新らしい平均値法公式およびそれに基づく流量算定式の誘導

正員　春日屋伸昌*

INDUCEMENT OF A NEW MEAN VALUE METHOD AND CALCULATING FORMULAS FOR DISCHARGE IN NATURAL STREAMS

By Nobumasa Kasugaya, C.E. Member

Synopsis : The author induces a new mean value method to be most effectively applied to the continuous curve which intersects a horizontal axis at both ends of defined interval. According to this new method, some calculating formulas for discharge in natural streams are obtained. When we apply these formulas to stream gaging, the smallest number of the verticals, consequently of the measuring points, may be sufficient. Therefore, we can measure the most accurate value of discharge, because we can prolong the period of velocity measurement at every points to eliminate the effect of pulsations of moving water, and moreover the shortening of the total period of gaging makes the effect of changing stage as little as possible.

要　旨　本論文では，区間の両端において函数値がいずれも 0 となる連続曲線に対して最も有効な新らしい平均値法公式を誘導する。この公式を上述の曲線に適用すれば，従来最も高い近似度を有するとされていた Gauss の公式を適用するのにくらべて，更に近似度が 2 つだけ高くなる。この新らしい平均値法公式から自然河川に適用される流量算定式が導かれる。この算定式を用いれば，水面幅にそつてとるべき垂直線数したがつて全観測点数をできるだけ少なくすることができ，水位の変動の流量に及ぼす誤差が偶然誤差以内と考えられる時間の範囲内で各観測点での測定時間を延長し，流れの脈動による誤差を僅小にして，全体として正確な結果がえられることを述べる。

1. まえがき

流速計による自然河川での流量測定における課題は，いかにして流れの脈動と水位の変動とによる影響を最小にして正確な流量を測定するかにある。各観測点での流れの脈動は十分な測定時間を要求し，水位の変動は全測定時間の短縮を要求する[1]。従来の流量測定法は，それが総和法であるにしろ図解法であるにしろ，精度の良否は水面幅にそつてとるべき垂直線の本数の多少にあるという考えに基づいている。U.S. Geological Survey[2]では，水面幅が 400 ft で河底曲線の滑らかな水路において相隣る垂直線は 15～20 ft の間隔とし，1 000 ft の水路では 40 ft の間隔とすべきことを定め，きわめて小さい水路の場合を除き，少なくとも 20 の小区間にわけ，しかも各部分流量（相隣る垂直線間の面積すなわち部分面積に，その小区間の幅の中央における垂直線にそつての縦平均流速をかけたもの）は全流量の 10%，できれば 5% を越えないようにすべきであると提唱している。日本では総理府令第 75 号の“水位及び流量調査作業規程準則”によつて[3]，垂直線の数が定められた。それによると，垂直線の数は水面幅によつて異なり，水面幅が 20 m 未満のとき 5 点，20～100 m 未満のとき 10 点，100～200 m 未満のとき 15 点，200 m 以上のとき 20 点を標準とし，精密測定の場合には上の 2 倍とすべきであつて，かつ，垂直線は河底曲線が急変するところで密に，そうでないところでは粗にするように指示されている。

ところで，精密な測定をおこなうために垂直線の本数を増すときには，精度の均衡上，縦平均流速を測定するために垂直線にそつてとる観測点の数も増すべきであつて，けつきょく全観測点数はいちじるしく多くならざるをえない。しかるに，流量測定の目的は水位流量曲線の設定にあるのであるから，水位が急激に変動しつつあるような時間内で最小の所要時間をもつて流量測定を完了することが最も大切である[4]。

この要求に対して従来とられてきた方法は，垂直線数を下げることは精度を落すこととなるため，もつぱら各垂直線にそつてとるべき観測点の数を下げることと各観測点での測定時間をきわめて短くすることとであつた。

* 中央大学助教授，工学部土木工学教室

前者に対しては，筆者が前論文[5]で述べたように，Gauss の平均値法から誘導される2点法または平均値3点法を用いれば普通の場合には十分満足すべき結果がえられ，水制などのために極端に流れが乱されているような場合には平均値4点法を用いればよい（2点法は従来の2点法と同じであつて 垂直流速曲線が高々3次の 有理整式まで誤差をともなわない。平均値3点法と平均値4点法とは従来の3点法や4点法とは異なつた公式で，それぞれ高々5次，7次の有理整式まで誤差をともなわない。従来の3点法と4点法とはまつたく無価値である）。次に，各観測点での測定時間を短縮することは精度の上から決して好ましいことではない。すなわち，流れには脈動がともない，ある点での流速は時間的平均値を中心にして上下し，十分な時間を要して測定をおこなわなければ正確な時間的平均流速を求めえないことが，L.C. Sabin の St. Claire 河での実測[6] や W.C. Unwin の Thames 河での実測[7] その他によつて明らかにされている。また，近年 Reynolds による乱流の理論的取り扱いが確立されてより，Prandtl, Tollmien, Taylor, Kármán などによつて大いに発展せしめられた乱流の基本的見解は，乱流の機構を1つの基本的な流れに確率的法則に従つて変動する流れが付加するものとするところにある。以上の結果から考えても，脈動による誤差を僅小にするためには，整正な流れの断面においてすら各観測点での測定時間をある程度長くすべきで，A.H. Gibson[8] はこれを5分以下としないように，できるならば 6～10 分とすることが望ましいと述べている。

そこでもし，水位にまつたく変動がなくかつ時間・労力・費用のかさむのを 意に介さなければ，上述の2点法または平均値3点法を用いて各観測点での 測定時間を数分とし，多くの垂直線について測定をおこなえばよいわけであるが，水位の変動による流量の変化は 測定時間の延長を許さないのである。筆者が利根川の資料につき，水位の変動は洪水波の伝播によるものとし，不定流の場合の平均流速公式[9]を用いて理論的な流量変化率を求めてみたところ，最も普通の水位図に対してすら1時間に 2.5% も変動することがわかつた（流量変化率は水位図が下に凸に上昇または上に凸に減少するとき大きくなる可能性がある）[10]。したがつて，1時間以上の経過時間に対し 5% あるいはそれ以上の変動の起りうることがうなずけよう。

いま，利根川のように水面幅が 240 m もある河川で総理府令の規準を用いると，垂直線数は 20 本が標準となり精密測定の場合には 40 本としなければならない。縦平均流速を求めるための各垂直線当りの観測点数を平均2つとしても，全観測点数は 40～80 点となり，各観測点での流速測定時間を3分としても，全観測時間は 2～4 時間となる。更に，流速計を上下させるための時間や垂直線から次のそれへと移行する時間など（これらは流速測定時間の約5割と考えられる）を加えると，観測時間は 3～6 時間となり，たとえ2台の流速計を用いて両岸より同時に測定を実施するとしても，水位の変動による誤差が偶然誤差以内と考えられるほど短時間とはなりえない。もし，各観測点での測定時間を5分以上とすれば，従来の方法では到底流量測定を実施することは不可能である。

脈動による誤差と水位の変動による誤差とはその結果が検証しえなかつたため，とかく等閑視されてきたようである。これら2つの誤差のうち，脈動による誤差は前述のようにある 平均値の上下に正負の符号をとつて現われてくるから，1本の垂直線について2，3点の観測点を設けしかも1点での測定時間を5分前後とすれば，これらの誤差は正負相殺して結果には大きな 誤差をおよぼさ ない であろう。これに反して水位の変動による誤差は，偶然にも測定時間中に 水位の上昇と下降とが連続して起る場合でない限り，相殺する可能性のないものである。この点からしても全観測点数をできるだけ 減少させて水位の変動による 誤差の介入を僅小にしなければならないと考えられる。

垂直線にそつてとるべき合理的な 観測点の数とその位置および 縦平均流速算定式については前論文で述べたから，本論文では，なるべく少ない垂直線数で 正確な流量測定をおこないうるように，まず新らしい平均値法公式を誘導し，次にそれを応用して垂直線の数とその位置および流量算定式を導くこととする。

2. 新らしい平均値法による流量算定式の誘導

水面幅にそつてとるべき垂直線の本数とその位置および流量算定式を導くためには Gauss の平均値法を用いれば一応その目的が達せられる[11]。

Gauss の平均値法の原理は次のとおりである。区間 $[a,b]$ において連続な函数 $y=f(x)$ を考える。いま，

$$x=\{(b+a)+(b-a)t\}/2 \quad\cdots\cdots(a)$$

によつて，変数 x を区間 $[-1,\ 1]$ で定義される変数 t に変換するとき，上の連続函数が $y=g(t)$ で表わされるものとする。函数 $y=g(t)$ の区間 $[-1,\ 1]$ での平均値 M は，

$$M=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \quad\cdots\cdots(b)$$

さて，この M の値が区間 $[-1,\ 1]$ 内に適当にとつた n 個の座標点 t_i に対する函数値 y_i と n 個の適当な定

係数 R_i との積 R_iy_i の総和に近似的に等しくなるように，すなわち，次の式，

$$M=R_1y_1+R_2y_2+\cdots+R_ny_n=\sum_{i=1}^{n}R_iy_i \quad\cdots\cdots\text{(c)}$$

が近似的に成り立つように，t_i および R_i の値を定めよう。$g(t)$ を Maclaurin の級数で展開したものを，

$$g(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_mt^m+\cdots\cdots \quad\cdots\cdots\text{(d)}$$

とし，これを (b) 式に入れて項別に積分すれば，

$$M=a_0+(a_2/3)+(a_4/5)+\cdots+\{a_{2r}/(2r+1)\}+\cdots\cdots \quad\cdots\cdots\text{(e)}$$

また，t_i における函数値 y_i は (d) 式より，

$$y_i\equiv g(t_i)=a_0+a_1t_i+a_2t_i^2+\cdots+a_mt_i^m+\cdots\cdots \quad\cdots\cdots\text{(f)}$$

(f) 式を (c) 式に入れれば，

$$\begin{aligned}M&=\sum_{i=1}^{n}R_i(a_0+a_1t_i+a_2t_i^2+\cdots+a_mt_i^m+\cdots)\\&=a_0\sum_{i=1}^{n}R_i+a_1\sum_{i=1}^{n}R_it_i+a_2\sum_{i=1}^{n}R_it_i^2+\cdots+a_m\sum_{i=1}^{n}R_it_i^m+\cdots\cdots\end{aligned} \quad\cdots\cdots\text{(g)}$$

(e) 式の右辺と (g) 式の右辺とを等しいとおいて，a の係数をくらべれば，次の連立方程式がえられる。

$$\left.\begin{array}{ll}R_1+R_2+\cdots+R_n=1, & R_1t_1+R_2t_2+\cdots+R_nt_n=0\\ R_1t_1^2+R_2t_2^2+\cdots+R_nt_n^2=1/3, & R_1t_1^3+R_2t_2^3+\cdots+R_nt_n^3=0\\ R_1t_1^4+R_2t_2^4+\cdots+R_nt_n^4=1/5, & R_1t_1^5+R_2t_2^5+\cdots+R_nt_n^5=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} \quad\cdots\cdots\text{(h)}$$

一般に，

$$\sum_{i=1}^{n}R_it_i^m=\begin{cases}0 & (m：奇数)\\ 1/(m+1) & (m：0\text{ または偶数})\end{cases} \quad\cdots\cdots\text{(i)}$$

さて，(h) または (i) の方程式の数は一般に無限であるから，これらを全体として解くことはできない。そこで，Gauss は t_i と R_i との合計 $2n$ 個の未知数を解くために，(h) の初めから $2n$ 個の方程式を連立で解いてこれらの値を定めた。したがつて，根としての t_i,R_i は (h) の初めから $2n$ 個の方程式を満足するが $2n+1$ 番目の方程式，すなわち，$\sum_{i=1}^{n}R_it_i^{2n}=1/(2n+1)$ を満足しない。ゆえに，Gauss の平均値法公式は，$y=g(t)$ が t に関して $2n-1$ 次の有理整式あるいは $y=f(x)$ が x に関して $2n-1$ 次の有理整式ならばまつたく誤差をともなわない。すなわち，Gauss の平均値法公式の近似度は $2n-1$ である。

さて，Gauss の公式は (h) の連立方程式を解くにあたり，t_i,R_i になんら条件を設けずに未知数と同じ数の方程式をとつてこれらの値を定めたのである。もし，t_i,R_i の少なくともどちらかにある条件を設けるとそれだけ方程式の数が減つて近似度が悪くなるのは当然である。たとえば[12]，Newton-Cotes は t_i を等間隔に R_i は $R_1=R_n$，$R_2=R_{n-1}$，……というように対称的にとつたため，近似度は n が偶数ならば $n-1$，奇数ならば n となつた。Maclaurin は区間を n 等分して各小区間の中点に t_i をとつたため，近似度は Newton-Cotes と同じになり，Tschebyscheff は $R_1=R_2=\cdots=R_n=1/n$ としたため，近似度は n が偶数ならば，$n+1$，奇数ならば n となつた。このように，t_i,R_i に条件を設けて導かれた上記の各公式の近似度がはるかに Gauss のそれより劣つたのは当然で，一般の函数に対しては，Gauss の公式は最も精度の高いものである。

そこで，筆者はかつて流量測定にこの Gauss の公式を用いることを考えて，水面幅にそつてとるべき垂直線の数とその位置および流量算定式を導いた[11]。ところで，自然河川においては，一方の岸に原点を，水面幅 b にそつて x 軸をとると，河底曲線，横断流量曲線はいずれも $x=0$ および $x=b$ でその縦距の値が 0 となる。そこでこのような特殊な函数すなわち区間の両端において函数値がいずれも 0 となるような函数に対しては，Gauss の平均値法公式を用いるよりも，そのような条件をあらかじめ考慮して誘導した平均値法公式を用いる方が近似度が高くなるであろう。本節では，まず，このような平均値法公式を誘導することとする。

さて，区間の両端において函数値が 0 となるという 2 つの条件を満足する函数を仮定して平均値法の原理を適用する代わりに，n 個の座標点 t_i のうち $t_1=-1$，$t_n=1$ という 2 つの条件を設け，後の $n-2$ 個の t_i と n 個の R_i とにはなんらの条件も設けないで，(h) の初めから $2n-2$ 個の方程式を連立で解いても結果は同じである。なぜならば，後者の方法で求めた結果を区間の両端で横軸を切る曲線に適用すると，$t=\pm1$ における函数値はいずれも 0 であるから，計算式中にこれらの座標点に対応する項を含まず，したがつて，2 つだけ余分な座標点を区域の中間にとることができ，合計 n 個の座標点が，前者の方法で求められる n 個の座標点とその値が等しくなるからである。

次に，このような考えに基づいて新らしい平均値法公式を誘導しよう。いま，(h) において $t_1=-1$，$t_n=1$ と

おけば，

$$\left.\begin{array}{ll}R_1+R_2+\cdots+R_{n-1}+R_n=1, & -R_1+R_2t_2+\cdots+R_{n-1}t_{n-1}+R_n=0\\ R_1+R_2t_2^2+\cdots+R_{n-1}t_{n-1}^2+R_n=1/3, & -R_1+R_2t_2^3+\cdots+R_{n-1}t_{n-1}^3+R_n=0\\ R_1+R_2t_2^4+\cdots+R_{n-1}t_{n-1}^4+R_n=1/5, & -R_1+R_2t_2^5+\cdots+R_{n-1}t_{n-1}^5+R_n=0\\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{j})$$

さて，ここで根の対称性を考慮に入れる。すなわち，n が偶数ならば $t_2=-t_{n-1}$, $t_3=-t_{n-2},\cdots$; $R_1=R_n$, $R_2=R_{n-1},\cdots$ であつて，n が奇数ならば中央の根 $t_{(n+1)/2}$ は 0 である。ゆえに，(j) の方程式中，右辺が 0 の方程式はすべて成立するから，方程式の解法にはこれらをはぶくことができる。(j) の最初の式より，

$$R_1+R_n=1-(R_2+R_3+\cdots+R_{n-1})\cdots\cdots(\mathrm{k})$$

これを3番目，5番目，…の各式に入れると，

$$\left.\begin{array}{l}R_2(1-t_2^2)+R_3(1-t_3^2)+\cdots+R_{n-1}(1-t_{n-1}^2)=2/3\\ R_2(1-t_2^4)+R_3(1-t_3^4)+\cdots+R_{n-1}(1-t_{n-1}^4)=4/5\\ \cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{l})$$

一般に，

$$\sum_{i=2}^{n-1}R_i(1-t_i^{2r})=2r/(2r+1),\ (r=1,2,\ \cdots)\cdots\cdots(\mathrm{m})$$

ゆえに，根の対称性を用いると，

$$\left.\begin{array}{l}n\text{が偶数}:\displaystyle\sum_{i=2}^{n/2}R_i(1-t_i^{2r})=r/(2r+1)\\ n\text{が奇数}:\displaystyle\sum_{i=2}^{(n-1)/2}R_i(1-t_i^{2r})+(1/2)R_{(n+1)/2}=r/(2r+1),\end{array}\ (r=1,2,\cdots)\right\}\cdots\cdots(1)$$

(1) からつくる方程式の数すなわち r の数は (1) 式中の未知数に等しいものとする。(1) 式より求められた $R_2,R_3,\cdots,R_{n-1}$ を (k) 式に入れれば R_1,R_n がえられる。筆者は $n=2\sim9$ として根 t_i,R_i を求めて次の表をえた。これは (1) を連立方程式として解けばえられるわけであるが，t_i の根を求める方程式は n が大きくなるときわめて複雑となりその解法が不可能である。そこで，特別な方法で t_i の根を求めなければならないが，それについては次節で述べることとする。表は筆者の平均値法公式の数値を小数点以下6桁目に丸めたものである。

表—1

n	i	t_i	R_i
2	1	−1	1/2
	2	1	1/2
3	1	−1	1/6
	2	0	4/6
	3	1	1/6
4	1	−1	1/12
	2	−0.447214	5/12
	3	0.447214	5/12
	4	1	1/12
5	1	−1	1/20
	2	−0.654654	49/180
	3	0	64/180
	4	0.654654	49/180
	5	1	1/20

n	i	t_i	R_i
6	1	−1	1/30
	2	−0.765055	0.189237
	3	−0.285232	0.277429
	4	0.285232	0.277429
	5	0.765055	0.189237
	6	1	1/30
7	1	−1	1/42
	2	−0.830224	0.138413
	3	−0.468849	0.215873
	4	0	0.243810
	5	0.468849	0.215873
	6	0.830224	0.138413
	7	1	1/42

n	i	t_i	R_i
8	1	−1	1/56
	2	−0.871740	0.105352
	3	−0.591700	0.170561
	4	−0.209299	0.206229
	5	0.209299	0.206229
	6	0.591700	0.170561
	7	0.871740	0.105352
	8	1	1/56
9	1	−1	1/72
	2	−0.899758	0.082748
	3	−0.677186	0.137270
	4	−0.363117	0.173214
	5	0	0.185759
	6	0.363117	0.173214
	7	0.677186	0.137270
	8	0.899758	0.082748
	9	1	1/72

さて，Lobatto は t の値のうちその3つに必ず −1, 1, 0 をとらせた平均値法公式を誘導した。その数値表は，Moors の書物に載せられている[13]。すなわち，Lobatto の公式は筆者のそれの n が奇数の場合に相当する。

次に，筆者の公式の近似度について述べよう。前述のように Gauss の公式の近似度は $2n-1$ であつた。そこで，2つの t の値 $t_1=-1$, $t_n=1$ をあらかじめ定めてしまうと未知数は2つ減つたこととなり，(h) からとられる連立方程式は Gauss の場合にくらべて2つだけ少なくなる。ゆえに，筆者の公式を一般の曲線に適用するときには，その近似度は $2n-1-2=2n-3$ である。すなわち，一般の曲線に対して同じ座標点数 n をとると，Gauss の公式では $2n-1$ 次の曲線まで誤差をともなわないが，筆者の公式では $2n-3$ 次の曲線まで誤差をともなわず，Gauss の公式にくらべて次数が2つだけ低い。しかし，曲線の縦距が区間の両端において 0 となる場合

に筆者の公式を用いれば，両端における座標点についての項を計算式に含ませる必要がない。そこで，Gauss の公式と同じ座標点をとる場合をくらべれば，筆者の公式では区域の中間で2つだけ多くの座標点をとることが許される。ゆえに，同じ座標点数 n に対して筆者の公式の近似度は $2(n+2)-3=2n+1$ となる。すなわち，曲線が区間の両端において横軸を切る場合には，筆者の公式を用いる方が Gauss の公式を用いるよりも近似度が2つだけ高い。あるいは，与えられた曲線について区間の平均値を同じ精度で求めるにあたつては，筆者の公式を用いる方が Gauss の公式を用いるよりも1つだけ少ない座標点で十分である。

すでに述べたように，自然河川においては，河底曲線も横断流量曲線もいずれも区間の両端においてその縦距が 0 となるから，筆者の平均値法公式を用いれば，可能な限り少ない垂直線数で流量 Q や流積 A を求めることができる。そこで，垂直線数 n が4の場合につき表より流量算定式を導こう。ただし，流量測定における垂直線数 n と表における座標点数とは異なるものであつて，前者は後者より2だけ少ないから，この場合の流量算定式は，表の $n=6$ に対する数値を用いる。

いま，一方の岸に原点，水面幅 b にそつて x 軸をとれば，横断流量曲線 $q=f(x)$ は $x=0$ および $x=b$ においていずれも $q=0$ となる。(a) 式より変数 x を区間 $[-1, 1]$ で定義される変数 t に変換すると，

$$x=b(1+t)/2 \cdots\cdots (n)$$

ゆえに，表の t_i に対応する x の値を x_i とすれば，

$$x_2=b(1-0.765055)/2 \fallingdotseq 0.117\,b,\quad x_3=b(1-0.285232)/2 \fallingdotseq 0.357\,b$$

$$x_4=b(1+0.285232)/2 \fallingdotseq 0.643\,b,\quad x_5=b(1+0.765055)/2 \fallingdotseq 0.883\,b$$

そこで，水面幅 b にそつて一方の岸よりその1割1分7厘の点 x_2 における単位幅当りの流量 q を $q_{0.117}$ で表わすこととする。この値は，上記の点に垂直線をえらび，この垂直線にそつて縦平均流速 v_m（この値は普通の場合2点法または平均値3点法で求められる）にそこでの水深 h をかけて求められる。他の記号も上と同様な内容を表わすものとすると，表の定係数 R_i の値を用いて，流量 Q を算定する式は次のようになる。

$$Q=b\{0.189(q_{0.117}+q_{0.883})+0.277(q_{0.357}+q_{0.643})\}$$

同じようにして，他の垂直線数に対する公式を導くことができる。いま，$n=3\sim6$ に対する流量算定式を列挙すると，

$$n=3:\ Q=b\{49(q_{0.173}+q_{0.827})+64\,q_{0.500}\}/180 \cdots\cdots (2)$$

$$n=4:\ Q=b\{0.189(q_{0.117}+q_{0.883})+0.277(q_{0.357}+q_{0.643})\} \cdots\cdots (3)$$

$$n=5:\ Q=b\{0.138(q_{0.085}+q_{0.915})+0.216(q_{0.266}+q_{0.734})+0.244\,q_{0.500}\} \cdots\cdots (4)$$

$$n=6:\ Q=b\{0.105(q_{0.064}+q_{0.936})+0.171(q_{0.204}+q_{0.796})+0.206(q_{0.395}+q_{0.605})\} \cdots\cdots (5)$$

(2)～(5) 式はこれらの誘導過程から明らかなように，横断流量曲線の次数がそれぞれ高々 7～13 次までは誤差をともなわない。流積 A を求めるには，上の各式において，単位幅当りの流量 q の代わりに水深 h を用いればよい。

さて，垂直線の位置は水面幅の中点に対して左右対称であるから，その位置はどちらの岸から測つてもよい。そして対称な2つの位置での単位幅当りの流量 q に乗じるべき定係数の値は相等しく，しかもその値は，垂直線が岸に近いほど小さい。このことは，定係数は測定値の重みに等しい意義をもつているから，流れの中央部での測定の精度を岸に近い測定の精度よりも重んじるべきであることを表わしている。ゆえに，流れの中央部では平均値3点法を，岸に近いところでは2点法を用いればよい。また，垂直線数を多くするほど両端の垂直線はより岸に近づき，定係数はますます小さくなる。岸に近いところでは一般に水深が浅く流速は小さいから，そこでの単位幅りの流量の値は中央部でのそれより小さくなり，定係数の小さいことと相まつて，そこでの精度をかなり落してもよいこととなる。ゆえに，そこでは1点法や H.G. Wilm の方法[14),15)]（特殊な測棒により速度水頭を実測して簡単に縦平均流速を求める方法）などが有効となる。

いま，仮りに1本の垂直線にそつてとるべき観測点数を平均2つとすれば (2)～(5) 式での全観測点数は 6～12 点となり，従来の方法にくらべていちじるしく観測点数を下げることができる。このことは，単に観測を容易にし，時間・労力・費用を節約しうるばかりでなく，水位の変動が流量におよぼす誤差を僅小にし，各観測点での流速測定の時間を可能な限り長くして脈動の影響を最小にすることができる。

そこで，次に問題となるのは，これらの公式を用いてどの程度に正確な流量を測定しうるかということ，また，横断流量曲線は河底曲線によつてその次数が左右されるが，どの程度の河底の凹凸に対してはいずれの公式を用いるべきかということ，などである。更には，実際の測定技術についての方式を確立しなければならないであろう。これらの諸問題については次の論文にゆずることとする。

3. 新らしい平均値法公式の証明

筆者の平均値法における各数値は，与えられたnの値に対して (1) 式を解いてえられる。nの値が小さければこれを直接解くことができるが，nの値が増すに従つてt_iの根を求めるための方程式は複雑になりその解法が不可能となる。そこで，本節ではt_iの根を求める実際の方法について言及する。

与えられたnの値に対して，(1) 式を満足するt_iの根を$t_1(=-1)$, $t_2,\cdots$, $t_n(=1)$とする。いま，次の式で定義されるtに関するn次の有理整式を考える。

$$\varphi(t)\equiv(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_n) \qquad \text{(a)}$$

そうすると，$\varphi(t)=0$とおいてえられるn個の根が求めるものである。

さて，$g_{n-3}(t)$をtに関して高々$n-3$次の任意の有理整式とすれば，$g_{n-3}(t)\varphi(t)$は高々$2n-3$次の有理整式となる。ゆえに，$t_i, R_i(i=1,2,\cdots,n)$を (1) 式を満足する$2n$個の根とすれば，筆者の平均値法公式の近似度は$2n-3$であるから，区間$[-1, 1]$における次の平均値Mすなわち，

$$M=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_{n-3}(t)\varphi(t)dt \qquad \text{(b)}$$

は，座標点t_iにおける函数値$g_{n-3}(t_i)\varphi(t_i)$と定係数R_iとの積の総和に等しい。ところで，(a) 式より$\varphi(t_i)=0$であるから，(b) 式は0に等しい。このことは，次の$n-2$個の式がすべて同時に成立するのと同じである。

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt=0, \int_{-1}^{1}t\varphi(t)dt=0, \cdots, \int_{-1}^{1}t^{n-3}\varphi(t)dt=0 \qquad \text{(c)}$$

ところで，$\varphi(t)$はtに関してn次であるから，

$$\left.\begin{array}{ll} \int\varphi(t)dt=\varphi_1(t) & n+1\ 次 \\ \int\varphi_1(t)dt=\varphi_2(t) & n+2\ 次 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \int\varphi_{n-3}(t)dt=\varphi_{n-2}(t) & 2n-2\ 次 \end{array}\right\} \qquad \text{(d)}$$

とすれば，νを0または正の整数として，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}t^\nu\varphi(t)dt&=\Big[t^\nu\varphi_1(t)\Big]_{-1}^{1}-\nu\int_{-1}^{1}t^{\nu-1}\varphi_1(t)dt\\ &=\Big[t^\nu\varphi_1(t)\Big]_{-1}^{1}-\nu\Big[t^{\nu-1}\varphi_2(t)\Big]_{-1}^{1}+\nu(\nu-1)\int_{-1}^{1}t^{\nu-2}\varphi_2(t)dt\\ &=\Big[t^\nu\varphi_1(t)\Big]_{-1}^{1}-\nu\Big[t^{\nu-1}\varphi_2(t)\Big]_{-1}^{1}+\cdots+(-1)^\nu\nu!\Big[\varphi_{\nu+1}(t)\Big]_{-1}^{1} \qquad \text{(e)}\end{aligned}$$

したがつて，(c) 式が成り立つためには，区間の両端で0となる条件をもつ$\varphi(t)$を含めて，

$\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,……, $\varphi_{n-2}(t)$

が$t=\pm1$ですべて0とならなければならない。または，

$\varphi_{n-2}(t)$, $\varphi_{n-2}'(t)$, $\varphi_{n-2}''(t)$,……, $\varphi_{n-2}^{(n-2)}(t)$

が$t=\pm1$ですべて0となるべきである。

そこで，$\varphi_{n-2}(t)$が$t=-1$においてその$n-2$次の微係数まで0となるためには，$\varphi_{n-2}(t)$は$(t+1)^{n-1}$の因数をもたなければならない。同じようにして，$\varphi_{n-2}(t)$は$(t-1)^{n-1}$の因数をもつはずである。

$$\therefore\ \varphi_{n-2}(t)=K(t+1)^{n-1}(t-1)^{n-1}=K(t^2-1)^{n-1} \qquad \text{(f)}$$

(d) に示すように，$\varphi_{n-2}(t)$はtに関して$2n-2$次の有理整式で，(f) 式の右辺の因数$(t^2-1)^{n-1}$もtに関して$2n-2$次であるから，(f) 式の右辺のKは定数である。

しかも，(a) 式より明らかなように，$\varphi(t)=\varphi_{n-2}^{(n-2)}(t)$の$t^n$の係数は1であるから，(f) 式の右辺を$t$に関して$n-2$回微分してえられる$t^n$の係数を1とおけば，

$$(2n-2)(2n-3)\cdots(n+1)K=1 \quad \therefore\ K=n!/(2n-2)!=n/2^{n-1}$$

$$\therefore\ \varphi_{n-2}(t)=(n/2^{n-1})(t^2-1)^{n-1} \qquad \text{(g)}$$

したがつて，$\varphi(t)$は次のようになる。

$$\varphi(t)=\frac{n}{2^{n-1}}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^2-1)^{n-1} \qquad \text{(h)}$$

そこで，$\varphi(t)=0$あるいは，

$$\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(t^2-1)^{n-1}=0 \quad \cdots\cdots (6)$$

とおいてえられる t の n 個の根が，筆者の平均値法公式における n 個の座標点である。

たとえば，$n=6$ とすれば (6) 式より，

$$\frac{d^4}{dt^4}(t^2-1)^5=\frac{d^4}{dt^4}(t^{10}-5\,t^8+10\,t^6-10\,t^4+5\,t^2-1)$$
$$=5\,040\,t^6-8\,400\,t^4+3\,600\,t^2-240=240(t^2-1)(21\,t^4-14\,t^2+1)=0$$
$$\therefore\quad t_1, t_6=\pm 1$$
$$t_2, t_5=\pm\sqrt{7+2\sqrt{7}}/\sqrt{21}\fallingdotseq\pm 0.765\,055$$
$$t_3, t_4=\pm\sqrt{7-2\sqrt{7}}/\sqrt{21}\fallingdotseq\pm 0.285\,232$$

これらを (1) 式に入れると R_i に関する連立1次方程式がえられるから，これを解いて R_i の値が求められる。

$$R_1=R_6=1/30,\ R_2=R_5=(14-\sqrt{7})/60\fallingdotseq 0.189\,237,\ R_3=R_4=(14-\sqrt{7})/60\fallingdotseq 0.277\,429$$

このように，$R_1=R_n$ の値はすべての n に対して規則正しい簡単な分数列を形成するのであつて，その証明は次のとおりである。

n 個の点 $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \cdots, (t_n, y_n)$ (ただし，$t_1=-1$，$t_n=1$) を通る $n-1$ 次の有理整式 $g_{n-1}(t)$ を Lagrange の補間式を用いて次のように書く[16]。

$$g_{n-1}(t)=\frac{(t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_n)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\cdots(t_1-t_n)}y_1+\frac{(t-t_1)(t-t_3)\cdots(t-t_n)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)\cdots(t_2-t_n)}y_2$$
$$+\cdots\cdots+\frac{(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n-1})}{(t_n-t_1)(t_n-t_2)\cdots(t_n-t_{n-1})}y_n \quad \cdots\cdots (\mathrm{i})$$

ここで，(a) 式を用いると，

$$\left.\begin{array}{l} (t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_n)\ =\ \varphi(t)/(t-t_1) \\ (t-t_1)(t-t_3)\cdots(t-t_n)\ =\ \varphi(t)/(t-t_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n-1})=\varphi(t)/(t-t_n) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (\mathrm{j})$$

であつて，また，

$$\varphi'(t)=(t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_n)+(t-t_1)(t-t_3)\cdots(t-t_n)$$
$$+\cdots+(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n-1})$$

であるから，

$$\left.\begin{array}{l} (t_1-t_2)\,(t_1-t_3)\cdots(t_1-t_n)\ =\ \varphi'(t_1) \\ (t_2-t_1)\,(t_2-t_3)\cdots(t_2-t_n)\ =\ \varphi'(t_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (t_n-t_1)(t_n-t_2)\cdots(t_n-t_{n-1})=\varphi'(t_n) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (\mathrm{k})$$

(j) 式および (k) 式を (i) 式に入れると，

$$g_{n-1}(t)=\frac{y_1\varphi(t)}{(t-t_1)\varphi'(t_1)}+\frac{y_2\varphi(t)}{(t-t_2)\varphi'(t_2)}+\cdots\cdots+\frac{y_n\varphi(t)}{(t-t_n)\varphi'(t_n)}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i\varphi(t)}{(t-t_i)\varphi'(t_i)}$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}g_{n-1}(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i\varphi(t)}{(t-t_i)\varphi'(t_i)}\right\}dt=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{2(t-t_i)\varphi'(t_i)}dt\right\} \quad \cdots\cdots (\mathrm{l})$$

さて，筆者の平均値法公式の近似度は前節で証明したように $2n-3$ であつて，$n\geqq 2$ であるから常に $2n-3\geqq n-1$ が成り立つ。いま，$y=g_{2n-3}(t)$ を高々 $2n-3$ 次の有理整式とすれば，筆者の公式では R_i を適当にえらべば正しく次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}g_{2n-3}(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}R_iy_i$$

ゆえに，上の被積分函数を $n-1$ 次の有理整式 $g_{n-1}(t)$ としても，同じ R_i の値に対して，

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}g_{n-1}(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}R_iy_i \quad \cdots\cdots (\mathrm{m})$$

が成り立つから，この式より定係数 R_i を求めればよい。(l) 式と (m) 式との右辺をくらべれば，

$$R_i=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{2(t-t_i)\varphi'(t_i)}dt \quad \cdots\cdots(7)$$

R_i は (1) 式を解く代わりに (7) 式から求めてもよい。いま，(7) 式において $t_i=t_n=1$ とおけば，

$$R_n=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{2(t-1)\varphi'(1)}dt \quad \cdots\cdots(\mathrm{n})$$

(h) 式より，

$$\varphi'(t)=\frac{n}{2^{n-1}}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^{n-1} \quad \cdots\cdots(\mathrm{o})$$

ここで，Legendre の多項式 $P_n(t)$ を用いる。$P_n(t)$ に関する Rodrigues の表示式は，

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\ \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

であるから，(o) 式は，

$$\varphi'(t)=\{n\cdot 2^{n-1}\cdot(n-1)!/2^{n-1}\}P_{n-1}(t)=n!P_{n-1}(t)$$

ところで，$P_{n-1}(1)=1$ であるから，

$$\varphi'(1)=n! \quad \cdots\cdots(\mathrm{p})$$

(p) 式を (n) 式に入れると，

$$R_n=\frac{1}{2\cdot n!}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-1}dt \quad \cdots\cdots(\mathrm{q})$$

さて，(q) 式の右辺の定積分は，部分積分法を用いて，

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-1}dt=\left[\frac{\varphi_1(t)}{t-1}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(t)}{(t-1)^2}dt=\left[\frac{\varphi_1(t)}{t-1}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{\varphi_2(t)}{(t-1)^2}\right]_{-1}^{1}$$
$$+2\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(t)}{(t-1)^3}dt=\left[\frac{\varphi_1(t)}{t-1}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{\varphi_2(t)}{(t-1)^2}\right]_{-1}^{1}+\cdots+2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-3)\left[\frac{\varphi_{n-2}(t)}{(t-1)^{n-2}}\right]_{-1}^{1}$$
$$+2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-2)\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_{n-2}(t)}{(t-1)^{n-1}}dt \quad \cdots\cdots(\mathrm{r})$$

ところで，(f) 式よりわかるように，$\varphi_1(t)$ は $(t-1)^2$ の因数を有し，$\varphi_2(t)$ は $(t-1)^3$ の因数を有し，…，$\varphi_{n-2}(t)$ は $(t-1)^{n-1}$ の因数を有するから，$\varphi_1(t)/(t-1)$，$\varphi_2(t)/(t-1)^2,\cdots$，$\varphi_{n-2}(t)/(t-1)^{n-2}$ はいずれも $t-1$ の因数を有する。ゆえに，$t=1$ においてこれらは 0 となる。また，$t=-1$ において，$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t),\cdots,\varphi_{n-2}(t)$ はいずれも 0 であるから，(r) 式は，

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-1}dt=(n-2)!\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_{n-2}(t)}{(t-1)^{n-1}}dt \quad \cdots\cdots(\mathrm{s})$$

(s) 式の右辺に (g) 式を用いると，

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-1}dt=\frac{n\cdot(n-2)!}{2^{n-1}}\int_{-1}^{1}(t+1)^{n-1}dt=\frac{n\cdot(n-2)!}{2^{n-1}}\left[\frac{(t+1)^n}{n}\right]_{-1}^{1}=2\cdot(n-2)! \quad \cdots\cdots(\mathrm{t})$$

(t) 式を (q) 式に入れれば容易に次の結果がえられる。

$$R_1=R_n=1/\{n(n-1)\} \quad \cdots\cdots(8)$$

筆者の平均値法公式は前述のように区間の両端において函数値が 0 であるような函数（0 でなくても函数値が等しければよい）に用いて最も高い近似度を有するが，両端の函数値が 0 でなくてもその値がわかつているかあるいは容易に求められるとき（数値積分では $t=\pm1$ における函数値が容易に求められる場合が多い）に用いて便利であろう。それは，両端の函数値に乗じるべき定係数が式（8）のように簡単な分数値となるからである。この例題については，拙著“最小2乗法と実験式”（コロナ社　応用数学講座，第5巻，第2部，p. 302～p. 303）を参照されたい。

4. 結　　語

（1）平均値法の原理に基づいて，区間 [−1, 1] の両端にあらかじめ2つの座標点をえらび，残りの $n-2$ 個の座標点 t_i と n 個の定係数 R_i とになんの条件も設けないで，1つの新らしい平均値法公式を導く（数値は表を参照）。この公式を一般の函数に適用するときの近似度は $2n-3$ である。この数値の解法は **3.** に述べるとおりで，この公式の特長は区間の両端での函数値に対する定係数が正整数 n に対して規則正しい簡単な分数列を形成することである。このため，この公式は区間の両端における函数値が既知かまたは容易に求められるときに便利である。

（2） 区間の両端で函数値が 0 となる函数に筆者の平均値法公式を用いると，一般の函数に対して最高の近似度をもつ Gauss の公式を用いるよりも，同じ座標点数に対して，近似度が2つ高い。したがつて，これより自然河川での流量算定式を導けば，最小の垂直線数でその目的を達することができる。垂直線数が 3～6 に対する流量算定式は (2)～(5) 式で，これらの公式は横断流量曲線をそれぞれ高々 7～13 次の有理整式で表わすとき誤差をともなわない。流積を求めるには，これらの公式中の単位幅当りの流量 q を水深 h でおきかえればよい。

（3） 最小の垂直線数で流量測定をおこなうのは，時間・労力・費用を節約するのみならず，全観測点数を極力少なくして，各観測点での流速測定時間を従来よりも延長して流れの脈動による誤差を僅小にし，かつ，全測定時間を従来よりも短くして水位の変動が流量におよぼす誤差を少なくしようとするものである。

参考文献

1) 春日屋伸昌：流量測定における二，三の問題，中央大学工学部研究報告，第1号，1957，p. 19～p. 29.
2) Corbett, D.M. and others: Stream-gaging procedure, U.S. Geol. Survey Water Supply Paper, No. 888, 1945, p. 68.
3) 官報，第 8332 号（昭和 29 年 10 月9日号）.
4) Linsley, R.K., Kohler, M.A. and Paulhus, J.L.H.: Applied hydrology, 1949, p. 192.
5) 春日屋伸昌：縦平均流速算定式の精度について，土木学会論文集，第 54 号，1958，p. 26～p. 34.
6) Liddell, W.A.: Stream gaging, 1927, p. 13.
7) Murphy, E.C.: Accuracy of stream measurements, U.S. Geol. Survey Water Supply Paper, No. 95, 1904, p. 29.
8) Gibson, A.H.: Hydraulics and its applications, 1952, p. 345～p. 346.
9) 本間 仁：水理学界の現況，土木学会誌，第 39 巻，第 12 号，1954，p.57.
10) 春日屋伸昌：流量測定における二，三の問題，中央大学工学部研究報告，第1号，1957，p. 24～p. 29.
11) 春日屋伸昌：平均値法による流量算定式について，土木学会誌，第 38 巻，第7号，1953，p. 17～p. 21.
12) 春日屋伸昌：最小2乗法と実験式，応用数学講座，第5巻，第2部，1957，p. 299～p. 300.
13) Moors, B.P.: Valeur approximative d'une intégrale définie, 1905, 巻末付録.
14) Wilm, H.G.: Measuring flow in open channels, Eng. News-Record, 1940, Dec. 5, p. 754.
15) Wilm, H.G. and Storey, H.C.: Velocity-head rod calibrated for measuring streamflow, Civil Eng., Vol. 14, 1944, p. 475～p. 476.
16) 中川 元，春日屋伸昌：自然科学のための数学汎論，1957，p. 324.

（昭.32.6.22）