

バネ支承で支持された連続桁の解法

—回転と垂直の2方向にバネを有する場合—

准員 島田 静 雄*

THE ANALYSIS OF CONTINUOUS BEAMS SUPPORTED BY SPRINGS.

—THE BEAMS THAT HAVE TWO SORTS OF SPRINGS FOR DEFLECTION AND ROTATION AT THE SUPPORTS—

By Shizuo Shimada, C.E. Assoc. Member

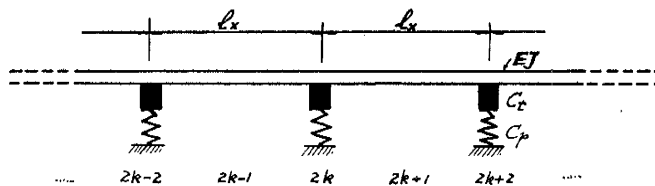
Synopsis : The statical systems of grid girders or network of beams reduce finally by mathematical methods to the continuous beams with elastic springs at the supports. This report is the brief note for the analysis of those systems only showing the elastic equations and some results in more simple conditions.

要旨 格子桁の解の基礎となる力学系は、究極にバネ支承の連続桁を解く事に帰せられる。支承で、垂直変位と回転変位に対してバネ拘束を受ける連続桁の解を求める基本式を提出し、簡単な二、三の条件に対しての解法を明らかにする。

1. 基礎方程式

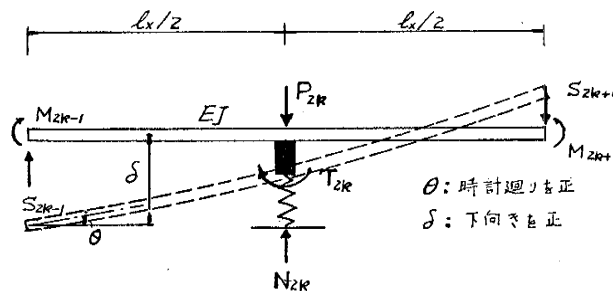
曲げ剛性 EJ の桁が支間 l_x ごとに支持され、支承の拘束は、垂直変位に対して C_p (kg/cm)、支承上で桁が傾むく回転変位に対して C_t (kg-cm/radian)、の2種のバネで支持されている力学系の解を求める(図-1)。

図-1



この力学系の静定基本形を、支承と支承の間で桁を切断して考え、そこに作用するせん断力と曲げモーメントを不静定力に選ぶ(図-2)。外力 P は支承の直上に作用すると考えよう。記号は k を正の整数とし、支承位置を端の支承より $2, 4, 6 \dots 2k$ 番目とし、桁の切断点を $1, 3, 5 \dots 2k-1, 2k+1, \dots$ で与える。

図-2



支承の垂直反力を N_{2k} 、ねじりモーメント反力を T_{2k} 、支承の上に作用する荷重を P_{2k} 、 $(2k-1)$ 、 $(2k+1)$ の点に作用するせん断力と曲げモーメントを S_{2k-1} 、 S_{2k+1} 、 M_{2k-1} 、 M_{2k+1} とする。符号は 図-2 の矢印の方向を正にとる。

静定基本形の変位と釣合条件式は

* 修士、東京大学大学院学生(博士過程)、工学部土木教室

$$\left\{ \begin{aligned} P_{2k} &= S_{2k-1} - S_{2k+1} + N_{2k} \dots\dots\dots (1) \\ T_{2k} &= M_{2k+1} - M_{2k-1} - \frac{l_x}{2}(S_{2k+1} + S_{2k-1}) \dots\dots\dots (2) \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} \theta_{2k} &= -\frac{T_{2k}}{C_t} \dots\dots\dots (3) \\ \delta_{2k} &= \frac{N_{2k}}{C_p} \dots\dots\dots (4) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{2k+1} &= \delta_{2k} + \frac{l_x}{2}\theta_{2k} + \frac{l_x^3}{24EJ}S_{2k+1} - \frac{l_x^2}{8EJ}M_{2k+1} \dots\dots\dots (5) \\ \delta_{2k-1} &= \delta_{2k} - \frac{l_x}{2}\theta_{2k} - \frac{l_x^3}{24EJ}S_{2k-1} - \frac{l_x^2}{8EJ}M_{2k-1} \dots\dots\dots (6) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_{2k+1} &= \theta_{2k} + \frac{l_x^2}{8EJ}S_{2k+1} - \frac{l_x}{2EJ}M_{2k+1} \dots\dots\dots (7) \\ \theta_{2k-1} &= \theta_{2k} + \frac{l_x^2}{8EJ}S_{2k-1} + \frac{l_x}{2EJ}M_{2k-1} \dots\dots\dots (8) \end{aligned} \right.$$

隣接する2つの静定基本形の切断点には実際には連続するから、まず δ に関して、(5),(6) の2式より、

$$\frac{l_x^3}{12EJ}S_{2k+1} = (\delta_{2k+2} - \delta_{2k}) - \frac{l_x}{2}(\theta_{2k+2} + \theta_{2k})$$

$$\therefore \frac{l_x^3}{12EJ}S_{2k+1} = \frac{1}{C_p}(N_{2k+2} - N_{2k}) + \frac{l_x}{2C_t}(T_{2k+2} + T_{2k}) \dots\dots\dots (9)$$

更に θ に関しては (7),(8) の2式より

$$\frac{l_x}{EJ}M_{2k+1} = (\theta_{2k} - \theta_{2k+2}) = \frac{1}{C_t}(T_{2k+2} - T_{2k}) \dots\dots\dots (10)$$

(9),(10) の2式を、更に (1),(2) の2式に代入すれば、 N 及び T に関する2組の釣合条件式を導びく。

$$\frac{1}{C_p}N_{2k-2} - \left(\frac{2}{C_p} + \frac{l_x^3}{12EJ}\right)N_{2k} + \frac{1}{C_p}N_{2k+2} + \frac{l_x}{2C_t}(T_{2k+2} - T_{2k-2}) = \frac{-l_x^3}{12EJ}P_{2k}$$

$$\frac{2}{C_t}T_{2k-2} + \left(\frac{8}{C_t} + \frac{l_x}{EJ}\right)T_{2k} + \frac{2}{C_t}T_{2k+2} + \frac{6}{C_p l_x}(N_{2k+2} - N_{2k-2}) = 0$$

記号を簡単にするために下記の係数を使用する。

$$\alpha = \frac{C_p l_x^3}{12EJ} (-), \quad \beta = \frac{l_x C_p}{2C_t} (\text{cm}^{-1}), \quad \tau = \frac{l_x C_t}{2EJ} (-), \quad \varepsilon = \frac{3C_t}{C_p l_x} (\text{cm}), \dots\dots\dots (11)$$

これらの係数を用いて、連続桁の端部の境界条件を考えに入れなければ次式が成立する。

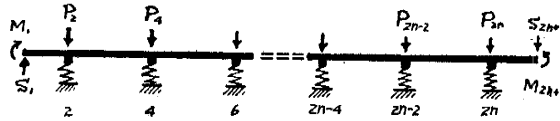
$$\left. \begin{aligned} &\dots N_{2k-6}, N_{2k-4}, N_{2k-2}, N_{2k}, N_{2k+2}, N_{2k+4}, N_{2k+6} \dots, \dots T_{2k-6}, T_{2k-4}, T_{2k-2}, T_{2k}, T_{2k+2}, T_{2k+4}, T_{2k+6} \dots \\ &\dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots \\ &\begin{matrix} -1, (2+\alpha), -1, & + & \beta, & 0, & -\beta & = \alpha P_{2k-4} \\ -1, (2+\alpha), -1, & + & & \beta, & 0, & -\beta & = \alpha P_{2k-2} \\ & -1, (2+\alpha), -1, & + & & \beta, & 0, & -\beta & = \alpha P_{2k} \\ & & -1, (2+\alpha), -1, & + & & \beta, & 0, & -\beta & = \alpha P_{2k+2} \\ & & & -1, (2+\alpha), -1, & + & & \beta, & 0, & -\beta & = \alpha P_{2k+4} \end{matrix} \\ &\dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} &\dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots \\ &\begin{matrix} -\varepsilon, & 0, & \varepsilon, & + & 1, (4+\tau), & 1 & = 0 \\ & -\varepsilon, & 0, & \varepsilon, & + & & 1, (4+\tau), & 1 & = 0 \\ & & -\varepsilon, & 0, & \varepsilon, & + & & & 1, (4+\tau), & 1 & = 0 \\ & & & -\varepsilon, & 0, & \varepsilon, & + & & & & 1, (4+\tau), & 1 & = 0 \end{matrix} \\ &\dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

これらの連立方程式が基礎方程式であるが、連続桁の端部の境界条件だけ不定である。そこで端部での条件は静定基本形の端部の力 S_1 及び M_1 並びに S_{2n+1}, M_{2n+1} を考えて釣合を誘導する。これは (図-3),

$$\left. \begin{aligned} (1+\alpha)N_2 - N_4 - \beta(T_{2+} + T_4) &= \alpha P_2 - \alpha S_1 \\ -N_{2k-2} + (1+\alpha)N_{2n} + \beta(T_{2n-2} + T_{2n}) &= \alpha P_n + \alpha S_{2n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

図-3



$$\left. \begin{aligned} (2+\gamma)T_2 + T_4 - \varepsilon(N_2 - N_4) + \gamma M_1 + \frac{l_x}{2}\gamma S_1 &= 0 \\ T_{2n-2} + (2+\gamma)T_{2n} - \varepsilon(N_{2n-2} - N_{2n}) - \gamma M_{2n+1} + \frac{l_x}{2}\gamma S_{2n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

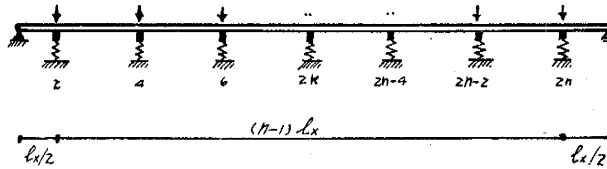
(12)~(15) 式が、特に P が支承の直上のみに作用しているときの釣合方程式である。

2. 種々の境界条件に対する解

a) 両端が $l_x/2$ 張り出して単純に支承された等間連続桁の場合

図-4 に示すごとく、 n コのバネ支承で支持された支間 nl_x の桁が両端で単純に支持されているときの解を求める。この場合、支承上に作用する荷重 $P_2, P_4, P_6, \dots, P_{2n}$ を次の正弦函数で与えると、支承の反力は同じく正弦函数で与えられ、支承のトルク反力 T は余弦函数で示される。

図-4



$$P_{2k} = P_\lambda \sin \frac{\lambda(2k-1)\pi}{2n}, \quad N_{2k} = N_\lambda \sin \frac{\lambda(2k-1)\pi}{2n}, \quad T_{2k} = T_\lambda \cos \frac{\lambda(2k-1)\pi}{2n}$$

$P_\lambda, N_\lambda, T_\lambda$ の関係は (12), (13) 式に代入して求められる。まず (12) 式より

$$-N_{2k-2} + (2+\alpha)N_{2k} - N_{2k+2} = \left[2+\alpha - 2 \cos \frac{\lambda\pi}{n} \right] N_\lambda \sin \frac{\lambda(2k-1)\pi}{2n}$$

$$\beta(T_{2k-2} - T_{2k+2}) = \left[2\beta \sin \frac{\lambda\pi}{n} \right] T_\lambda \sin \frac{\lambda(2k-1)\pi}{2n}$$

$$\therefore \left[2+\alpha - 2 \cos \frac{\lambda\pi}{n} \right] N_\lambda + \left[2\beta \sin \frac{\lambda\pi}{n} \right] T_\lambda = \alpha P_\lambda \dots\dots\dots (16)$$

(13) 式からは

$$\left[4+\gamma + 2 \cos \frac{\lambda\pi}{n} \right] T_\lambda + \left[2\varepsilon \sin \frac{\lambda\pi}{n} \right] N_\lambda = 0 \dots\dots\dots (17)$$

結局 P_λ で表わした N_λ, T_λ は

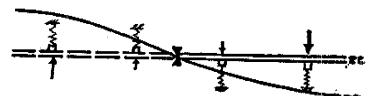
$$N_\lambda = \frac{P_\lambda}{\left\{ \left[2+\alpha - 2 \cos \frac{\lambda\pi}{n} \right] \frac{4\beta\varepsilon \sin \frac{2\lambda\pi}{n}}{4+\gamma + 2 \cos \frac{\lambda\pi}{n}} \right\} \alpha} \dots\dots\dots (18)$$

$$T_\lambda = \frac{P_\lambda}{\left\{ \left[2\beta \sin \frac{\lambda\pi}{n} \right] \frac{2 \left[2+\alpha - 2 \cos \frac{\lambda\pi}{n} \right] \varepsilon \sin \frac{\lambda\pi}{n}}{2+\alpha - 2 \cos \frac{\lambda\pi}{n}} \right\} \alpha} \dots\dots\dots (19)$$

支承 1, $(2n+1)$, での境界条件は、 $M_1 = M_{2n+1} = 0, \delta_1 = \delta_{2n+1} = 0$ であるが、これは支承の位置で互いに逆向きな 2 つの桁を連結して考えれば容易に証明ができる (図-5)。

外力として、ある任意の支承 i にのみ $P_{2i} = 1$ の荷重が働らくときの支承反力を求めるには、 λ の異なる荷重群を組合わせて重ね合わせる慣用の手段が使われる。

図-5



$$P_{2j} = \frac{2}{n} \sum_{\lambda=1}^n f_i f_j \sin \frac{\lambda(2i-1)}{2n} \sin \frac{\lambda(2j-1)}{2n} = \delta_{ij} = P_{2i}$$

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0, & i \neq j, \quad i=1, \quad i=j \\ f_i = 1, & i \neq n, \quad = 1/\sqrt{2}, \quad i=n \\ f_j = 1, & j \neq n, \quad = 1/\sqrt{2}, \quad j=n \end{cases}$$

の関係があるから、(18)、(19) 式の P_λ を

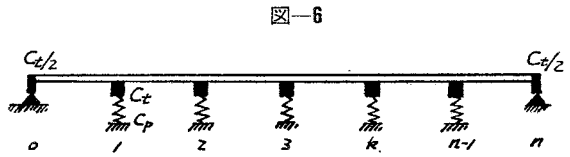
$$P_\lambda = \frac{2}{n} f_i f_\lambda$$

で与えれば、 $P_{2i}=1$ の荷重に対して支承の反力が次式で得られる。

$$\begin{cases} N_{2j} = \sum_{\lambda=1}^n N_\lambda \sin \frac{\lambda(2i-1)}{2n} \sin \frac{\lambda(2j-1)}{2n} \\ T_{2j} = \sum_{\lambda=1}^n T_\lambda \sin \frac{\lambda(2i-1)}{2n} \cos \frac{\lambda(2j-1)}{2n} \end{cases}$$

b) 等径間連続桁で、端支承のバネ常数が $C_p = \infty, C_i' = C_i/2$ の場合

図-6 のように、支間 $n \cdot l_x$ で端支承は垂直変位には剛に拘束され、回転に対して中間の支承のバネ常数の半分のバネ強さ $C_i/2$ で拘束されている場合である。中間の支承に生ずる反力 N_k, T_k ($k=1, 2, \dots, n-1$) は、支承の直上に作用する荷重 P_k が正弦函数で与えられると簡単に求まる。



$$P_k = P_\lambda \sin \frac{\lambda k \pi}{n}, \quad N_k = N_\lambda \sin \frac{\lambda k \pi}{n}, \quad T_k = T_\lambda \cos \frac{\lambda k \pi}{n}$$

特に支承 0, n, の2カ所のみ

$$T_k = \frac{T_\lambda}{2} \cos \frac{\lambda k \pi}{n}, \quad k=1 \text{ または } n$$

T_λ, N_λ と P_λ の関係は (18)、(19) 両式がそのまま適用される。支承 i に $P_i=1$ の荷重のみが作用するときの重ね合わせは

$$P_j = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{2}{n} \sin \frac{\lambda i \pi}{n} \sin \frac{\lambda j \pi}{n} = \delta_{ij}$$

よつて

$$P_\lambda = \frac{2}{n}, \quad N_j = \sum_{\lambda=1}^{n-1} N_\lambda \sin \frac{\lambda i \pi}{n} \sin \frac{\lambda j \pi}{n}$$

$$T_j = \sum_{\lambda=1}^{n-1} T_\lambda \sin \frac{\lambda i \pi}{n} \cos \frac{\lambda j \pi}{n}, \quad (j=1, \dots, n-1)$$

$$2T_j = \sum_{\lambda=1}^{n-1} T_\lambda \sin \frac{\lambda i \pi}{n} \cos \frac{\lambda j \pi}{n}, \quad (j=1 \text{ または } n)$$

c) 2支承から成る場合

釣合の方程式は (14)、(15) の2組である。 $S_1=M_1=S_5=M_5=0$ の条件を代入して得られる (図-7)。

$$\begin{cases} (1+\alpha)N_2 - N_4 - \beta(T_2 + T_4) = \alpha P_2 \\ N_2 + (1+\alpha)N_4 + \beta(T_2 + T_4) = \alpha P_4 \\ (2+r)T_2 + T_4 - \epsilon(N_2 - N_4) = 0 \\ T_2 + (2+r)T_4 - \epsilon(N_2 - N_4) = 0 \end{cases}$$

この解は $P_2=P_4=1$ の対称荷重と $P_2=-P_4=1$ の逆対称荷重とを組み合わせれば容易である。これらを解いて、 $\alpha, \beta, r, \epsilon$, の値を代入すれば、表-1 の結果をうる。

表-1


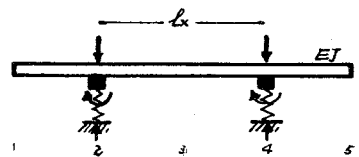

		N	T
I		$N_2 = 1 - N_4$ $N_4 = \frac{1}{2 + \frac{l_x^2}{2} \times \frac{C_p}{C_t} + \frac{l_x^3}{12 EJ} C_p}$	$T_2 = T_4 = N_4 \times \frac{l_x}{2}$

図-7



II		$N_2 = N_4 = \frac{1}{2}$	$-T_2 = T_4 = \frac{1}{4 + \frac{8 EJ}{C_t l_x}} \times \frac{l_x}{2}$
----	---	---------------------------	--

d) 3 支承から成る場合

釣合の方程式は

$$\begin{cases} (1+\alpha)N_2 - N_4 & -\beta T_2 - \beta T_4 & = \alpha P_2 \\ -N_2 + (2+\alpha)N_4 - N_6 + \beta T_2 & -\beta T_6 & = \alpha P_4 \\ -N_4 + (1+\alpha)N_6 & +\beta T_4 + \beta T_6 & = \alpha P_6 \\ -\varepsilon N_2 + \varepsilon N_4 & + (2+r)T_2 + T_4 & = 0 \\ -\varepsilon N_2 & + \varepsilon N_6 + T_2 + (4+r)T_4 + T_6 & = 0 \\ & -\varepsilon N_4 + \varepsilon N_6 & + T_4 + (2+r)T_6 = 0 \end{cases}$$

これらの解は、対称载荷と逆対称载荷により簡単になり、同じく表-2 に計算式を与えておく。

図-8

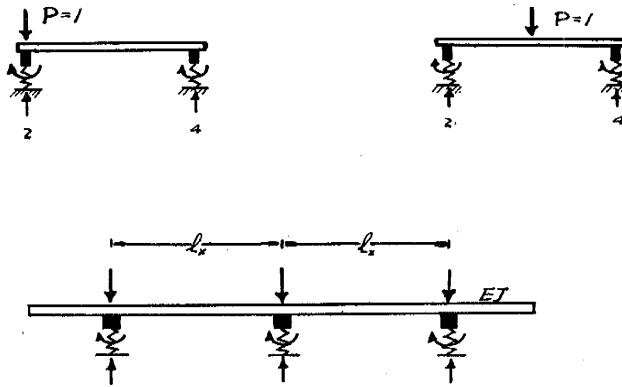
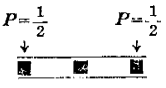
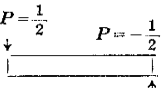
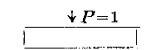


表-2

	N	T
I 	$N_2 = N_6 = \frac{1}{2} - \frac{N_4}{2}$ $N_4 = \frac{2\left[1 + \frac{l_x C_t}{EJ}\right]}{6\left[1 + \frac{l_x C_t}{EJ}\right] + \frac{C_p l_x^3}{6 EJ} \left[4 + \frac{l_x C_t}{EJ}\right]}$	$T_4 = 0$ $T_2 = -T_6 = \frac{\frac{l_x C_t}{EJ} \times \frac{l_x}{2}}{6\left[1 + \frac{l_x C_t}{EJ}\right] + \frac{C_p l_x^3}{6 EJ} \left[4 + \frac{l_x C_t}{EJ}\right]}$
II 	$N_2 = -N_6 = \frac{1}{2}$ $N_4 = 0$	$T_2 = -T_6 = \frac{\left[\frac{2 C_t}{C_p l_x} + \frac{C_t^2}{2 EJ C_p}\right]}{\left[4 + \frac{C_p l_x^3}{6 EJ} + \frac{C_t l_x}{2 EJ}\right]}$ $T_4 = \frac{\left[\frac{2 C_t}{C_p l_x} + \frac{C_t l_x^2}{6 EJ}\right]}{\left[4 + \frac{C_p l_x^3}{6 EJ} + \frac{C_t l_x}{2 EJ}\right]}$
III 	$N_2 = N_6 = N_4(I)$ $N_4 = 1 - 2 N_2$	$-T_2 = T_4 = 2 T_2(II)$ $T_4 = 0$

3. 影響線を求める場合の行列式

支承間隔 l_x が広く、荷重 P の任意の位置で桁の応力を知るには P の移動による応力の変化を求めなければならない。静定基本形を 図-2 に取り、不静定力を S, M とする。 $S=1$ 、または $M=1$ の力のある切断点に作用させたとき S 及び M の作用方向の変位を求める (図-10)。(1)~(8) 式より

図-9

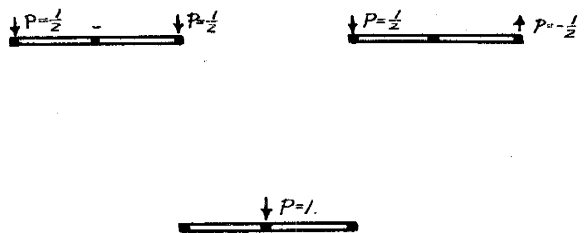
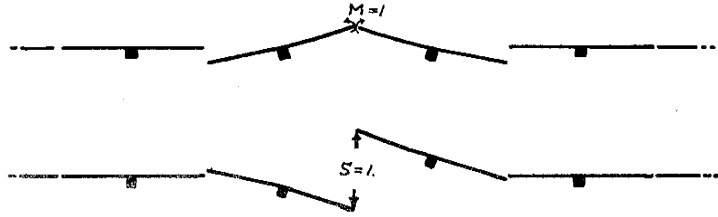


図-10 静定基本形と不静定力



	S_3	S_5	S_7	...	S_{2n-1}	M_3	M_5	M_7	...	M_{2n-1}
S_3	$\frac{1}{C_p}(2+\alpha+\beta l_x)$	$\frac{1}{2C_p}(-2+\beta l_x)$	0		0	$-\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$	0			
S_5	$\frac{1}{2C_p}(-2+\beta l_x)$	$\frac{1}{C_p}(2+\alpha+\beta l_x)$	$\frac{1}{2C_p}(-2+\beta l_x)$	0		$\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$	0	$-\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$		
S_7	0	$\frac{1}{2C_p}(-2+\beta l_x)$	$\frac{1}{C_p}(2+\alpha+\beta l_x)$	$\frac{1}{2C_p}(-2+\beta l_x)$			$\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$	0	$-\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$	
...										
S_{2n-1}			0	$\frac{1}{2C_p}(-2+\beta l_x)$	$\frac{1}{C_p}(2+\alpha+\beta l_x)$				$\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$	0
M_3	0	$\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$	0			$\frac{2}{C_t}(1+r)$	$-\frac{1}{C_t}$	0		
M_5	$-\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$	0	$\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$			$-\frac{1}{C_t}$	$\frac{2}{C_t}(1+r)$	$-\frac{1}{C_t}$	0	
M_7		$-\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$	0	$\frac{3\alpha}{2C_p l_x}$		0	$-\frac{1}{C_t}$	$\frac{2}{C_t}(1+r)$	$-\frac{1}{C_t}$	
...										
M_{2n-1}				$-\frac{3\alpha}{C_p l_x}$	0				$-\frac{1}{C_t}$	$\frac{2}{C_t}(1+r)$

.....(20)

不静定構造物の解を求めるには、上の(20)式で示される力と変位の関係式から出発する。変位と力との関係をマトリックスで与え、このマトリックスを解いて不静定力の影響線を求める。紙数の都合で詳細を省略する。

4. 近似解の一つの方法

径間 l_x が小さく、連続した径間ごとに応力が平均化されてくると、これを弾性床上の連続桁に考えることができる。径間での支持条件は $C_p/l_x = C_p'$, $C_t/l_x = C_t'$ とおいて、(1)~(4)式より変位を w として

$$\frac{dS}{dx} = -p(x) + C_p'w, \quad \frac{dM}{dx} = S - C_t' \frac{dw}{dx}$$

$M = -EJd^2w/dx^2$ を考慮すれば

$$EJ \frac{d^4w}{dx^4} + C_t' \frac{d^2w}{dx^2} + C_p'w = p(x) \quad \text{.....(21)}$$

$$M_x = -EJ \frac{d^2w}{dx^2}, \quad S_x = -EJ \frac{d^3w}{dx^3} - C_t' \frac{dw}{dx} \quad \text{.....(22)}$$

境界条件はこの連続桁の端部の支承状態で決定されるものである。

5. 後記

格子桁、鋼床版、箱桁等の応力計算に使用される諸種の計算の基本は、バネ支承で支持された連続桁の計算を基礎として行われている。設計計算に用いられる計算において、始めから理論式より始めることは非常に手段が多く、いたずらに複雑さを強調するのみと考えられる。以上述べた基本の式は、機会があれば取りまとめて数表の形で発表する予定である。

参 考 文 献

- 1) Homberg, Kreuzwerke: Berlin 1951 Springer.
- 2) Leonhardt Andrä: Die Vereinfachte Trägerrostberechnung. Stuttgart 1950 Hoffmann.
- 3) Trenks: Der unendlich lange Balken auf elastisch senk- und drehbaren Stützen. Bauingenieur 1956 Heft 7.
- 4) Klemp: Ein neues Verfahren der Trägerrostberechnung. Beton und Stahlbetonbau 1956 Heft 1, s 14.