \\ & \quad \left. \cdot K_n(\kappa_{2l} s) ds \cdot I_n(\kappa_{2l} r) \right. \\ & \quad \left. + E_{n,l} K_n(\kappa_{2l} r) \right\} \} e^{in\theta} \quad (65) \end{aligned}$$

上式における $E_{n,0}$, $E_{n,l}$ を $\phi_2 (= \phi_{2L}^I + \phi_2^S)$ が円柱表面の不透過条件式(23)を満たす条件から決定する。 $\partial\phi_2/\partial r = 0 (r=a)$ より、

$$\begin{aligned} & -\frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1 d} \cdot G_n \\ & - \frac{\pi i}{4} Z_0 \frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2 d} \left\{ k_2 \int_a^\infty s \{f_n^{IS}(k_1 s) \right. \\ & \quad \left. + f_n^{SS}(k_1 s)\} H_n^{(1)}(k_2 s) ds \cdot H_n^{(2)'}(k_2 a) \right. \\ & \quad \left. + k_2 E_{n,0} H_n^{(1)'}(k_2 a) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^{\infty} Z_l \frac{\cos \kappa_{2l}(z+d)}{\cos \kappa_{2l}d} \left\{ \kappa_{2l} \int_a^{\infty} s \{ f_n^{IS}(k_1s) \right. \\
& \quad \left. + f_n^{SS}(k_1s) \} K_n(\kappa_{2l}s) ds \cdot I'_n(\kappa_{2l}a) \right. \\
& \quad \left. + \kappa_{2l} E_{n,l} K'_n(\kappa_{2l}a) \right\} = 0 \quad (66)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
G_n &= \frac{\partial}{\partial r} \{ g_n^{II}(k_1r) + g_n^{IS}(k_1r) + g_n^{SS}(k_1r) \} \Big|_{r=a} \\
&= 2k_1 \sum_m H_{n-m}^{(1)'}(k_1a) \{ (\alpha_{m+1} - \alpha_m) \\
& \quad \cdot (J_{n-m}(k_1a) - \alpha_{n-(m+1)} H_{n-m}^{(1)}(k_1a)) \\
& \quad \quad - (\alpha_m - \alpha_{m-1}) \\
& \quad \cdot (J_{n-m}(k_1a) - \alpha_{n-(m-1)} H_{n-m}^{(1)}(k_1a)) \} \quad (67)
\end{aligned}$$

式(66)を $\cosh k_2(z+d)$ と $\cos \kappa_{2l}(z+d)$ の直交性を利用して変形すると, $E_{n,0}$ と $E_{n,l}$ は次式のように与えられる.

$$\begin{aligned}
E_{n,0} &= - \left\{ \frac{4i}{\pi k_2} G_n + \int_a^{\infty} s \{ f_n^{IS}(k_1s) + f_n^{SS}(k_1s) \} \right. \\
& \quad \left. \cdot H_n^{(1)}(k_2s) ds \cdot H_n^{(2)'}(k_2a) \right\} / H_n^{(1)'}(k_2a) \quad (68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{n,l} &= \left\{ \frac{1}{\kappa_{2l}} G_n - \int_a^{\infty} s \{ f_n^{IS}(k_1s) + f_n^{SS}(k_1s) \} \right. \\
& \quad \left. \cdot K_n(\kappa_{2l}s) ds \cdot I'_n(\kappa_{2l}a) \right\} / K'_n(\kappa_{2l}a) \quad (69)
\end{aligned}$$

以上をまとめると 2 次近似の速度ポテンシャルは次式となる.

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \phi_{2L}^{II} + \phi_2^S \\
&= \phi_{2L}^{II} + \phi_{2L}^{IS} + \phi_{2L}^{SS} + \phi_{2F}^B \quad (70)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\phi_{2L}^{II} = \frac{ig}{8\sigma} \frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1d} \sum_n i^n g_n^{II}(k_1r) e^{in\theta} \quad (71)$$

$$\begin{aligned}
\phi_{2L}^{IS} &= \frac{ig}{8\sigma} \frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1d} \sum_n i^n g_n^{IS}(k_1r) e^{in\theta} \\
&+ \frac{ig}{8\sigma} \sum_n i^n \left[\frac{\pi i}{4} Z_0 \frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2d} \right. \\
& \quad \cdot \left\{ M_{n,1}^{IS}(r) H_n^{(1)}(k_2r) + M_{n,2}^{IS}(r) H_n^{(2)}(k_2r) \right\} \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} Z_l \frac{\cos \kappa_{2l}(z+d)}{\cos \kappa_{2l}d} \left\{ L_{n,l,1}^{IS}(r) K_n(\kappa_{2l}r) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + L_{n,l,2}^{IS}(r) I_n(\kappa_{2l}r) \right\} \right] e^{in\theta} \quad (72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{2L}^{SS} &= \frac{ig}{8\sigma} \frac{k_1^2 + \nu^2}{4\nu^3} \frac{\cosh 2k_1(z+d)}{\cosh 2k_1d} \sum_n i^n g_n^{SS}(k_1r) e^{in\theta} \\
&+ \frac{ig}{8\sigma} \sum_n i^n \left[\frac{\pi i}{4} Z_0 \frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2d} \right. \\
& \quad \cdot \left\{ M_{n,1}^{SS}(r) H_n^{(1)}(k_2r) + M_{n,2}^{SS}(r) H_n^{(2)}(k_2r) \right\} \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} Z_l \frac{\cos \kappa_{2l}(z+d)}{\cos \kappa_{2l}d} \left\{ L_{n,l,1}^{SS}(r) K_n(\kappa_{2l}r) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \left. + L_{n,l,2}^{SS}(r) I_n(\kappa_{2l}r) \right\} \right] e^{in\theta} \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
\phi_{2F}^B &= \frac{ig}{8\sigma} \sum_n i^n \left[\frac{\pi i}{4} Z_0 \frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2d} E_{n,0} H_n^{(1)}(k_2r) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} Z_l \frac{\cos \kappa_{2l}(z+d)}{\cos \kappa_{2l}d} E_{n,l} K_n(\kappa_{2l}r) \right] e^{in\theta} \quad (74)
\end{aligned}$$

但し,

$$M_{n,1}^{IS}(r) = \int_a^r s f_n^{IS}(k_1s) H_n^{(2)}(k_2s) ds \quad (75)$$

$$M_{n,2}^{IS}(r) = \int_r^{\infty} s f_n^{IS}(k_1s) H_n^{(1)}(k_2s) ds \quad (76)$$

$$L_{n,l,1}^{IS}(r) = \int_a^r s f_n^{IS}(k_1s) I_n(\kappa_{2l}s) ds \quad (77)$$

$$L_{n,l,2}^{IS}(r) = \int_r^{\infty} s f_n^{IS}(k_1s) K_n(\kappa_{2l}s) ds \quad (78)$$

$$M_{n,1}^{SS}(r) = \int_a^r s f_n^{SS}(k_1s) H_n^{(2)}(k_2s) ds \quad (79)$$

$$M_{n,2}^{SS}(r) = \int_r^{\infty} s f_n^{SS}(k_1s) H_n^{(1)}(k_2s) ds \quad (80)$$

$$L_{n,l,1}^{SS}(r) = \int_a^r s f_n^{SS}(k_1s) I_n(\kappa_{2l}s) ds \quad (81)$$

$$L_{n,l,2}^{SS}(r) = \int_r^{\infty} s f_n^{SS}(k_1s) K_n(\kappa_{2l}s) ds \quad (82)$$

であり, $\phi_{2L}^{II} \sim \phi_{2F}^B$ はそれぞれ以下に示す意味を持つ.

ϕ_{2L}^{II} : 1 次の入射波同士の干渉により生じる拘束波の速度ポテンシャル.

ϕ_{2L}^{IS} : 1 次の入射波と 1 次の回折散乱波との干渉により生じる拘束波の速度ポテンシャル.

ϕ_{2L}^{SS} : 1 次の回折散乱波同士の干渉により生じる拘束波の速度ポテンシャル.

ϕ_{2F}^B : 上記の $\phi_{2L}^{II} \sim \phi_{2L}^{SS}$ と円筒との干渉により生じる自由波の速度ポテンシャル.

(3) 水位変動

式(3)を $z=0$ まわりにテーラー展開し, 式(9)を代入すると次式となる.

$$\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 \quad (83)$$

ここに,

$$\eta_1 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad (84)$$

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{r \partial \theta} \right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} + \eta_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial t} \right] \quad (85)
\end{aligned}$$

式(84)と(85)に式(10)と(11)および

$$\eta_1(r, \theta, t) = \text{Real}\{\zeta_1(r, \theta) e^{-i\sigma t}\} \quad (86)$$

$$\eta_2(r, \theta, t) = \text{Real}\{\zeta_2(r, \theta) e^{-2i\sigma t} + \bar{\zeta}_2(r, \theta)\} \quad (87)$$

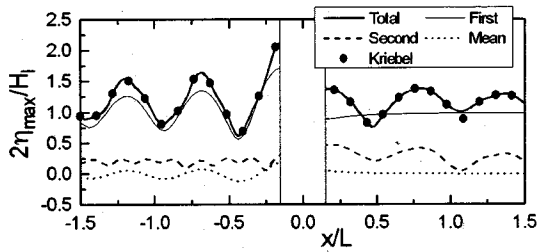


Fig.2 Kriebelの解との無次元波峰高分布の比較例($k_1 a = 1.0, d/a = 1.57, k_1 H_1 = 0.50$)

を代入すると、 $\zeta_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2$ は以下の式で与えられる。

$$\zeta_1 = \frac{i\sigma}{g} \phi_1 \quad (88)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{4g} \left[8i\sigma\phi_2 - \left\{ \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{r\partial\theta} \right)^2 \right\} - 3\nu^2\phi_1^2 \right] \quad (89)$$

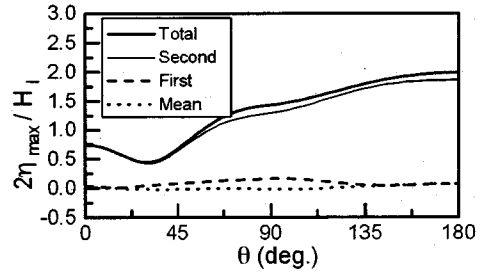
$$\bar{\zeta}_2 = \frac{1}{4g} \left[\nu^2 |\phi_1|^2 - \left| \frac{\partial\phi_1}{\partial r} \right|^2 - \left| \frac{\partial\phi_1}{r\partial\theta} \right|^2 \right] \quad (90)$$

ここに、 $\bar{\zeta}_2$ は平均水位を表す。

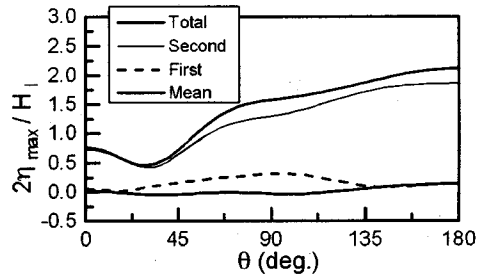
3. 計算結果とその考察

まず、本理論の妥当性を検証するため、Kriebelが誘導した厳密解⁸⁾との比較を行った。その結果、 x 軸に添った無次元波峰高の比較例を示したFig.2から認められるように、本理論の計算値は、Kriebelの結果と良好に一致することが明らかとなった。したがって、グリーン関数を使ったKriebelの解と、解析解の形で誘導した本理論は、解の表現は異なるものの結果は同一であるといえる。ただし、本研究で誘導した解は、解析解であるため、解の構造はより明確になっている。以下に、本理論に基づいて、2次オーダーの回折散乱波の水位変動の特性を考察する。

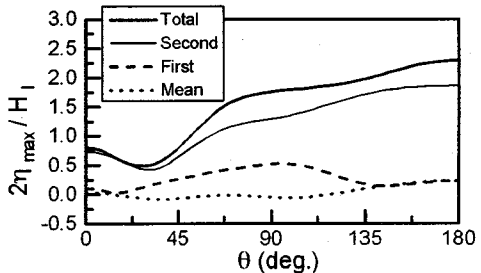
Fig.3は $k_1 a = 2.0, d/a = 1.0$ の場合の円筒周りの無次元波峰高の分布を2次のオーダーの厳密解(式(83))によって求めたものであり、細実線が1次オーダー、破線が2次オーダー、点線が平均水位、太実線がTotal(1次+2次+平均水位)の無次元波峰高を表している。同図の(a), (b), (c)は合田¹⁴⁾による非線形性パラメータ $\Pi = (H_I/L)\coth^3(k_1 d)$ がそれぞれ0.03, 0.06, 0.10の場合であり、いずれも入射波は2次オーダーのストークス波の適用範囲の波である。この図より、非線形性の増大に伴って、波峰高が全体的に大きくなっていることが分かるが、特に円筒前面($\theta = 180^\circ$)と円筒側方($\theta = 90^\circ$)付近で2次オーダーの影響が大きく現れてい



(a) $\Pi = 0.03$



(b) $\Pi = 0.06$

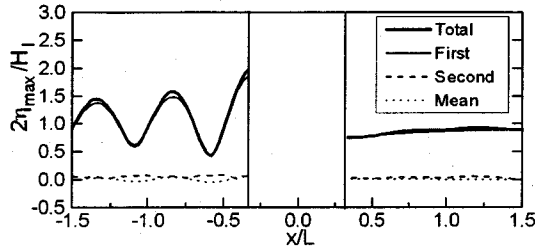


(c) $\Pi = 0.10$

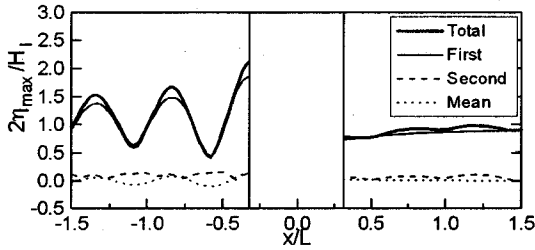
Fig.3 円筒周りの無次元波峰高分布($k_1 a = 2.0, d/a = 1.0$)

る。非線形性が最も大きい $\Pi = 0.1$ の場合、円筒前面でのTotalの波峰高は1次オーダーの約30%増であり、円筒側方では1次オーダーの約40%増となっており、正確な波峰高を算定するには非線形理論が必要であることが分かる。

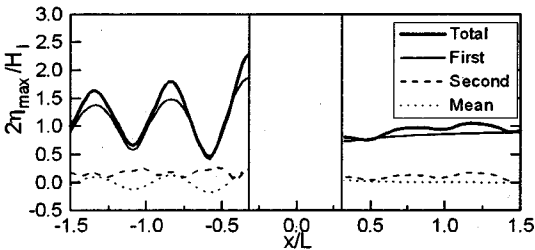
Fig.4はFig.3と同じ条件の場合で、 x 軸に沿った無次元波峰高の空間分布を示したものである。 x/L が負の領域は円筒の前面領域(沖側)、 x/L が正の領域は円筒の後面領域(岸側)を表す。円筒前面には入射波と回折波によって形成された部分重複波が存在することが分かる。非線形性が最も小さい $\Pi = 0.03$ の場合、部分重複波の腹の位置で多少の波峰高の増大が見られる



(a) $\Pi = 0.03$



(b) $\Pi = 0.06$

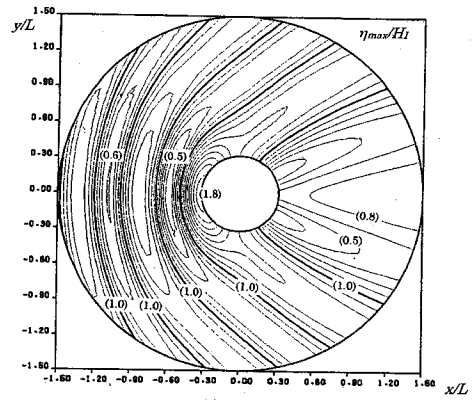


(c) $\Pi = 0.10$

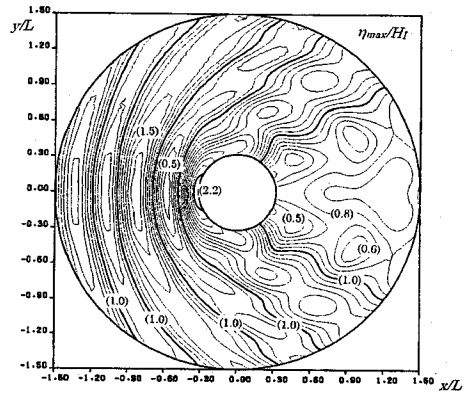
Fig.4 x 軸に沿った無次元波峰高分布 ($k_1 a = 2.0, d/a = 1.0$)

ものの、全体的には2次オーダーの影響は小さい。波の非線形性が大きくなるにしたがって特に腹の位置での波峰高が増大するのが認められる。また、1次オーダーではほとんど変化が見られなかった円筒後面において、自由波を含む2次オーダーの回折散乱波が大きく発生していることが認められ、 $\Pi = 0.10$ の場合、1次オーダーの約20%もの波峰高の増加が見られる。また、円筒前面において平均水位の変化が見られる。この平均水位の変化はその振幅が $1/r$ で減少していくことを除けば、鉛直壁前面で形成される重複波の場合に生じる平均水位の変化と同様の傾向を示し、腹の部分でset-up、節の部分でset-downとなっている。

Fig.5は $k_1 a = 2.0, d/a = 1.0, \Pi = 0.06$ の場合の無次元等波峰高線を表したものであり、(a)は線形理論、



(a) 線形理論

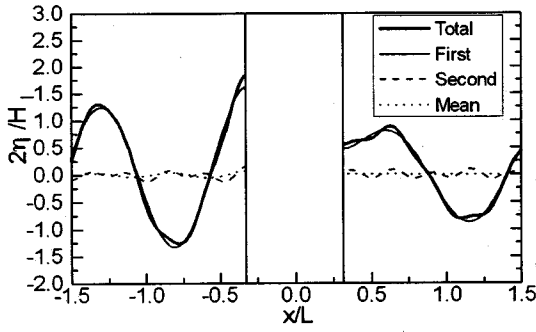


(b) 非線形理論 (厳密解)

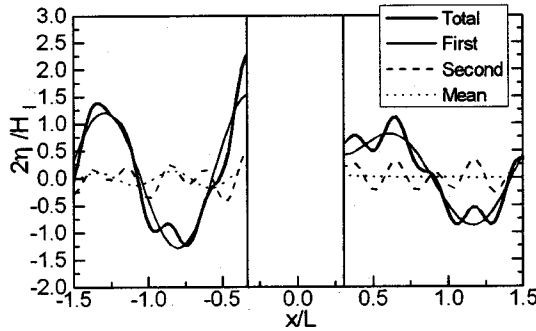
Fig.5 無次元等波峰高線 ($k_1 a = 2.0, d/a = 1.0, \Pi = 0.06$)

(b)は2次の非線形理論の厳密解を示す。同図(a)と(b)とを比べると非線形理論では円筒側方から後方にかけて2次の成分の寄与が相対的に大きくなり、線形理論と大きく異なっていることが分かる。

Fig.6(a), (b)は、波力が最大となった時の x 軸上の無次元水位変動の空間分布を $\Pi = 0.03, 0.10$ の場合について厳密解によって計算した結果を例示したものである。これより、入射波の非線形性が大きくなるにしたがい、円筒前面領域より円筒後面領域で自由波を含む2次成分の波の寄与が相対的に大きくなっていることがはっきり分かる。また、Fig.7は、最大波力発生時の無次元水位変動の鳥瞰図を例示したもので、(a)は線形理論、(b)は2次の非線形理論による計算結果である。非線形理論では自由波を含む2次の成分波により、線形理論と比べて複雑な波形になっていることが認められる。また、この2次成分の波は入射波の成分が小さくなる円筒後面において特に明瞭に現れており、円筒構造物周りの水面変動の特性を正確に評価するには、非線形回折波理論を使用する必要があることが、ここからも指摘できる。



(a) $\Pi = 0.03$



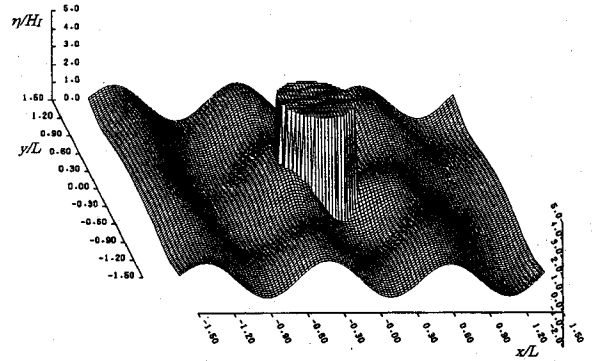
(b) $\Pi = 0.10$

Fig.6 最大波力作用時の無次元水位変動 ($k_1 a = 2.0$, $d/a = 1.0$)

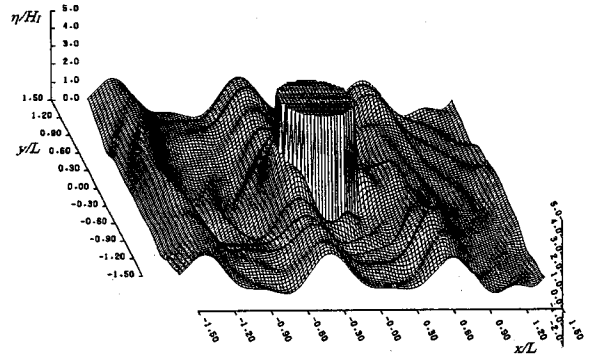
4. 結言

本研究では、大口径の単円筒構造物による非線形回折散乱波の2次近似の速度ポテンシャルの解析解を誘導し、非線形回折波動場の水面変動の特性について論じてきた。入射波高が大きくて、波の非線形性が無視できない場合は、構造物周辺の波高や波峰高さの分布を正確に予測するためには、非線形理論が必要であることが認められた。本論で展開した理論は清川ら¹⁵⁾⁻¹⁷⁾が線形問題で開発したいわゆる境界展開法と組み合わせることにより軸対称構造物や面対称構造物にも拡張することができる。また、境界要素法などの数値計算と本理論を組み合わせるハイブリッド法により、任意形状構造物に拡張することができる。

なお、本理論の妥当性を水理実験により確認しているが、水理実験とのつき合わせた結果については、別途稿を改めて発表することになっている。



(a) 線形理論



(b) 非線形理論

Fig.7 最大波力発生時の無次元水位変動の空間分布

付録 I 式(24)の誘導

自由水面での境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} - 4\nu \phi_2 = g(k_1 r, \theta) \quad ; z = 0 \quad (I.1)$$

$$g(k_1 r, \theta) = \frac{i\sigma}{2g} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 - \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \frac{\sigma^2}{g} \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right\} \quad (I.2)$$

式(I.2)にMacCamy・Fuchsの解(式(17))を代入すると次式を得る。

$$g(k_1 r, \theta) = -\frac{ig}{8\sigma} \sum_m \sum_n i^{m+n} \left[2A'_m A'_n - \frac{2mn}{(k_1 r)^2} A_m A_n + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) A_m A_n \right] e^{i(m+n)\theta} \quad (I.3)$$

上式において、

$$A'_m = \partial A_m / \partial (k_1 r) \quad (I.4)$$

である。ここで、 $m+n=p$ とおくと、

$$g(k_1 r, \theta) = -\frac{ig}{8\sigma} \sum_p i^p \sum_n \left[2A'_m A'_{p-m} - \frac{2m(p-m)}{(k_1 r)^2} A_m A_{p-m} + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) A_m A_{p-m} \right] e^{ip\theta} \quad (I.5)$$

さらに、

$$A_m A_{p-m} = J_m J_{p-m} - \alpha_{p-m} J_m H_{p-m}^{(1)} - \alpha_m J_{p-m} H_m^{(1)} + \alpha_m \alpha_{p-m} H_m^{(1)} H_{p-m}^{(1)} \quad (I.6)$$

であるから、 $g(k_1 r, \theta)$ は次式のように表現できる。

$$g(k_1 r, \theta) = -\frac{ig}{8\sigma} \sum_p i^p \left[g_p^{II}(k_1 r) + g_p^{IS}(k_1 r) + g_p^{SS}(k_1 r) \right] e^{ip\theta} \quad (I.7)$$

ここに、

$$g_p^{II}(k_1 r) = \sum_m \left\{ 2J'_m J'_{p-m} - \frac{2m(p-m)}{(k_1 r)^2} J_m J_{p-m} + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) J_m J_{p-m} \right\} \quad (I.8)$$

$$g_p^{IS}(k_1 r) = -\sum_m \alpha_{p-m} \left\{ 2J'_m H_{p-m}^{(1)'} - \frac{2m(p-m)}{(k_1 r)^2} J_m H_{p-m}^{(1)} + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) J_m H_{p-m}^{(1)} \right\} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \left\{ 2J'_{p-m} H_m^{(1)'} - \frac{2m(p-m)}{(k_1 r)^2} J_{p-m} H_m^{(1)} + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) J_{p-m} H_m^{(1)} \right\} \quad (I.9)$$

$$g_p^{SS}(k_1 r) = \sum_m \alpha_m \alpha_{p-m} \left\{ 2H_m^{(1)'} H_{p-m}^{(1)'} - \frac{2m(p-m)}{(k_1 r)^2} H_m^{(1)} H_{p-m}^{(1)} + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) H_m^{(1)} H_{p-m}^{(1)} \right\} \quad (I.10)$$

ところで円筒関数の微分公式は次式で与えられる。

$$Z'_n(x) = \frac{n}{x} Z_n(x) - Z_{n+1}(x) = Z_{n-1}(x) - \frac{n}{x} Z_n(x) \quad (I.11)$$

ただし、 $J_n(x)$ 、 $H_n^{(1)}(x)$ を $Z_n(x)$ で代表させた。上式を使うと、例えば $g_p^{IS}(k_1 r)$ は以下のように簡潔に表すことができる。

$$g_p^{IS}(k_1 r) = -\sum_m \alpha_{p-m} \left[2 \left(J'_m H_{p-m}^{(1)'} - \frac{m(p-m)}{(k_1 r)^2} J_m H_{p-m}^{(1)} \right) \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) J_m H_{p-m}^{(1)} \right] \\ & - \sum_m \alpha_m \left[2 \left(H_m^{(1)'} J'_{p-m} - \frac{m(p-m)}{(k_1 r)^2} H_m^{(1)} J_{p-m} \right) \right. \\ & \left. + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) H_m^{(1)} J_{p-m} \right] \\ & = -\sum_m \alpha_{p-m} \cdot \left[2 \left\{ -\frac{1}{k_1 r} \left((p-m) J'_m H_{p-m}^{(1)} - m J_m H_{p-m}^{(1)'} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(J'_m - \frac{m}{k_1 r} J_m \right) \left(H_{p-m}^{(1)'} + \frac{p-m}{k_1 r} H_{p-m}^{(1)} \right) \right\} \right. \\ & \left. + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) J_m H_{p-m}^{(1)} \right] \\ & - \sum_m \alpha_m \cdot \left[2 \left\{ -\frac{1}{k_1 r} \left((p-m) H_m^{(1)'} J'_{p-m} - m H_m^{(1)} J'_{p-m} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(H_m^{(1)'} - \frac{m}{k_1 r} H_m^{(1)} \right) \left(J'_{p-m} + \frac{p-m}{k_1 r} J_{p-m} \right) \right\} \right. \\ & \left. + (3 \tanh^2 k_1 d - 1) H_m^{(1)} J_{p-m} \right] \\ & = \sum_m \alpha_m \frac{2m}{k_1 r} J'_{p-m} H_m^{(1)} - \sum_m \alpha_{p-m} \frac{2m}{k_1 r} J_m H_{p-m}^{(1)'} \\ & + 2 \sum_m \alpha_{m+1} J_{p-m} H_m^{(1)} + \sum_m \alpha_{p-m} \frac{2m}{k_1 r} H_{p-m}^{(1)'} J_m \\ & - \sum_m \alpha_m \frac{2m}{k_1 r} H_m^{(1)} J'_{p-m} + 2 \sum_m \alpha_{m-1} H_m^{(1)} J_{p-m} \\ & - 2(3 \tanh^2 k_1 d - 1) \sum_m \alpha_m J_{p-m} H_m^{(1)} \\ & = 2 \sum_m \left\{ \alpha_{m+1} - (3 \tanh^2 k_1 d - 1) \alpha_m + \alpha_{m-1} \right\} \\ & \cdot J_{p-m} H_m^{(1)} \quad (I.12) \end{aligned}$$

なお、以上の式変形の途中で、式(I.3)を式(I.5)へ変形したときと同じように、総和記号の添字(円筒関数の次数)の置き換えを行っている。同様の手順により、 $g_p^{II}(k_1 r)$ 、 $g_p^{SS}(k_1 r)$ も以下のように簡潔に表現することができる。

$$g_p^{II}(k_1 r) = 3(\tanh^2 k_1 d - 1) J_p(2k_1 r) \quad (I.13)$$

$$g_p^{SS}(k_1 r) = -\sum_m \left\{ \alpha_{p-(m+1)} \alpha_{m+1} - (3 \tanh^2 k_1 d - 1) \alpha_{p-m} \alpha_m + \alpha_{p-(m-1)} \alpha_{m-1} \right\} H_{p-m}^{(1)} H_m^{(1)} \quad (I.14)$$

ここで、 $\alpha_{-n} = \alpha_n$ 、 $Z_{-n}(x) = (-1)^n Z_n(x)$ の関係を使うと、

$$g_{-n}^{II}(k_1 r) = (-1)^n g_n^{II}(k_1 r) \quad (I.15)$$

$$g_{-n}^{IS}(k_1 r) = (-1)^n g_n^{IS}(k_1 r) \quad (I.16)$$

$$g_{-n}^{SS}(k_1 r) = (-1)^n g_n^{SS}(k_1 r) \quad (I.17)$$

を確かめることができる。

付録 II $\tilde{\varphi}_n$ が放射条件を満たすことの証明

$$J_n(x) = \frac{1}{2} \left(H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) \right) \quad (\text{II.1})$$

の関係と、 $H_n^{(1)}(x), H_n^{(2)}(x)$ の $x \rightarrow \infty$ での漸近展開

$$H_n^{(1)}(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x-\gamma_n)} \quad (\text{II.2})$$

$$H_n^{(2)}(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x-\gamma_n)} \quad (\text{II.3})$$

$$\gamma_n = \frac{(2n+1)\pi}{4} \quad (\text{II.4})$$

を用いると、 $r \rightarrow \infty$ では、

$$\begin{aligned} & g_n^{IS}(k_1 r) \\ &= \sum_m C_m J_{n-m} H_m^{(1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_m C_m \left(H_{n-m}^{(1)} + H_{n-m}^{(2)} \right) H_m^{(1)} \\ &\simeq \frac{1}{2} \sum_m C_m \left(\sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{i(k_1 r - \gamma_{n-m})} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{-i(k_1 r - \gamma_{n-m})} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{i(k_1 r - \gamma_m)} \\ &= \frac{1}{\pi k_1} \sum_m C_m \left(\frac{1}{r} e^{i(2k_1 r - \gamma_{n-m} - \gamma_m)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} e^{i(\gamma_{n-m} - \gamma_m)} \right) \quad (\text{II.5}) \end{aligned}$$

時間項が $e^{-i2\sigma t}$ であることを考慮すると、上式の右辺第1項は外向き進行波であり、右辺第2項は $1/r$ で減少する定常波であることが分かる。したがって、 $g_n^{IS}(k_1 r)$ が放射条件を満たすことが確かめられた。

右辺第2項の定常波は2次元の場合の1次の入射波 $e^{ik_1 x}$ と1次の反射波 $e^{-ik_1 x}$ との干渉波が $e^{ik_1 x}$ 、 $e^{-ik_1 x} = 1$ と定常になることに対応する。

$g_n^{SS}(k_1 r)$ についても同様に、

$$\begin{aligned} & g_n^{SS}(k_1 r) = \sum_m D_{n,m} H_{n-m}^{(1)} H_m^{(1)} \\ &\simeq \frac{2}{\pi k_1} \sum_m D_{n,m} \frac{e^{i(2k_1 r - \gamma_{n-m} - \gamma_m)}}{r} \quad (\text{II.6}) \end{aligned}$$

となり、外向き進行波であることが分かる。

付録 III $L\{\varphi_n\}$ の計算

$$\frac{\partial(J_{n-m} H_m^{(1)})}{\partial r} = k_1 \left(J'_{n-m} H_m^{(1)} + J_{n-m} H_m^{(1)'} \right) \quad (\text{III.1})$$

$$Z_n''(x) + \frac{1}{x} Z_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) Z_n(x) = 0 \quad (\text{III.2})$$

より、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(J_{n-m} H_m^{(1)})}{r \partial r} \\ &= -k_1^2 \left[J_{n-m}'' + \left\{ 1 - \frac{(n-m)^2}{(k_1 r)^2} \right\} J_{n-m} \right] H_m^{(1)} \\ &\quad - k_1^2 \left[H_m^{(1)''} + \left\{ 1 - \frac{m^2}{(k_1 r)^2} \right\} H_m^{(1)} \right] J_{n-m} \quad (\text{III.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(J_{n-m} H_m^{(1)})}{\partial r^2} &= k_1^2 \left(J_{n-m}'' H_m^{(1)} + 2J_{n-m}' H_m^{(1)'} \right. \\ &\quad \left. + J_{n-m} H_m^{(1)''} \right) \quad (\text{III.4}) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (J_{n-m} H_m^{(1)}) &= 2k_1^2 J_{n-m}' H_m^{(1)'} \\ &\quad - \left(2k_1^2 - \frac{n^2 - 2mn + 2m^2}{r^2} \right) J_{n-m} H_m^{(1)} \quad (\text{III.5}) \end{aligned}$$

ここで、式(I.11)より、

$$\begin{aligned} & 2k_1^2 J_{n-m}' H_m^{(1)'} \\ &= 2k_1^2 \left(\frac{n-m}{k_1 r} J_{n-m} - J_{n-m+1} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{m}{k_1 r} H_m^{(1)} - H_{m+1}^{(1)} \right) \\ &= \frac{2mn - 2m^2}{r^2} J_{n-m} H_m \\ &\quad - k_1^2 \left\{ \frac{2(n-m)}{k_1 r} J_{n-m} H_{m+1}^{(1)} + \frac{2m}{k_1 r} H_m^{(1)} J_{n-m+1} \right\} \\ &\quad + 2k_1^2 J_{n-m+1} H_{m+1}^{(1)} \quad (\text{III.6}) \end{aligned}$$

ここで、さらに公式

$$\frac{2n}{x} Z_n(x) = Z_{n+1}(x) + Z_{n-1}(x) \quad (\text{III.7})$$

を用いると、

$$\frac{2(n-m)}{k_1 r} J_{n-m} = J_{n-m+1} + J_{n-m-1} \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{2m}{k_1 r} H_m^{(1)} = H_{m+1}^{(1)} + H_{m-1}^{(1)} \quad (\text{III.9})$$

となり、式(III.6)は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} & 2k_1^2 J_{n-m}' H_m^{(1)'} = \frac{2mn - 2m^2}{r^2} J_{n-m} H_m^{(1)} \\ &\quad - k_1^2 \left(J_{n-(m+1)} H_{m+1}^{(1)} + J_{n-(m-1)} H_{m-1}^{(1)} \right) \quad (\text{III.10}) \end{aligned}$$

このため、式(III.5)を次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (J_{n-m} H_m^{(1)}) \\ &= - \left(2k_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_{n-m} H_m^{(1)} \\ &\quad - k_1^2 \left(J_{n-(m+1)} H_{m+1}^{(1)} + J_{n-(m-1)} H_{m-1}^{(1)} \right) \quad (\text{III.11}) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\sum_m C_m J_{n-m} H_m^{(1)} \right) \\
&= - \left(2k_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \sum_m C_m J_{n-m} H_m^{(1)} \\
&\quad - k_1^2 \sum_m C_m \left(J_{n-(m+1)} H_{m+1}^{(1)} + J_{n-(m-1)} H_{m-1}^{(1)} \right) \\
&= - \left(2k_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \sum_m C_m J_{n-m} H_m^{(1)} \\
&\quad - k_1^2 \sum_m (C_{m+1} + C_{m-1}) J_{n-m} H_m^{(1)} \quad (\text{III.12})
\end{aligned}$$

最終的に、

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(4k_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right\} g_n^{IS}(k_1 r) \\
&= -k_1^2 \sum_m (C_{m+1} - 2C_m + C_{m-1}) \\
&\quad \cdot J_{n-m} H_m^{(1)} \quad (\text{III.13})
\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(4k_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right\} g_n^{SS}(k_1 r) \\
&= -k_1^2 \sum_m (D_{n,m+1} - 2D_{n,m} + D_{n,m-1}) \\
&\quad \cdot H_{n-m}^{(1)} H_m^{(1)} \quad (\text{III.14})
\end{aligned}$$

付録 IV $R_{n,0}(r), R_{n,l}(r)$ が放射条件を満たすことの証明

まず、 $R_{n,0}(r)$ について考える。

$$\begin{aligned}
R_{n,0}(r) &= -\frac{\pi i}{4} Z_0 \left[M_{n,1}(r) H_n^{(1)}(k_2 r) \right. \\
&\quad \left. + M_{n,2}(r) H_n^{(2)}(k_2 r) + E_{n,0} H_n^{(1)}(k_2 r) \right] \quad (\text{IV.1})
\end{aligned}$$

ここに、

$$M_{n,1}(r) = \int_a^r s \{ f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r) \} \cdot H_n^{(2)}(k_2 s) ds \quad (\text{IV.2})$$

$$M_{n,2}(r) = \int_r^\infty s \{ f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r) \} \cdot H_n^{(1)}(k_2 s) ds \quad (\text{IV.3})$$

時間項が $e^{-i2\sigma t}$ であることとハンケル関数の $x \rightarrow \infty$ での漸近展開式を用いると、式(IV.1)の右辺第3項は $r \rightarrow \infty$ において外向き進行波であることが分かる。

また、

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} M_{n,1}(r) &= \text{有限確定値} \\
\lim_{r \rightarrow \infty} M_{n,2}(r) &= 0
\end{aligned}$$

であるから、 $r \rightarrow \infty$ において式(IV.1)の右辺第1項は外向き進行波であり、右辺第2項はゼロとなることがわかる。

次に、 $R_{n,l}(r)$ について考える。

$$\begin{aligned}
R_{n,l}(r) &= -Z_l [L_{n,l,1}(r) K_n(\kappa_{2l} r) \\
&\quad + L_{n,l,2}(r) I_n(\kappa_{2l} r) + E_{n,l} K_n(\kappa_{2l} r)] \quad (\text{IV.4})
\end{aligned}$$

ここに、

$$L_{n,l,1}(r) = \int_a^r s \{ f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r) \} I_n(\kappa_{2l} s) ds \quad (\text{IV.5})$$

$$L_{n,l,2}(r) = \int_r^\infty s \{ f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r) \} K_n(\kappa_{2l} s) ds \quad (\text{IV.6})$$

変形ベッセル関数の $x \rightarrow \infty$ での漸近展開

$$K_n(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad I_n(x) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \quad (\text{IV.7})$$

より、式(IV.4)の右辺第3項は減衰定常波であることが分かる。右辺第1項は

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L_{n,l,1}(r) K_n(\kappa_{2l} r) = \infty \times 0 \quad (\text{IV.8})$$

となるが、ロピタルの定理と式(IV.7)を用いると以下に示すようにゼロに収束することが分かる。

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} L_{n,l,1}(r) K_n(\kappa_{2l} r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L_{n,l,1}(r)}{1/K_n(\kappa_{2l} r)} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L'_{n,l,1}(r)}{(1/K_n(\kappa_{2l} r))'} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\{K_n(\kappa_{2l} r)\}^2 r I_n(\kappa_{2l} r) \{f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r)\}}{-\{K_{n-1}(\kappa_{2l} r) + K_{n+1}(\kappa_{2l} r)\}/2}} \\
&\simeq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\kappa_{2l} r}} e^{-\kappa_{2l} r} \right)^2 r \sqrt{\frac{1}{2\pi \kappa_{2l} r}} e^{\kappa_{2l} r}}{-\sqrt{\frac{\pi}{2\kappa_{2l} r}} e^{-\kappa_{2l} r}} \cdot \{f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r)\}} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2\kappa_{2l}} \{f_n^{IS}(k_1 r) + f_n^{SS}(k_1 r)\} \right] \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad (\text{IV.9})
\end{aligned}$$

同様に、式(II.4)の右辺第2項も

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L_{n,l,2}(r) I_n(\kappa_{2l} r) = 0 \quad (\text{IV.10})$$

となることが示される。

参考文献

- 1) 岩田好一朗, 水谷法美, 金昌濟, 真田武: 3円筒大型構造物による波の変形と作用波力, 海洋開発論文集, Vol.9, pp.205-210, 1993.
- 2) McCamy, R.C. and Fuchs, R.A.: Wave forces on piles: A diffraction theory, Tech. Memo. No.69, Beach Erosion Board, pp.1-17, 1954.

- 3) Chakrabarti, S.K.: Nonlinear Wave Forces on Vertical Cylinder, *Proc. ASCE, Jour. Hydraulic Div.*, Vol.98, HY11, pp.1895-1909, 1972.
- 4) 山口正隆, 土屋義人: 大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線形性の影響, 土木学会論文報告集, No.229, pp.41-53, 1974.
- 5) Molin, B.: Second order diffraction load upon three-dimensional bodies, *Applied Ocean Research*, Vol.1, No.4, pp.197-202, 1979.
- 6) Eatock Taylor, R. and Hung, S.M.: Second order diffraction force on a vertical cylinder in regular waves, *Applied Ocean Research*, Vol.9, pp.19-30, 1987.
- 7) Ghalayini, S.A. and Williams, A.N.: Nonlinear wave force on vertical cylinders of arbitrary cross section, *J. Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, Vol.115, No.6, pp.809-830, 1989.
- 8) Ghalayini, S.A. and Williams, A.N.: Nonlinear wave force on vertical cylinder arrays, *J. Fluid and Structures*, Vol.5, pp.1-32, 1991.
- 9) Eatock Taylor, R.: On distribution of second order pressure on vertical circular cylinder, *Applied Ocean Research*, Vol.11, No.4, pp.183-193, 1989.
- 10) Kriebel, D.L.: Nonlinear wave interaction with a vertical circular cylinder, Part I: Diffraction theory, *Ocean Engineering*, Vol.17, No.4, pp.345-377, 1990.
- 11) Chau, F.P. and Eatock Taylor, R.: Second order wave diffraction by a vertical cylinder, *J. Fluid Mechanics*, Vol.240, pp.571-599, 1992.
- 12) Wehausen, J.V. and Laitone, E.V.: Surface waves, *Encyclopedia of Physics*, Flugge, S.(ed), Vol.IX, pp.446-778, Springer, Berlin, 1960.
- 13) 村上啓介, 吉田明徳, 入江功: 任意断面形状の鉛直柱体の波の非線形干渉解析, 海岸工学論文集, 第40巻, pp.846-850, 1993.
- 14) Goda, Y.: An unified nonlinearity parameter of water waves, *Rept. Port and Harbour Res. Inst.*, Vol.22, No.3, pp.3-30, 1983.
- 15) 清川哲志, 大山巧: ハイブリッド法による軸対象構造物に作用する流体力および周辺波動場の解析, 土木学会論文集, 第345号/II-1, pp.131-140, 1984.
- 16) 清川哲志, 小林浩, 日野幹雄: 軸対称構造物による波の散乱と波力, 土木学会論文集, 第321号, pp.103-131, 1982.
- 17) 清川哲志, 小林浩: 面対称構造物による波の散乱と波力, 土木学会論文集, 第336号, pp.55-64, 1983.

(1995.9.8 受付)

SECOND ORDER EXACT THEORY OF NONLINEAR WAVE DIFFRACTION DUE TO A CYLINDRICAL STRUCTURE

Takeshi SANADA, Koichiro IWATA and Norimi MIZUTANI

Second-order exact solution of velocity potential for nonlinear diffracted wave is derived analytically for the case of isolated cylinder. First, the surface profile calculated with the present theory is compared with that calculated by the Kriebel's solution and excellent agreement is confirmed. Then, wave profiles and wave crest height distribution around the cylinder are compared with corresponding results obtained by linear diffraction theory. Results show clearly that the second-order diffracted wave is important on wave diffraction. The derived solution is analytical and therefore it is easy to investigate the structure of the solution.