

曲げ試験に用いる舗装用混合物の 2次元弾性解析

栗谷川裕造¹・秋葉正一²・木田哲量³・能町純雄⁴

¹正会員 日本大学助教授 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町 1-2-1)

²正会員 工博 日本大学助手 生産工学部土木工学科

³正会員 工博 日本大学教授 生産工学部土木工学科

⁴正会員 工博 日本大学講師 生産工学部土木工学科

本論文は、舗装用混合物の曲げ試験により、材料定数を求める場合に必要となる応力および変位成分の一般式を、はりの2次元弾性解析を実施して求め、この適用性について検討したものである。このため、まず載荷あるいは自重による供試体内部の応力および表面変位の弾性解析解を有限Fourier変換による方法で求めた。つぎに、この一般式を用い、供試体の応力および変位について数値計算を実施し、初等曲げ理論から得られるものと比較した。その結果、両者の違いは、供試体サイズ、載荷点位置等が異なる場合の供試体の変形特性に顕著に認められ、これより解析手法の違いが推定される材料定数に与える影響を明らかにした。

Key Words : *bending test, mechanical properties, fatigue test, finite Fourier transforms, surface displacement, specimen shape, loading position*

1. まえがき

近年舗装は、技術の進展と多様化により、従来の設計法に加え理論構造設計導入に向けて検討が行われている¹⁾。この理論構造設計は、多層弾性理論を適用したもので、アスファルト舗装要綱にはこの設計法を適用した方法の例を示している²⁾。

この設計法を利用する場合に、設計条件として必要となる舗装各層を構成する材料の物性値(弾性係数 E 、ポアソン比 ν 以下、材料定数と称する)の決定が問題となる。これらは原則的に室内試験等によって設定するものとされているが、この設計法を適用した文献³⁾によれば、材料定数は既存の研究結果を参考にして決めているようである。材料定数を設定する場合、特に弾性係数(E)は、その大きさが舗装内部の応力や変位など、あるいは破壊基準式におけるアスファルト混合物層の破壊回数に与える影響が大きく、この決定方法を確立することは重要な研究テーマの一つと考えられる。

舗装材料の材料定数を求めるための室内試験は、間接引張り、三軸圧縮試験あるいは曲げ試験などがある^{4)・5)}。この内、曲げ試験ははり状供試体に波形荷重を加える疲労試験や曲げスチフネス係数試験

を実施して、弾性的な材料定数である絶対複素弾性係数や曲げスチフネス係数を得ることができる。これらの材料定数は、測定した最大荷重と変位量を求め、ASTM (American Society for Testing and Materials) に規定されている曲げ応力(σ)とひずみ(ε)の式を利用して求める⁶⁾。これらの式は単純ばりとして初等曲げ理論により得られたもので、文献⁷⁾によればはり高さが長さ比べ大きい場合には応力や変位は載荷部におけるせん断力の影響を受けるので、ASTMでも初等曲げ理論による式ははり長さに対する高さの比が最大でも1/16より小さい場合に適用されている。しかし、各研究機関で行われているアスファルト混合物の繰り返し曲げ試験に用いられる供試体の寸法は、長さが30~40cmで高さが3~4cmのものを利用して例が多く用いられ^{8)・9)}、寸法比は前述した1/16より大きいものである。

通常現場で施工されるアスファルト混合物の表層厚は約5cm前後、また近年耐流動および耐摩耗用の混合物として用いられている大粒径アスファルト混合物の表層厚は約10cmのものが多く^{10)・11)}、複合材料であるアスファルト混合物の弾性的性質や疲労性状を把握するためには、ある程度の厚さを持

つ供試体での試験が望ましいと考えられる。一方、供試体長さについては、前述したように初等曲げ理論による応力およびひずみ式を用いるには厚さの16倍以上が望ましいことから、このような条件を満足する寸法を有する供試体を作製することは容易でなく、また载荷や恒温装置などの試験設備が大型なものとなってしまい、試験自体の簡便性という面での問題が生じると思われる。

したがって、供試体作製および試験自体が簡便かつ容易に行えるようにするためには供試体寸法はある程度の厚さを有し、はり長さが厚さに対し比較的短いもので実施せざるをえない。しかし、供試体寸法や载荷方法等の試験方法がいまだ確立していないわが国の繰返し曲げ試験において、前述したような供試体寸法を考慮し、かつ既存の試験設備を利用して試験の実施を試みるとすれば、初等曲げ理論による公式は適用不可能である。したがって、応力および変位成分のより厳密な弾性解析を行い、その解析結果を用いて混合物の弾性的評価を行う必要があると考えられる。

そこで、本研究は前述した供試体の载荷による応力や変位成分に与える影響を究明するため、曲げ試験用供試体の2次元弾性解析を実施した。このような弾性解析結果を用いて材料定数を推定する場合は、供試体の弾性変形に対する結果が重要となる。このため、本論文では主に供試体形状や载荷位置等の違いが変形特性に与える影響を中心に調べた。なお、このようなはりの弾性解析を扱ったものは、応力解析結果と光弾性実験結果との照合を行った Ravilleら¹²⁾や渡辺ら¹³⁾の研究などで、これらの解析は応力成分に限られており、特に変位成分について解析したものは見当たらない。また、これらの研究によれば、応力成分は応力関数法によって解析しているので、この結果を利用して曲げ試験用供試体の変形挙動を解析することは非常に困難と考えられる。したがって本解析では有限Fourier変換による方法¹⁴⁾を用いて応力および変位成分の解析解を求め、载荷による供試体の弾性的挙動を数値計算により調べた。特に、この結果は初等曲げ理論より求められた変位や応力と比較し、この理論式を用いた場合に推定される材料定数に与える影響を検討した。また、繰返し载荷試験を実施した場合、ひずみが比較的小さい範囲での载荷を行う時、供試体温度が高温状態になるにつれて加える荷重は小さく設定する必要がある。この場合、供試体自重は载荷重に比べ大きくなり、推定結果は供試体自重による影響が無視できないことも考えられるため、解析に当たり供試体自重がたわみに与える影響についても調べた。

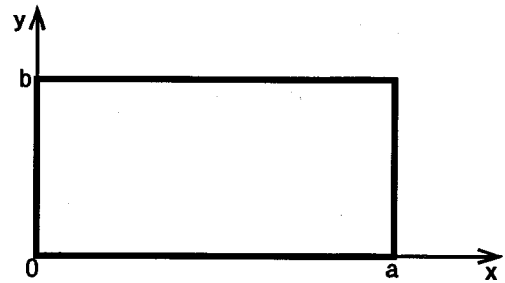


図-1 2次元平面座標

なお、本論文は初等曲げ理論では適用不可能な供試体形状の応力および変位成分について弾性解析を実施し、供試体形状の違いなどが材料定数の推定結果に与える解析上の要因を検討するもので、通常推定されるアスファルト混合物の材料定数はアスファルト量や空隙率などの物理的性質あるいは試験温度などの試験条件に大きく影響されるが、本論文においてはこれらの要因の検討を対象外としている。また、本解析結果を利用することによって、繰返し曲げ試験でレジリエントモジュラスなどの推定が可能と考えられるが、材料定数推定のための本解析結果の適用方法および適用例については別報にゆずる。

2. 有限Fourier変換による解析

(1) 変位および応力成分の解析

図-1に示す2次元平面において、弾性問題におけるつり合い方程式は、 x 方向および y 方向の鉛直応力をそれぞれ σ_x および σ_y 、せん断応力を τ_{xy} 、物体力を X および Y とすると次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= X \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= Y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

また、 X 方向および Y 方向の変位をそれぞれ u および v とし、平面応力状態における応力と変位の関係はフック則を考慮すれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

図-1に示す矩形領域において、任意の境界条件を満足する変位成分の一般解は、能町が有限Fourier変換を用いて行っている¹⁴⁾。以下に x 方向の変位

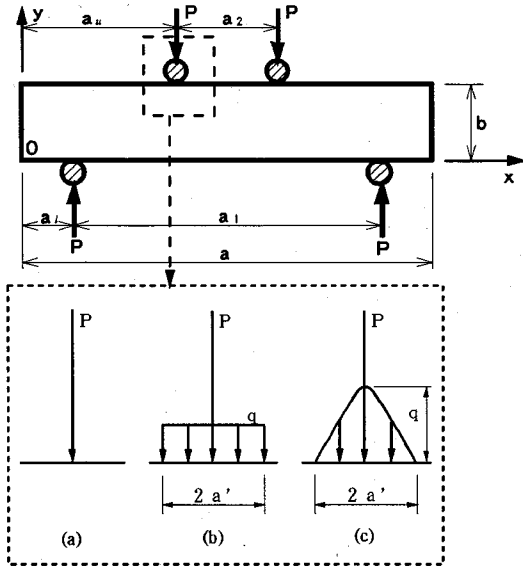


図-2 2点荷重曲げ試験と荷重点直下の荷重強度分布

成分 u と y 方向の変位成分 v の一般式を示す。

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{2}{ab} \sum_n \sin Ny \left[\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{1}{N^2} \left\{ S_n[(\sigma_x)_{x=a}] \right. \right. \\
 & - S_n[(\sigma_x)_{x=0}] \left. \right\} - \frac{1}{N} \left\{ (-1)^n \int_0^a (u_{y=b}) dx \right. \\
 & - \left. \int_0^a (u_{y=0}) dx \right\} - \frac{1}{N} \left\{ C_n(v_{x=a}) - C_n(v_{x=0}) \right\} \\
 & - \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{1}{N^2} S_n(X) \left. \right] \\
 & + \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n \frac{\cos Mx \cdot \sin Ny}{(M^2 + N^2)^2} \left[\frac{1+\nu}{E} \left\{ 2M^2 \right. \right. \\
 & + (1-\nu)M^2 \left. \right\} \left\{ (-1)^m S_m[(\sigma_x)_{x=a}] \right. \\
 & - S_m[(\sigma_x)_{x=0}] \left. \right\} - \frac{(1+\nu)^2}{E} MN \left\{ (-1)^m S_m[(\sigma_y)_{y=b}] \right. \\
 & - S_m[(\sigma_y)_{y=0}] \left. \right\} - \left\{ N^2 - \nu M^2 N \right\} \left\{ (-1)^m C_m(u_{y=b}) \right. \\
 & - C_m(u_{y=0}) \left. \right\} - \left\{ N^2 - \nu M^2 N \right\} \left\{ (-1)^m C_n(u_{x=a}) \right. \\
 & - C_n(u_{x=0}) \left. \right\} - \frac{1+\nu}{E} \left\{ 2N^2 + (1-\nu)M^2 \right\} C_m S_n(X) \\
 & + \frac{(1+\nu)^2}{E} MNS_m C_n(Y) \left. \right] \\
 v = & \frac{2}{ab} \sum_m \sin Mx \left[\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{1}{M^2} \left\{ S_m[(\sigma_y)_{y=b}] \right. \right. \\
 & - S_m[(\sigma_y)_{y=0}] \left. \right\} - \frac{1}{M} \left\{ (-1)^m \int_0^a (v_{x=a}) dy \right.
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^a (v_{x=0}) dy \left. \right\} - \frac{1}{M} \left\{ C_m(u_{y=b}) - C_m(u_{y=0}) \right\} \\
 & - \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{1}{M^2} S_m(Y) \left. \right] \\
 & + \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n \frac{\sin Mx \cdot \cos Ny}{(M^2 + N^2)^2} \left[\frac{1+\nu}{E} \left\{ 2M^2 \right. \right. \\
 & + (1-\nu)N^2 \left. \right\} \left\{ (-1)^m S_m[(\sigma_y)_{y=b}] \right. \\
 & - S_m[(\sigma_y)_{y=0}] \left. \right\} - \frac{(1+\nu)^2}{E} MN \left\{ (-1)^m S_n[(\sigma_x)_{x=a}] \right. \\
 & - S_n[(\sigma_x)_{x=0}] \left. \right\} - \left\{ M^2 - \nu MN^2 \right\} \left\{ (-1)^m C_n(v_{x=a}) \right. \\
 & - C_n(v_{x=0}) \left. \right\} - \left\{ M^2 - \nu MN^2 \right\} \left\{ (-1)^m C_m(u_{y=b}) \right. \\
 & - C_m(u_{y=0}) \left. \right\} - \frac{1+\nu}{E} \left\{ 2M^2 + (1-\nu)N^2 \right\} S_m C_n(Y) \\
 & + \frac{(1+\nu)^2}{E} MNC_m S_n(X) \left. \right] \tag{4}
 \end{aligned}$$

ここで、 $S_n[(\sigma_x)_{x=a}]$ 、 $S_n[(\sigma_x)_{x=0}]$ 、 $S_m[(\sigma_y)_{y=b}]$ 、 $S_m[(\sigma_y)_{y=0}]$ 、 $C_n(v_{x=a})$ 、 $C_n(v_{x=0})$ 、 $C_m(u_{y=b})$ 、 $C_m(u_{y=0})$ は応力および変位の積分変換値で、これらは任意の境界条件によって定まり、これらの意味は付録(A)に示す。

また、 $M = m\pi/a$ 、 $N = n\pi/b$ 、 $m, n = 1, 2, 3, \dots$ である。

なお、式中の u および v に関する積分値は、物体の移動を示す未知数で、全く応力には関係しない。

したがって、本解析ではこの結果を利用して曲げ試験用供試体の応力および変位の解析解を得ることとする。

いま、2点荷重の曲げ試験は図-2のような荷重形態であり、この場合の境界条件は式(5)から式(7)のようになる。

$$y = b \text{ で } \sigma_y = P_u(x), \quad \tau_{xy} = 0 \tag{5}$$

$$y = 0 \text{ で } \sigma_y = P_l(x), \quad \tau_{xy} = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 x = 0, a \text{ で } \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy}|_{x=0} = \tau_{xy}|_{x=a} = 0 \\
 v_{x=0} = v_{x=a} \tag{7}
 \end{aligned}$$

上記の境界条件を考慮し、積分変換値は次のように置く。

$$\left. \begin{aligned}
 S_n[(\sigma_x)_{x=0}] = S_n[(\sigma_x)_{x=a}] = 0 \\
 S_m[(\sigma_y)_{y=b}] = S_m[P_u(x)] \\
 S_m[(\sigma_y)_{y=0}] = S_m[P_l(x)] \\
 C_n(v_{x=a}) = C_n(v_{x=0}) = A_n \\
 C_m(u_{y=b}) = B_m, \quad C_m(u_{y=0}) = B_m'
 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

ここで、 A_n 、 B_m 、 B_m' は境界未知数であり、また $S_m[P_u(x)]$ および $S_m[P_l(x)]$ は、はり上面および下面に作用する荷重強度分布の積分変換値を表す。

したがって、変位成分 u および v は物体力を無視し、式(3)および(4)を式(8)を考慮して整

理すれば次の通りとなる。

$$u = -\frac{(1+\nu)^2}{2aE} \sum_m \frac{\cos Mx}{M} \left\{ \beta^p(My) S_m[P_u(x)] - \alpha^p(My) S_m[P_i(x)] \right\} + \frac{1}{2b} \sum_n \sin Ny \times \left[\left\{ F^{(o)}(Nx) - G^{(o)}(Nx) \right\} - \nu \left\{ F^{(c)}(Nx) - G^{(c)}(Nx) \right\} \right] A_n - \frac{1}{2a} \sum_m \cos Mx \left[\left\{ 2\beta^o(My) - (1+\nu)\beta^p(My) \right\} B_m - \left\{ 2\alpha^o(My) - (1+\nu)\alpha^p(My) \right\} B_m' \right] \quad (9)$$

$$v = \frac{1+\nu}{2aE} \sum_m \frac{\cos Mx}{M} \left[\left\{ 2G^{(o)}(My) + (1-\nu)G^{(c)}(My) \right\} S_m[P_u(x)] - \left\{ 2F^{(o)}(My) + (1-\nu)F^{(c)}(My) \right\} S_m[P_i(x)] \right] + \frac{1}{2b} \sum_n \cos Ny \left[2\left\{ \alpha^o(Nx) - \beta^o(Nx) \right\} - (1+\nu)\left\{ \alpha^p(Nx) - \beta^p(Nx) \right\} \right] A_n - \frac{1}{2a} \sum_m \sin Mx \left[\left\{ G^{(o)}(My) - \nu G^{(c)}(My) \right\} B_m - \left\{ F^{(o)}(My) - \nu F^{(c)}(My) \right\} B_m' \right] + v_0 \quad (10)$$

ここで、 α^p , β^p , α^o , β^o , $F^{(o)}$, $F^{(c)}$, $G^{(o)}$ および $G^{(c)}$ は Fourier 級数の無限級数和で、これらは付録(B)に示す。また、 v_0 は、 $v|_{x=a, y=0} = 0$ より得られる。

応力成分は、式(9)および式(10)を式(2)に代入することで得られる。その結果は以下に示す。

$$\frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{2aE} \sum_m \sin Mx \left[\beta^p(My) S_m[P_u(x)] - \alpha^p(My) S_m[P_i(x)] \right] + \frac{1}{2b} \sum_n N \cdot \sin Ny \times \left\{ \beta^p(Nx) - \alpha^p(Nx) \right\} A_n + \frac{1}{2a} \sum_m M \cdot \sin Mx \times \left[\left\{ 2\beta^o(My) - \beta^p(My) \right\} \overline{B}_m - \left\{ 2\alpha^o(My) - \alpha^p(My) \right\} \overline{B}_m' \right] \quad (11)$$

$$\frac{\sigma_y}{E} = -\frac{1}{2aE} \sum_m \sin Mx \left[\left\{ \beta^p(My) + 2\beta^o(My) \right\} \times S_m[P_u(x)] - \left\{ \alpha^p(My) + 2\alpha^o(My) \right\} S_m[P_i(x)] \right]$$

$$+ \frac{1}{2b} \sum_n N \cdot \sin Ny \left[-\left\{ \beta^p(Nx) - \alpha^p(Nx) \right\} + 2\left\{ \beta^o(Nx) - \alpha^o(Nx) \right\} \right] A_n + \frac{1}{2a} \sum_m M \cdot \sin Mx \times \left\{ \beta^p(My) \overline{B}_m - \alpha^p(My) \overline{B}_m' \right\} \quad (12)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{E} = \frac{1}{2aE} \sum_m \cos Mx \left[G^{(o)}(My) S_m[P_u(x)] - F^{(o)}(My) S_m[P_i(x)] \right] - \frac{1}{2b} \sum_n N \cdot \cos Ny \times \left\{ F^{(c)}(Nx) - G^{(c)}(Nx) \right\} A_n + \frac{1}{2a} \sum_m M \cdot \cos Mx \times \left\{ G^{(c)}(My) \overline{B}_m - F^{(c)}(My) \overline{B}_m' \right\} \quad (13)$$

ここで、 \overline{B}_m および \overline{B}_m' は、

$$\left. \begin{aligned} \overline{B}_m &= B_m - \frac{\nu}{E} \frac{S_m[P_u(x)]}{M} \\ \overline{B}_m' &= B_m' - \frac{\nu}{E} \frac{S_m[P_i(x)]}{M} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

であり、また境界未知数 A_n , \overline{B}_m , \overline{B}_m' は x, y について式(5)と式(6)の第2式および式(7)の第2式を用い、これらによる3元連立一次方程式を解くことで得られる。

(2) 表面の荷重強度分布と供試体自重

はり上面および下面に作用する荷重の分布について、はりが感温性の高い材料の供試体であり、また載荷部と支点部が丸鋼を用いていることから、この部分における荷重が集中荷重として作用しているとは考えにくく、むしろ図-2の(B), (C)のように幅 $2a'$ を持つ等分布あるいは放物線荷重が載荷しているとして解析した方が現実的である。このような解析は既に渡辺が行っており¹³⁾、本解析においてもこのような荷重強度分布を用いた。

まず、表面に作用する荷重が等分布であれば、はり上面における荷重強度分布の積分変換値は、

$$S_m[P_u(x)] = \frac{P(1-(-1)^m)}{Ma'} \sin Ma' \cos Ma \quad (15)$$

となり、放物線荷重であれば、

$$S_m[P_u(x)] = \frac{3P(1-(-1)^m)}{(Ma')^2} \left\{ \frac{\sin Ma'}{Ma'} - \cos Ma' \right\} \sin Ma \quad (16)$$

である。また集中荷重の場合は、式(15)において $a' \rightarrow 0$ の極限をとることで得られ、その結果は式(17)の通りとなる。

$$S_m[P_u(x)] = P(1-(-1)^m) \sin Ma \quad (17)$$

なお、はり下面の荷重強度分布 $S_m[P_i(x)]$ は式(15)、

表-1 境界のせん断応力 (放物線荷重)

x/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\tau_{xy} _{y=0}/q$	0.959	-0.003	-0.002	0.004	0.039	-0.725
$\tau_{xy} _{y=b}/q$	-0.811	0.015	0.002	-0.003	-0.003	0.372
y/b	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\tau_{xy} _{x=0}/q$	0.959	-0.053	-0.021	-0.010	0.022	-0.811
$\tau_{xy} _{x=a}/q$	-0.725	0.033	0.012	0.007	-0.005	0.372

表-2 荷重強度分布の違いによるの σ_x 比較

y/b	0	0.25	0.50	0.75	1
集中荷重	6.35716	2.97332	-0.16313	-3.13945	-5.44606
等分布荷重	6.35514	2.97400	-0.16180	-3.13886	-5.46782
放物線荷重	6.35830	2.97493	-0.16229	-3.14024	-5.46320
x/a	0	0.25	0.50	0.75	1
集中荷重	0	0.25012	-0.16048	0.20244	-0.16313
等分布荷重	0	0.26131	-0.15298	0.20426	-0.16180
放物線荷重	0	0.25722	-0.15574	0.20362	-0.16229

(上段は中央断面, 下段は中立軸の結果)

表-3 本解析結果と応力関数法の比較

(放物線荷重) [σ_x] $_{x=a/2}$

y/b	0	0.25	0.50	0.75	1
本解析結果	6.35830	2.97493	-0.16229	-3.14024	-5.46320
渡辺の方法	6.35641	2.97323	-0.16304	-3.13959	-5.44753

(16)および(17)における右辺の a_n を a_1 とすることで得られる。

一方, 3章(4)の数値計算例で詳述するが, 舗装用材料がアスファルト混合物のように感温性の高い材料の供試体の場合には, 自重による変形を考慮する必要があると考えられる。この場合の解析は, 応力関数法を用いた文献⁷⁾にも記されているが, 本解析法でも, 物体力 X と Y について $X=0$, $Y=\rho g$ として式(3)および(4)を整理することでこの場合の解が得られる。より簡単な方法としては, σ_y が式(18)の第1式のように $\bar{\sigma}_y$ で表され, この積分変換値 $\bar{S}_m\{\bar{P}_i(x)\}$ は式(18)の第2式の様になり, これを各変位および応力成分の $S_m\{P_i(x)\}$ と置き換えることで自重を考慮した一般式となる。なお, この場合の $\bar{S}_m\{\bar{P}_i(x)\}$ における P は $\rho g b a/2$ を付加することに注意する必要がある。

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y - \rho g (b - y)$$

$$\bar{S}_m\{\bar{\sigma}_y|_{y=0}\} = \bar{S}_m\{\bar{P}_i(x)\} = S_m\{P_i(x)\} - \rho g b \frac{1 - (-1)^m}{M} \quad (18)$$

3. 数値計算例

数値計算を実施するために与えた計算条件は, ポアソン比が $\nu=0.3$, はりサイズが $a=4b$, 載荷点および支点位置が $a_1=1.5b$, $a_2=0.5b$ (またはは

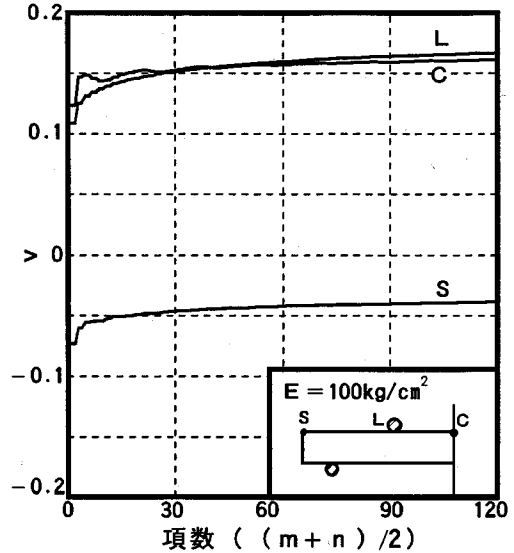


図-3 鉛直変位 v の収束状況 (放物線荷重)

$a_1=3b$, $a_2=b$)を基準とした。また等分布荷重や放物線荷重を用いた場合の a' は $0.005a$ とした。なお, 数値計算はパーソナルコンピュータ(PC9821-An)で実施し, この場合のマトリックス計算は m, n ともに120項とした。

(1) 計算精度の検討

計算精度は, 式(5)から(7)に示した境界条件を満足するかどうかについて行い, これには式(9)から(13)の変位および応力成分の式を用いる。

まず, 式(7)の第1式は基本的に満足されるが, 他の境界条件式は級数計算に制限がある場合には満足しにくい。表-1は放物線荷重が載荷された場合の上下左右の境界面における τ_{xy} の結果である。この結果より, はりの隅角部で他の値よりも大きい, 全体的には微少で, 式(19)を用いれば各辺におけるせん断応力の合力は小数第3位以降に値が現れる程度であり, 式(5)~(7)の第2式における境界条件は満足する。したがって, この程度の項数でも十分な精度が得られる。

$$\int_0^a (\tau_{xy})_{y=0} dx, \int_0^a (\tau_{xy})_{x=0} dy \quad (19)$$

表面の荷重強度分布は, 集中荷重, 等分布荷重および放物線荷重のいずれの荷重形態でもこの程度の項数では収束しづらく, 特に集中荷重の場合は, 文献⁷⁾にも示されているように, 載荷部や支点部分において応力集中が生じたりあるいは解が不安定となる。しかし, これより離れた部分では, 表-2に示す

表-4 各荷重強度分布の違いによる F_v の比較

x/a		0	0.125	0.250	0.375	0.500
$y=b$	集中荷重	-0.322	0.226	0.804	1.469	1.408
	等分布荷重	-0.341	0.211	0.785	1.439	1.393
	放物線荷重	-0.334	0.217	0.795	1.451	1.399
$y=0$	集中荷重	-0.332	0	0.797	1.245	1.401
	等分布荷重	-0.339	0	0.782	1.230	1.386
	放物線荷重	-0.337	0	0.788	1.236	1.393

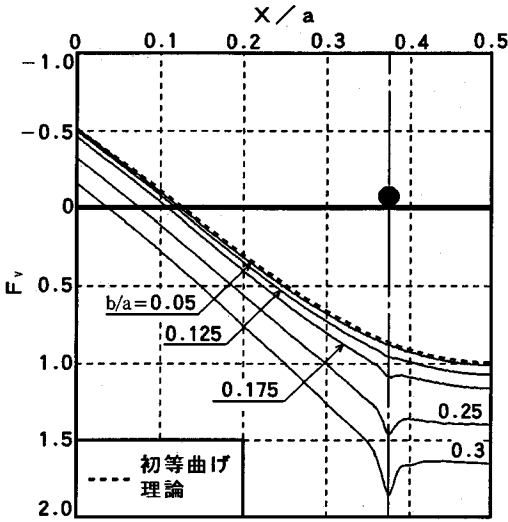


図-4 表面たわみの分布

ように、荷重強度分布に関するいずれの関数を用いた場合でもほぼ近似した結果となる。なお、渡辺によって行われた結果との比較を表-3に示したが、本解析結果との差は最大でも約0.3%以内である。

本解析で用いた有限Fourier変換による方法は、変位成分を最初に求めるものであるから、応力成分に比べ収束の度合いは、比較的少ない項数で収束する。図-3は変位成分 v について、図中に示したはり上面の中央部(C)、載荷部(L)および偶角部(S)の収束状況を調べたものである。この結果からも、120項の計算で収束性の良好な結果が得られている。ただし、後述する変位の計算結果からもわかるように、変位成分は応力成分のように載荷点において解が不安定になるような現象は示さない。

(2) 表面たわみの分布

表-4は、荷重強度分布の違いが表面たわみに与える影響を調べた結果である。ここで用いる表面たわみ F_v とは次式により得られた値で、これは弾性解析により計算された鉛直方向変位 v を初等

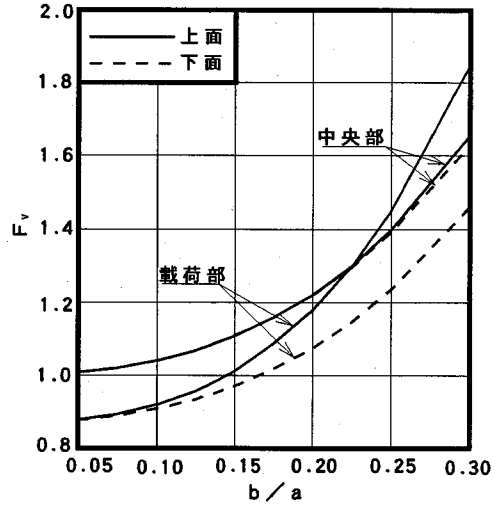


図-5 中央部および載荷部の表面たわみ (サイズ変化)

曲げ理論より導かれたはり中央部の変位 d で除したものである。

$$F_v = \frac{v}{d} = \frac{2Eb^3}{P(a_n - a_1)\{3a_1^2 - 4(a_n - a_1)^2\}} \cdot v \quad (20)$$

この結果より、表面たわみはその差が最も大きい載荷点直下において、約3%と若干の差が認められるものの、全体的には荷重強度分布の違いによる表面たわみの差は少ないといえる。ただし、支点あるいは載荷部では丸鋼を用いると仮定すれば、これらの部分での荷重形態は、放物線荷重で近似できるものと考えられるので、以下の計算はこの荷重強度分布を用いた計算結果を示す。

図-4は、はり長さが一定で高さを変化させた場合のはり上面における表面たわみの分布を調べたものである。なお、図中には初等曲げ理論による表面たわみを破線で示した。これより、はり高さがスパンに比べ非常に小さいとき、例えば b/a が約 $1/20$ の場合においては、弾性解析したものと初等曲げ理論により計算したたわみに差異はないが、はり高さが高くなると、両者の結果に顕著な違いが現れる。特に、載荷点直下のたわみには載荷による局部変形の影響が現れており、その大きさははり高さが高くなるにつれて増加する。このはり高さの影響について図-5は、はりの中央部および載荷部の鉛直方向における上面および下面のたわみをはり高さを変化させて求めた結果である。これより、いずれの箇所においてもはり高さの増加に対し、たわみは増し、初等曲げ理論より得られたものとの差が顕著となる。また、上面と下面のたわみの差は中央部ではあまり差異は認められないが、載荷部でははり高さの増加とともに

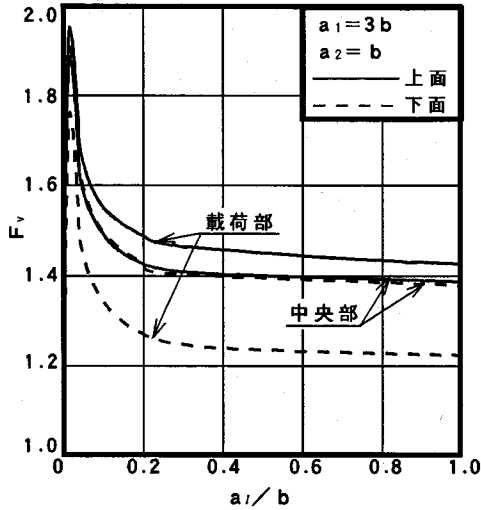


図-6 中央部および载荷部の表面たわみ
(張り出し変化)

にその差が大きくなる。これは局部変形が増加していることを意味するもので、特に、はり上面では、局部変形の影響ではり高さが高くなると中央部のたわみより载荷部のたわみの方が大きくなる。ただし、下面側ではり高さが高くなっても载荷部の方が中央部のたわみより大きくなるような現象はなく、たわみの差ははり高さの変化してもあまり変化しない。なお、局部変形についてこのような数値計算を行った例は見あたらない。

以上の結果より、曲げ試験において変位の測定結果を利用してひずみ等の計算を行う場合には、供試体サイズが大きく影響することとなる。

図-6は、はりの中央部および载荷部の鉛直方向における上面および下面のたわみについてはり高さを一定とし、張り出し部を変化させて調べたものである。これより、張り出し部がはり高さの2%と非常に短い範囲でたわみは急激に増加し、その後減少するが、張り出し部がはり高さの40%以上になるとほぼ一定となる。なお、初等曲げ理論では張り出し部が変化しても中央部のたわみは一定である。したがって、張り出しが少ない場合のたわみの急激な増減は弾性解析による計算結果の特徴であり、特にたわみの急激な増加は張り出し部分に分散された応力が支間部分の応力と同一方向のモーメントとなっていることを意味すると考えられる。以上の結果より、本解析モデルのようにはり長さに比べてはり高さの大きい供試体を用いる場合、張り出し部がはり高さに比べ40%未満であれば、载荷によるたわみは張り出しの影響を受ける。したがって、载荷試

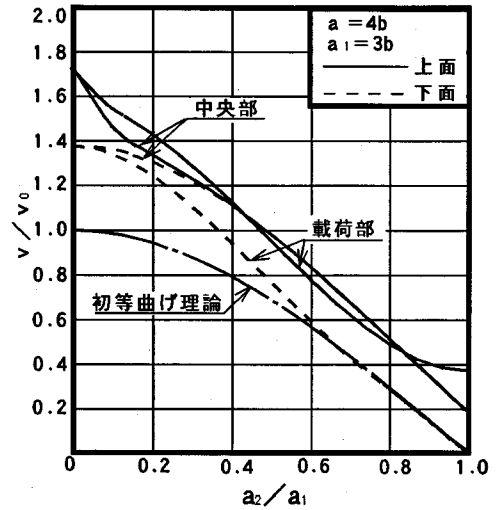


図-7 中央部および载荷部の表面たわみ
(载荷点位置変化)

験において張り出しが少ない場合には初等曲げ理論によって計算される下面ひずみと実測ひずみには大きな差が生じると考えられる。

図-7は、はりサイズおよび支点距離(a_1)が一定の場合、载荷点距離(a_2)の違いがたわみに与える影響を調べたものである。なお、中央部および载荷部のたわみは本解析による変位(v)を初等曲げ理論による中央载荷時の载荷点における変位(v_0)で除したものである。これより、载荷点距離が増加すれば、変位は減少し、载荷点距離が短いものほど初等曲げ理論との差が顕著となる結果となっており、载荷位置の違いが変位に与える影響は大きいといえる。また、上面における中央部と载荷部のたわみを比較すると、载荷点距離が支点距離に対し、約0.45より小さいかあるいは0.85より大きい場合には载荷部のたわみが中央部より大きくなる現象がみられ、载荷点距離の違いによっては局部変形の影響が大きくなる場合がある。さらに、上面および下面側のたわみに着目すれば、中央部では载荷点距離が短い場合に局部変形の影響を受けて上面側と下面側との間にたわみの差が現れるが、载荷部では载荷点距離の違いに関係なくたわみに大きな差が生じる。ただし、このような傾向は、はり高さが高い場合に顕著になることが図-5の結果から容易に予想できる。したがって、载荷点距離の違いは、初等曲げ理論で計算される下面ひずみと実測ひずみとの差に影響を与えると推察できる。

なお、中央载荷によるたわみについて、文献⁷⁾によればはりに働く集中力の問題として、中央に集中

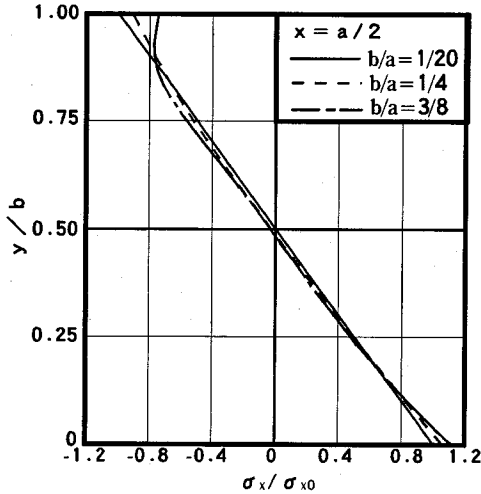


図-8 中央断面における σ_x の分布

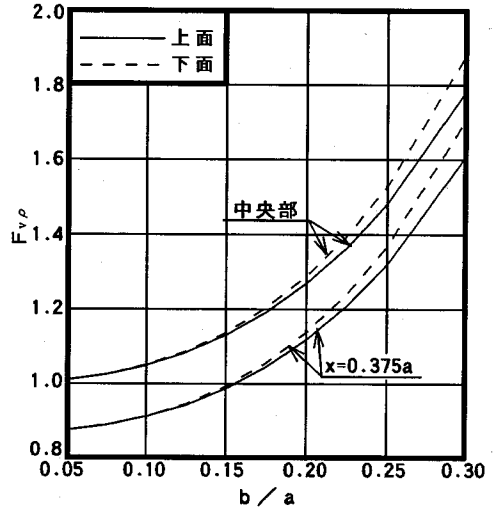


図-9 自重による表面たわみ

荷重が働く単純ばりを例に、多くの研究者が実験あるいは解析を行っている。その結果、荷重直下の変位は $\nu=0.3$ として次式を示している。なお、式中の記号は本論文で使用しているものに置き換えている。

$$\delta = \frac{Pa^3}{4Eb^3} \left\{ 1 + 2.85 \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 0.84 \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right\} \quad (21)$$

これを $a/b=1/4$ として本計算結果と比較すれば、 δ/ν は1.014という結果であった。

(3) 水平方向応力

図-8は、はり中央部の鉛直面における水平方向応力(σ_x)の分布を調べたものである。なお、図中の値(σ_x/σ_0)は、弾性計算された応力を次式で表される $y=0$ のときの初等曲げ理論により導かれた応力で除したものである。

$$\sigma_{x0} = \frac{6P}{b^2} (a_2 - a_1) \quad (22)$$

これより、はり高さがスパンの1/20と非常に小さいときは、 σ_x/σ_0 は上下面で約-1.0から1.0とほぼ直線であり、弾性解と初等曲げ理論との差異はないといえるが、はり高さがスパンに比べ1/4以上と大きくなると上下面の応力に差が現れてくる。特にこのような傾向ははり上面側で顕著である。このような計算結果は渡辺ら¹³⁾によっても確かめられている。しかし、曲げ試験において、はり下面側の応力とひずみの関係から弾性係数を推定する場合、応力に限っていえば、この程度の差は推定される舗装用混合物の弾性係数に与える影響は少ないと予想される。

(4) 供試体自重

繰り返し曲げ試験では片振りあるいは両振りの載荷が考えられる。例えば荷重制御のもとで試験を実施した場合、試験装置に現れる実際の荷重は、載荷による荷重と自重との合力と考えられる。この場合、両振りによる繰り返し載荷では供試体下面からも荷重が加えられるので、1サイクル当たりの実際の荷重には自重が相殺されて自重によるたわみの影響は無視できるものと考えられるが、片振りによる繰り返し載荷では自重による影響は残る。

ASTMにおける応力や変位の公式⁶⁾では、特に自重の影響を考慮していないが、各研究機関で実施されているアスファルト混合物の回復弾性係数試験や疲労試験で用いられている温度条件を想定した場合、試験温度が高い条件での曲げ試験において設定下面ひずみとなるように載荷すれば、実際の荷重に対する自重の割合は大きくなる。文献¹⁵⁾によれば曲げ試験を用いたクリープ試験で、この影響を考慮しているものもある。本解析においても自重を考慮した解析を実施し、これがたわみに与える影響を調べた。なお、以下の計算結果ははりの自重のみによる変位の結果を用いている。

図-9は、はり高さが変化した場合の、中央部および載荷部の鉛直断面におけるたわみの変化を示した。なお、この場合のたわみは次式より求めた。これは、本解析結果による変位 v_0 を初等曲げ理論によるはり中央部の変位 d_0 で除したものである。

$$F_{v,p} = \frac{v_p}{d_p} = \frac{32Eb^2}{\rho g(a-2a_1)^4 \{5-24a_1^2/(a-2a_1)^2\}} \cdot v_0 \quad (23)$$

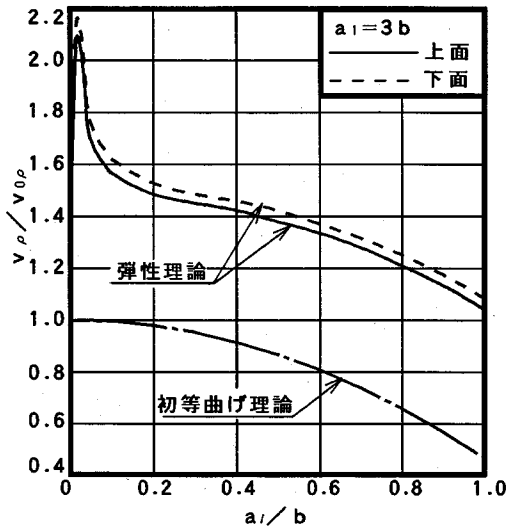


図-10 自重による表面たわみ（張り出し部変化）

これよりたわみは、はり高さの増加とともに大きくなり、初等曲げ理論と弾性解析により得られた変位の差が大きくなる。また、中央部あるいは載荷部の鉛直断面における上下面の変位は、上面に比べ下面側での変位が大きく、その差ははり高さの増加とともに顕著に現れる。したがって、供試体の形状にも影響されるが材料定数の推定において下面の引張り、ひずみを用いる場合には、供試体高さの高いものほど自重による影響は無視できないと考えられる。

図-10は、張り出し部の長さが変化した場合のたわみについて中央部の鉛直断面における変化を調べたものである。なお、この場合のたわみは、本解析による変位(v_p)を張り出しが無い場合の初等曲げ理論による中央部の変位(v_{0c})で除したものである。これより、張り出し部がはり高さの約2%と非常に小さい範囲でたわみは急激に増加し、張り出し部の増加とともにたわみが減少する傾向を示す。 a_1/b が小さい場合のたわみの増加は、張り出し部分の自重が支点において支点間の自重と同一方向のモーメントとなっていることを意味すると考えられるもので、これは弾性解析における特徴といえる。ただし、このような傾向は、はり高さが高いものほど顕著となることが予想できる。

なお、張り出し部の無い自重による弾性解析は、文献⁷⁾でも応力関数法による方法で求めた結果を示しているが、これと本解析結果との比は、ポアソン比を $\nu=0.3$ として0.995とほぼ一致している。

4. 結論

本研究では、曲げ試験に用いる舗装用混合物の供試体について有限Fourier変換による2次元弾性解析を実施し、主に載荷による変形特性と初等曲げ理論によるたわみとの違いを調べ、材料定数の推定に影響を与える解析上の要因を明らかにすることができた。本論文の内容をまとめると以下の通りとなる。

- 1) はり長さが一定の場合、はり高さの違いが表面変位に与える影響は大きい。特に、はり長さに対しはり高さが15%以上であれば、初等曲げ理論により得られた変位との差が中央部で10%以上生じる。また、この場合載荷部において局部変形を生じるようになり、上面側と下面側の変位の差は顕著となる。
- 2) 載荷点距離の違いが初等曲げ理論による変位との差に与える影響は大きく、特に供試体形状にもよるが、載荷点距離が極端に短い場合あるいは長い場合に局部変形の影響を受ける。
- 3) 張り出し部の長さが変位に与える影響は大きく、特にはり高さの40%以内の張り出しを有するはりの変位は、それよりも長い張り出しを有するものと比べ変位の差が大きい。
- 4) 自重による変位の解析において、はり高さが表面変位に与える影響を調べた結果は、載荷重による解析結果とほぼ同傾向となり、供試体形状や張り出し長さの違いが変位に与える影響は大きい。
- 5) 表面の荷重形態について3種類の荷重強度分布を設定した結果、荷重形態の違いが表面変位に与える影響は少ない。また、応力成分の解析結果では、はり長さが高さの4倍以内であれば、はり形状の違いがはり下面の応力に与える影響は少ない。

なお、繰り返し載荷試験を実施してアスファルト混合物の材料定数を推定する場合、推定時に必要な弾性復元変位や変位の振幅などの測定が困難な試験温度では、本解析結果の適用は難しい。また、数値計算例で示した供試体形状よりも高さに対して極端に大きい供試体を用いて載荷を行う場合には、はり全体のたわみに対し局部変形の占める割合が非常に大きくなることが本解析結果から容易に予想でき、このような形状を有する供試体の繰り返し曲げ試験や疲労試験への適用の可否については今後検討する必要があると考えられる。

付録¹⁶⁾

(A) 積分変換

$f(x)$ が $0 \sim a$ の区間で連続であるとき、 $f(x)$ の Fourier 変換は次式で表される。

$$S_m[f(x)] = \int_0^a f(x) \sin Mx dx$$

$$C_m[f(x)] = \int_0^a f(x) \cos Mx dx$$

(B) Fourier 級数の無限級数和

$$\alpha^p = P^{(1)} + P^{(2)}, \alpha^q = Q^{(1)} + Q^{(2)}$$

$$\beta^p = -P^{(1)} + P^{(2)}, \beta^q = -Q^{(1)} + Q^{(2)}$$

$$\left. \begin{matrix} F^{(1)} \\ G^{(1)} \end{matrix} \right\} = \pm \left\{ (\phi^{(1)} + \psi^{(1)}) \pm (\phi^{(2)} + \psi^{(2)}) \right\}$$

$$\left. \begin{matrix} F^{(2)} \\ G^{(2)} \end{matrix} \right\} = \pm \left\{ (\phi^{(1)} - \psi^{(1)}) \pm (\phi^{(2)} - \psi^{(2)}) \right\}$$

$$\left. \begin{matrix} P^{(1)}(\xi r) \\ P^{(2)}(\xi r) \end{matrix} \right\} = \frac{\xi \{ r \operatorname{sh} \xi(l-r) \pm (l-r) \operatorname{sh} \xi r \}}{\operatorname{ch} \xi l \pm 1}$$

$$\left. \begin{matrix} Q^{(1)}(\xi r) \\ Q^{(2)}(\xi r) \end{matrix} \right\} = \frac{\operatorname{ch} \xi(l-r) \pm \operatorname{ch} \xi r}{\operatorname{ch} \xi l \pm 1}$$

$$\left. \begin{matrix} \Phi^{(1)}(\xi r) \\ \Phi^{(2)}(\xi r) \end{matrix} \right\} = \frac{\operatorname{sh} \xi(l-r) \mp \operatorname{sh} \xi r}{\operatorname{ch} \xi l \pm 1}$$

$$\left. \begin{matrix} \Psi^{(1)}(\xi r) \\ \Psi^{(2)}(\xi r) \end{matrix} \right\} = \frac{\xi \{ r \operatorname{sh} \xi(l-r) \mp (l-r) \operatorname{ch} \xi r \}}{\operatorname{ch} \xi l \pm 1}$$

上式中、 $\operatorname{sh} x$ および $\operatorname{ch} x$ はそれぞれ双曲線関数 $\sinh x$ および $\cosh x$ を表す。また、 ξ が M であれば r は y に l は b になり、 N であれば r は x に l は a となる。

参考文献

- 1) 土構造物および基礎委員会、舗装機能の評価に関する研究小委員会：舗装機能の評価技術の現状と将来、土木学会論文集，No.472/V-20， pp.13-28， 1993.
- 2) (社)日本道路協会：アスファルト舗装要綱， pp. 303-307， 1992.
- 3) 上浦正樹，丸山暉彦，姫野賢治，阿部長門：鉄道貨物ヤードにおけるアスファルト舗装設計に関する研究，土木学会論文集，No.520/V-28,pp.47-54， 1995.

- 4) アスファルト舗装技術研究グループ：アスファルト舗装技術の変遷，アスファルト，No.155/Vol-30， pp. 5-21， 1988.
- 5) R. ハース・R. ハドソン，(北海道土木技術会，舗装研究委員会訳)：舗装マネジメントシステム， pp. 247-259， pp.184-188， 1989.
- 6) ASTM.D790-92: Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials, *Annual book ASTM Standards*, 1994.
- 7) S. P. ティモシェンコ・J. N. グーディア(荒川宗夫，坂口昇，森哲朗 共訳)：弾性論(第3版)， pp.46-51， pp.117-125， 1980.
- 8) 桐山孝晴，中村俊行：アスファルト混合物の疲労破壊基準について，土木学会第48回年次学術講演会，V-389， pp.804-805， 1993.
- 9) 間山正一：各種舗装用混合物の力学性状に関する研究(第5報)，主として混合物の動的性状および疲労性状，石油学会誌，Vol.23, No.4， pp.248-255， 1980.
- 10) 内田精一，安藤政浩，溝淵優：表層用大粒径アスファルト混合物に関する2,3の特性，舗装，Vol.24，No.10, pp.3-9, 1989.
- 11) 林正樹，近藤羊一，谷井貞夫，四辻勝：大粒径アスファルト舗装を中心とした特殊舗装の試験施工について，舗装，Vol.29, No.9, pp.23-29, 1994.
- 12) Raville, M.E. and F.J. McCormick: Stress in Beams Subjected to Central and Third-Point Loading. *Proc. ASTM* 59, pp.1230-1236, 1959.
- 13) 渡辺正平，岸武保：脆性材料の梁の3等分載荷による曲げ試験での亀裂発生位置に関する弾性解析による考察，農業土木学会論文集，第163号， pp.19-27， 1993.
- 14) 能町純雄：平板および平面弾性問題に対する有限なフーリエ変換の応用，室蘭工業大学研究報告，第2号第2巻， pp.123-141， 1956.
- 15) 張肖寧，笠原篤：アスファルト混合物の一次元非線形粘弾性構成方程式に関する研究，土木学会論文集，No.520/V-28， pp.25-33， 1995.
- 16) Nomachi, S.G.: One Method of Solving Stress Problem in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms (Part I), *Memoris of Muroran Institute of Tech.* Vol.3, No.3, p.91-115, 1960.

(1995. 11. 6 受付)

ELASTIC ANALYSIS OF PAVEMENT MATERIALS WITH THE BENDING TEST BY TWO POINTS LOADING

Yuzou KURIYAGAWA, Shyouichi AKIBA, Tetsukazu KIDA and Sumio G. NOMACHI

This paper presents analytical method of the two dimensional deformation problem regarding pavement material for the bending test of two point loading by means of the finite Fourier transforms. Then the various beam shapes and loading conditions corresponding to the pavement material test were numerically calculated and compared with the beam theory.

The above comparison shows that more effort would be needed in test method in finding out the mechanical properties of pavement material.