

# 直交異方性平行四辺形板に対する階差方程式

— 斜桁橋の解析に対する寄与 —

正員 成 岡 昌 夫\*  
 正員 大 村 裕\*\*  
 准員 西 島 幸 利\*\*\*

## DIFFERENCE EQUATION FOR ORTHOGONAL ISOTROPIC PARALLELOGRAM PLATE—A CONTRIBUTION TO THE ANALYSIS OF SKEW SLAB AND BEAM BRIDGE

By Dr. Eng., Masao Maruoka, C.E. Member, Hiroshi Omura,  
 C.E. Member and Yukitoshi Nishijima C.E. Assoc. Member

**Synopsis:** The difference equation of the orthogonal isotropic parallelogram plate supported simply at the opposite two skew edges and supported by flexible beams at the other two edges was deduced for the interior general interior point, interior point near simple support, interior point near top edge, general edge point, interior point near sharp and blunt corner. As an example of the utilization, the natural frequency of lateral vibration of skew plate with the above edge conditions was calculated for the three skew angles  $0^\circ$ ,  $27^\circ 36'$  and  $45^\circ$ .

### 1. は し が き

斜桁橋に対する解析は、世界各国ともまだ不十分なようである。直桁橋を直交異方性板とみなして理論的あるいは実験的に解析することは、きわめて一般化されていて、Guyon-Massonnetの方法は周知となつている。これにくらべると、斜桁橋の解析はほとんど行われていない。

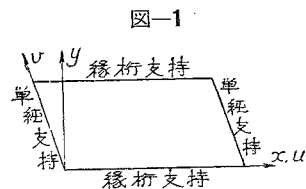
University of Illinois の N.M. Newmark 教授らは、長年手がけてきた Slab and Beam Highway Bridge に対する研究の Part 6 として、斜桁橋の解析を行つている<sup>1)</sup>。これは、さきに行つた直桁橋の場合と同じく、桁数 5 本の場合のもので、さきの場合と同様に、弾性はり（床板を支持する桁）に支えられる連続板理論によるものである。ただし、この場合は、解析的に求められないので、階差法によることとし、しかも、逆マトリックスの計算には ILLIAC を使用して、桁のたわみ、曲げモーメント、床板の曲げモーメントに対する影響係数を求めている。まことに労作であり、斜桁橋の理論的解析に対する貢献はきわめて大きい。

他にも A.W. Hendry と L.G. Jaeger の解析的研究<sup>2)</sup>があるが、前者にくらべると、大したことはないようである。

さて、斜桁橋の設計々算は、従来は、斜角を有すること、桁橋構造であることを考慮に入れずに、簡単に支点間をスパンとする桁として計算を行つているようであるが、早急に改めたいものと思う。

直桁橋に対して直交異方性板理論がきわめて都合よく適用されたので、斜桁橋に対しても、直交異方性平行四辺形板の理論を適用すればよい。この見地から、成岡および米沢は解析を行つたのであるが、直交座標による階差方程式を用いている<sup>3)</sup>。しかしながら、N.M. Newmark 教授が述べているように、斜桁橋ではやはり斜交座標による階差方程式を用いた方が好ましいと思う。

この見地から、直交異方性平行四辺形板の斜交座標による階差方程式を、特定の条件の下ではあるが求めたので、発表したいと思う。なお、ここに取り扱う平行四辺形板は、図-1 のように、相対する斜辺において単純支持され、他の二辺において縁桁で支持されるものとする。図の  $x, y$  方向が直交異方性の主軸と一致するものとし、 $u$  方向は  $x$  方向と一致し、 $v$  方向は単純支持辺の方向に一致するものとする。



\* 工学博士，京都大学教授，工学部土木工学教室， \*\* 神戸大学助教授，工学部土木工学教室，  
 \*\*\* 京都大学助手，工学部土木工学教室

2. 直交異方性板理論の概要<sup>1)</sup>

これについては、著者の一人が解説したことがあるが、以後の式の誘導に必要なことのみを述べると、次のようである。

たわみ曲面の微分方程式

$$\left. \begin{aligned} B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= p \\ 2H &= 4C + \nu_x B_y + \nu_y B_x, \quad 2C = (1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{B_x B_y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

曲げモーメントおよびねじりモーメント

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -B_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -B_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= -2C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\sqrt{B_x B_y} (1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

反力

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -B_x \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left( \frac{4C}{B_x} + \nu_y \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} \\ V_y &= -B_y \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left( \frac{4C}{B_y} + \nu_x \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

矩形板の場合では、簡単な境界条件の際には、式(1)は簡単に解けて、たわみ  $w$  が求められ、式(2)によつて曲げモーメントが計算できる。

3. 直交異方性平行四辺形板の斜交階差法による表示

(1) 注目する板内部の一点を 0 とし、図-2 のように skew network を設ける。 $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_u, \lambda_v$  は、図に示すように、点あるいは線間の距離である。

次に、図-3 のように、点  $P$  の直角座標および斜交座標による座標を  $(x, y)$  および  $(u, v)$  とする。

図-2 から、

$$\lambda_u = \lambda_x, \quad \lambda_v = \lambda_y / \cos \varphi \dots\dots\dots (a)$$

の関係がある。また、図-3 から

$$x = u - v \sin \varphi, \quad y = v \cos \varphi \dots\dots\dots (b)$$

である。従つて

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \cos \varphi \dots\dots (c)$$

ここで、ある関数  $f(u, v)$  を考える。この  $u, v$  には、式(b)の関係がある。従つて、

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \dots\dots\dots (d)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial v} \right) / \cos \varphi \dots\dots\dots (e)$$

全く同様にして、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) / \cos^2 \varphi \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right) / \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (f)$$

さて、図-2 において、 $(\partial^2 f / \partial u^2)_0, (\partial^2 f / \partial u \partial v)_0, (\partial^2 f / \partial v^2)_0$  が次のように表わされることは、周知のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right)_0 &= \frac{f_{1'} - 2f_0 + f_{1''}}{\lambda_u^2}, \quad \left( \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)_0 = \frac{f_{3'} - 2f_0 + f_{3''}}{\lambda_v^2} \\ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right)_0 &= \frac{-f_{1'2'} + f_{12} + f_{1'2''} - f_{12''}}{4 \lambda_u \lambda_v} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (g)$$

図-2

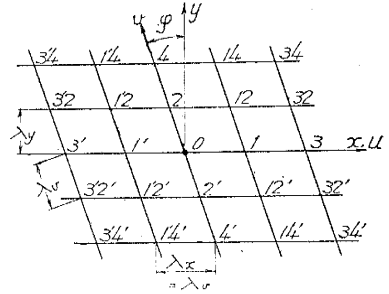
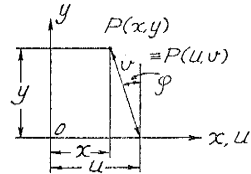


図-3



(2) 以上の誘導をもとにして、基礎式 (1) を skew network によつて階差方程式で表わすことを試みよう。なお、 $\kappa=H/\sqrt{B_x B_y}$  は、構造によつては、 $\kappa>1$ ,  $\kappa=1$ ,  $\kappa<1$ ,  $\kappa=0$  となるのであるが、本文では、 $\kappa=1$  の場合に限定する。この場合、式 (1) は次のようになる。

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{B_x B_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad \text{であるから、}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{\frac{B_y}{B_x}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{B_y}{B_x} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B_x} \quad \dots\dots\dots (4)$$

また、曲げモーメントおよび反力は次のようになる。

$$M_x = -B_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -B_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$V_x = -B_x \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left( 2\sqrt{\frac{B_y}{B_x}} - \nu_y \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}, \quad V_y = -B_y \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left( 2\sqrt{\frac{B_x}{B_y}} - \nu_x \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

(3) さて、 $B_y/B_x = \alpha^2$  とすれば、H. Marcus に従つて、式 (4) は次のように表わすことができる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p}{B_x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u \quad \dots\dots\dots (7), (8)$$

式 (7), (8) にさきの式 (g) を代入すれば、次のようになる。

$$A(U_{1'} + U_1) - 2(A + \alpha)U_0 + \frac{B}{2}(-U_{1'2} + U_{12} + U_{1'2'} - U_{12'}) + \alpha(U_{2'} + U_2) = \frac{\bar{p}_0 \lambda_y^2}{B_x} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$A(w_{1'} + w_1) - 2(A + \alpha)w_0 + \frac{B}{2}(-w_{1'2} + w_{12} + w_{1'2'} - w_{12'}) + \alpha(w_{2'} + w_2) = U_0 \lambda_y^2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

さて、上式の係数は次のようにして定義されたものである。

$$K = \lambda_y / \lambda_x, \quad A = K^2(1 + \alpha \tan^2 \varphi), \quad B = \alpha K \tan \varphi, \quad \alpha = \sqrt{B_y / B_x} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式 (9) の  $\bar{p}_0$  は点 0 に作用する荷重強度であるが、もし、点 0 に作用する荷重が、等分布荷重  $p$ ,  $x$  方向の単位長さあたり  $q_0$  の線荷重および集中荷重  $P_0$  よりなるものとすれば

$$\bar{p}_0 = p_0 + (q_0 / \lambda_y) + (P_0 / \lambda_x \lambda_y) = p_0 + (q_0 / \lambda_y) + (K P_0 / \lambda_y^2)$$

もし、点 0 が板の外縁すなわち縁桁上の点であれば、次のようになる。

$$p_0 = p_0 + (2 q_0 / \lambda_y) + (2 K P_0 / \lambda_y^2)$$

式 (9) および (10) をもとにして、適当に境界条件を入れて階差方程式を求めると、次のようになる。

a) 一般の内点 (図-2 参照)

式 (9) と (10) 式を組みあわせると、式 (12) が得られる。すなわち、点 0 を中心とする合計 25 の点のたわみ  $w$  によつて、点 0 における荷重強度  $\bar{p}_0$  (kg/cm<sup>2</sup>) に  $(\lambda_y / B_x)$  を乗じたものが表わされる。

$B^2/4$	$-\alpha B$	$\alpha^2 B^2/2$	$\alpha B$	$B^2/4$	} = $\frac{\bar{p}_0 \lambda_y^4}{B_x} \quad (12)$
$-AB$	$2(\alpha A + \alpha B + AB)$	$-4(\alpha^2 + \alpha A)$	$2(\alpha A - \alpha B - AB)$	$AB$	
$A^2 B^2/2$	$-4(\alpha^2 + \alpha A)$	$6\alpha + 8\alpha A + 6A^2 + B^2$	$-4(\alpha A + A^2)$	$A^2 - B^2/2$	
$AB$	$2(\alpha A - \alpha B - AB)$	$-4(\alpha^2 + \alpha A)$	$2(\alpha A + \alpha B + AB)$	$-AB$	
$B^2/4$	$\alpha B$	$\alpha^2 B^2/2$	$-\alpha B$	$B^2/4$	

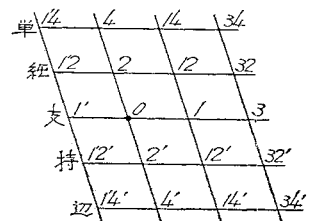
図-4

b) 斜辺に接する内点 (図-4 参照)

図-1 の直交異方性平行四辺形板において、辺  $u=0$  において単純支持の条件は、この辺にそつてたわみが 0 であることと、この辺に直角な方向の曲げモーメントが 0 であることである。しかし  $M_n=0$  は  $M_u=0$  であることを意味するから、 $M_u=0$  の条件から

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} (\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi) + 2\alpha \sin \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$$

となる (この誘導は省略する)。さて、



$$U = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} (\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi) + 2\alpha \sin \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right]$$

である。しかし、 $u=0$  の辺上では  $\partial^2 w / \partial v^2 = 0$  であるから、上の条件を用いると、辺  $u=0$  で単純支持であることは、

$$w=0, \quad U=0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

を意味することになる。

従つて、図-4 の内点 0 については、

$$w_{1'4} = w_{1'2} = w_{1'} = w_{1'2'} = w_{1'4'} = 0, \quad U_{1'2} = U_{1'} = U_{1'2'} = 0$$

とおけばよく、結局、式(14)のような階差方程式が得られる。また、右の単純支持辺に隣接する内点については、式(15)の階差方程式が得られる。

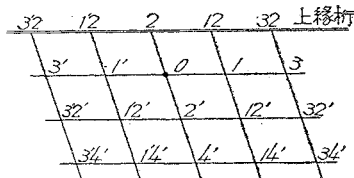
	単	$\alpha^2 B^2/4$	$\alpha B$	$B^2/4$	} = $\frac{\bar{P}_0 \lambda_y^4}{B_x}$ (14)
	種	$-4(\alpha^2 + \alpha A)$	$2(\alpha A - \alpha B - AB)$	$AB$	
	支	$6\alpha^2 + 8\alpha A + 5A^2 + B^2/2$	$-4(\alpha A + A^2)$	$A^2 - B^2/2$	
	持	$-4(\alpha^2 + \alpha A)$	$2(\alpha A + \alpha B + AB)$	$-AB$	
	辺	$\alpha^2 B^2/4$	$-\alpha B$	$B^2/4$	

	$B^2/4$	$-\alpha B$	$\alpha^2 B^2/4$	単	} = $\frac{\bar{P}_0 \lambda_y^4}{B_x}$ (15)
	$-AB$	$2(\alpha A + \alpha B + AB)$	$-4(\alpha^2 + \alpha A)$	種	
	$A^2 - B^2/2$	$-4(\alpha A + A^2)$	$6\alpha^2 + 8\alpha A + 5A^2 + B^2/2$	支	
	$AB$	$2(\alpha A - \alpha B - AB)$	$-4(\alpha^2 + \alpha A)$	持	
	$B^2/4$	$\alpha B$	$\alpha^2 B^2/4$	辺	

c) 縁桁に隣接する内点 (図-5 参照)

縁桁に隣接する内点 0 について考える。直交異方性平行四辺形板は曲げ剛さ  $E_b I_b$  縁桁で  $M_y=0, V_y = -E_b I_b (\partial^3 w / \partial x^3)$  となるように支持されているものとする。ここでは、まず、 $M_y=0$  の条件を用いる。

図-5



$$(M_y)_{\text{edge}} = -B_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\text{edge}} = -B_y \left[ \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{B_y}{B_x}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{\text{edge}} = 0$$

であるから

$$U_{\text{edge}} = \left( 1 - \nu_x \sqrt{\frac{B_y}{B_x}} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\text{edge}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。従つて、

$$C = (1 - \alpha \nu_x) K^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

とすれば、縁桁上の点 1'2, 2, 12 については、

$$U_{1'2} = -\frac{C}{\lambda_y^2}(w_{1'2} - 2w_{1'2} + w_0), U_0 = -\frac{C}{\lambda_y^2}(w_{1'2} - 2w_0 + w_{12}), U_{12} = -\frac{C}{\lambda_y^2}(w_{12} - 2w_{12} + w_2) \dots \dots (18)$$

となる。ゆえに 図-5 の内点 0 に対しては、1', 1'2', 0, 2', 1, 12' については、一般式 (10) を用い、縁桁上の点 1'2, 2, 12 については上の式 (18) を用いる。計算結果を整理すれば、式 (19) のようになる。

$$\left. \begin{array}{cccccc} -D/2 & \alpha A + \alpha B + \alpha C & -2\alpha^2 2\alpha A & \alpha A - \alpha B + \alpha C & D/2 & \text{上縁桁} \\ & +D & -2\alpha C & -D & & \\ \hline A^2 - B^2/4 & -4(\alpha A + A^2) & 5\alpha^2 + 8\alpha A + 6A^2 & -4(\alpha A + A^2) & A^2 - B^2/4 & \\ & +B^2/2 & & & & \\ \hline AB & 2(\alpha A - \alpha B - AB) & -4(\alpha^2 \alpha A) & 2(\alpha A + \alpha B + AB) & -AB & \\ \hline B^2/4 & \alpha B & \alpha^2 B^2/2 & -\alpha B & B^2/4 & \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{B_x} \lambda_y^4}{B_x} (19)$$

d) 縁桁上の一般点 (図-6 参照)

まず、 $M_y = 0$  の条件から、次式が成立することは明らかである。

$$U_{1'} = -\frac{C}{\lambda_y^2}(w_{1'} - 2w_{1'} + w_0), U_0 = -\frac{C}{\lambda_y^2}(w_{1'} - 2w_0 + w_1),$$

$$U_1 = -\frac{C}{\lambda_y^2}(w_0 - 2w_1 + w_3) \dots \dots (18)'$$

次に、縁桁上の他の境界条件は、板の縁に鉛直な反力が、縁桁には分布垂直荷重として伝わることである。

すなわち、

$$(V_y)_{\text{edge}} = -E_b I_b \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_{\text{edge}} \dots \dots (20) a$$

である。式 (6) より

$$V_y = -B_y \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left( 2\sqrt{\frac{B_x}{B_y}} - \nu_x - \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} \right]$$

$$= -B_y \left[ \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} \frac{\partial U}{\partial y} + \left( \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} - \nu_x \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

となる。従つて、縁桁上での第 2 の境界条件は

$$\left[ \frac{E_b I_b}{B_y} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} \frac{\partial U}{\partial y} - \left( \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} - \nu_x \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_0 = 0$$

これを少し整理して、次のようにおく。

$$\left[ \sqrt{\frac{B_y}{B_x}} \frac{E_b I_b}{B_y} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial U}{\partial y} - \sqrt{\frac{B_y}{B_x}} \left( \sqrt{\frac{B_x}{B_y}} - \nu_x \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_0 = 0 \dots \dots (20) b$$

さて、 $(\partial f / \partial y)_0 = (f_1 - f_3) / 2\lambda_y$  であつて、 $\beta = \lambda_y \tan \varphi$  であり、 $B' = (\lambda_y / \lambda_x) \tan \varphi$  とおいて

$$f_1 = f_2 + \frac{f_{12} - f_{1'2}}{2\lambda_x} \beta = f_2 + \frac{B'}{2}(f_{12} - f_{1'2}), f_3 = f_2' - \frac{f_{12}' - f_{1'2}'}{2\lambda_x} \beta = f_2' - \frac{B'}{2}(f_{12}' - f_{1'2}')$$

となるから、結局

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 = \frac{1}{2\lambda_y} \left[ \left\{ f_2 + \frac{B'}{2}(f_{12} - f_{1'2}) \right\} - \left\{ f_2' - \frac{B'}{2}(f_{12}' - f_{1'2}') \right\} \right]$$

となる。従つて、

$$\left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 = \frac{1}{2\lambda_y} \left[ \left\{ U_2 + \frac{B'}{2}(U_{12} - U_{1'2}) \right\} - \left\{ U_2' - \frac{B'}{2}(U_{12}' - U_{1'2}') \right\} \right]$$

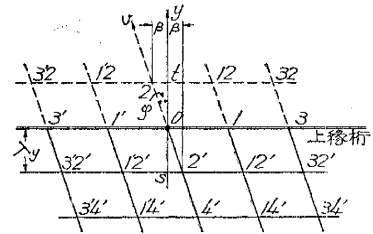
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\}_0 = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{K^2}{\lambda_y^2} (w_{1'} - 2w_0 + w_1) \right\} = \frac{K^2}{2\lambda_y^3} \left[ \left\{ w_{1'2} + \frac{B'}{2}(w_2 - w_{3'2}) \right\} \right]$$

$$- \left\{ w_{1'2}' - \frac{B'}{2}(w_{2'} - w_{3'2}') \right\} - 2 \left\{ w_2 + \frac{B'}{2}(w_{12} - w_{1'2}) \right\} - 2 \left\{ w_2' - \frac{B'}{2}(w_{12}' - w_{1'2}') \right\}$$

$$+ \left\{ w_{12} + \frac{B'}{2}(w_{32} - w_2) \right\} - \left\{ w_{12}' - \frac{B'}{2}(w_{32}' - w_2') \right\} \right]$$

をうる。これらを式 (20) に代入し、両辺に  $\lambda_y^3$  を乗じ、さらに、 $\alpha = \sqrt{B_y / B_x}$  を乗ずるものとすれば、

図-6



$$\begin{aligned}
 & J(w_3' - 4w_1' + 6w_0 - 4w_1 + w_3) - \frac{\lambda_y^2}{2} \left[ \left\{ \alpha U_2 + \frac{B}{2}(U_{12} - U_{1'2}) \right\} \right. \\
 & - \left. \left\{ \alpha U_2' - \frac{B}{2}(U_{12}' - U_{1'2}') \right\} \right] - \frac{C}{2} \left[ \left\{ \alpha w_{1'2} + \frac{B}{2}(w_2 - w_{3'2}) \right\} - \left\{ \alpha w_{1'2}' - \frac{B}{2}(w_2' - w_{3'2}') \right\} \right] \\
 & - 2 \left\{ \alpha w_2 + \frac{B}{2}(w_{12} - w_{1'2}) \right\} + 2 \left\{ \alpha w_2' - \frac{B}{2}(w_{1'2}' - w_{1'2}') \right\} + \left\{ \alpha w_{12} + \frac{B}{2}(w_{32} - w_2) \right\} \\
 & - \left. \left\{ \alpha w_{1'2}' - \frac{B}{2}(w_{32}' - w_2') \right\} \right] = 0
 \end{aligned}$$

ただし、 $J = (\lambda_y/\lambda_x)^4 E_b I_b / \lambda_y B_x = K^4 E_b I_b / \lambda_y B_x$  である。

しかるに、式(9)から

$$\alpha U_2 + \frac{B}{2}(U_{12} - U_{1'2}) = \frac{\bar{F}_0 \lambda_y^2}{B_x} - A(U_1 + U_{1'}) + 2(A + \alpha)U_0 - \frac{B}{2}(U_{1'2}' - U_{12}') - \alpha U_2'$$

であるから、これを上式に代入して、

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{F}_0 \lambda_y^4}{2B_x} &= J(w_3' - 4w_1' + 6w_0 - 4w_1 + w_3) + \lambda_y^2 \left\{ \alpha U_2' - \frac{B}{2}(U_{12}' - U_{1'2}') \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} A \lambda_y^2 (U_1 + U_{1'}) - \lambda_y^2 (A + \alpha) U_0 - \frac{C}{2} \left[ \left\{ \alpha w_{1'2} + \frac{B}{2}(w_2 - w_{3'2}) \right\} \right. \\
 &- \left. \left\{ \alpha w_{1'2}' - \frac{B}{2}(w_2' - w_{3'2}') \right\} \right] - 2 \left\{ \alpha w_2 + \frac{B}{2}(w_{12} - w_{1'2}) \right\} + 2 \left\{ \alpha w_2' - \frac{B}{2}(w_{1'2}' - w_{1'2}') \right\} \\
 &+ \left. \left\{ \alpha w_{12} + \frac{B}{2}(w_{32} - w_2) \right\} - \left\{ \alpha w_{1'2}' - \frac{B}{2}(w_{32}' - w_2') \right\} \right] \dots \dots \dots (21)
 \end{aligned}$$

これが、縁桁上の一般点に対する基礎式である。 $U_{1'2}', U_2', U_{12}'$  については式(10)を、 $U_{1'}, U_0, U_1$  については、式(18)'を用いる。

以上の計算結果を整理すると式(22)が得られる。

	+J	-4J	-3C <sup>2</sup>	6AC+6J	-4J	+J	上移桁	} = $\frac{\bar{R} \lambda_y^4}{2B_x}$ (22)
-B <sup>2</sup> /4 - C <sup>2</sup> /2 + AC	D/2	αA - αB + αC	-D	-2(α <sup>2</sup> + αA + αC)	αA + αB + αC	-D/2		
B <sup>2</sup> /4	αB	α <sup>2</sup> - B <sup>2</sup> /2	-αB	B <sup>2</sup> /4				
-2αC + 2C <sup>2</sup> - 4AC	α <sup>2</sup> + αC + B <sup>2</sup> /2	-2αC + 2C <sup>2</sup> - 4AC	-B <sup>2</sup> /4 - C <sup>2</sup> /2 + AC					

もし、自由支持の場合には、 $J=0$  とおけばよろしい。

e) 鋭角隅と単純支持辺に隣接する一般内点 (図-7 参照)

図-7の点0に対しては、式(9),(10)を用い、かつ、境界条件より、次のようにおく。

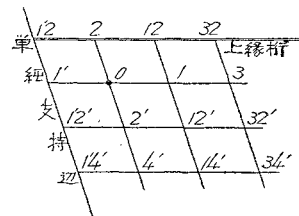
$$\begin{aligned}
 w_{1'2} = w_1' = w_{1'2}' = w_{1'2} = 0, \quad U_{1'2} = U_1' = U_{1'2}' = 0 \\
 U_2 = C(w_{12} - 2w_2) / \lambda_y^2, \quad U_{12} = C(w_2 - 2w_{12} + w_{32}) / \lambda_y^2
 \end{aligned}$$

この結果、式(23)が得られる。

単	-2α <sup>2</sup> - 2αA - 2αC	αA - αB + αC	D/2	上移桁	} = $\frac{\bar{R} \lambda_y^4}{B_x}$ (23)
桁	+D/2 - AB	-D	A <sup>2</sup> - B <sup>2</sup> /4		
支	5α <sup>2</sup> + 8αA + 5A <sup>2</sup> + B <sup>2</sup> /4	-4(αA + A <sup>2</sup> )	-AB		
持	-4(α <sup>2</sup> - αA)	2(αA - αB + AB)	-AB		
辺	α <sup>2</sup> - B <sup>2</sup> /4	-αB	B <sup>2</sup> /4		

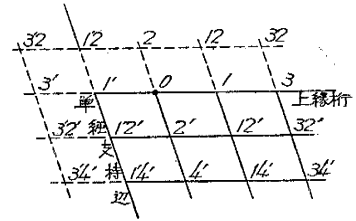
なお、鈍角隅と単純支持辺に隣接する内点に対しては、次の式(24)が得られる。

図-7



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 -D/2 & \alpha A + \alpha B + \alpha C & -2\alpha^2 2\alpha A - 2\alpha C & \\
 \hline
 \text{上縁桁} & +D & -D/2 & +AB \\
 \hline
 A^2 - B^2/4 & -4(\alpha A + \alpha^2) & 5\alpha^2 + 8\alpha A + 5A^2 & \\
 \hline
 & & & +B^2/4 \\
 \hline
 AB & 2(\alpha A - \alpha B - AB) & -4(\alpha^2 + \alpha A) & \\
 \hline
 & & & \\
 \hline
 B^2/4 & \alpha B & \alpha^2 B^2/4 & \\
 \hline
 \text{下縁桁} & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|c|}} \right\} = \frac{\bar{R}_x \lambda_y}{B_x} \quad (24)$$

図-8



f) 鋭隅角に隣接する縁桁上の点 (図-8 参照)

式 (21) を適用する。この場合の境界条件として、次のようにおく、

$$w_{1'} = w_{1'2'} = w_{1'4'} = 0, \quad U_{1'} = U_{1'2'} = 0$$

$$U_0 = C(w_1 - 2w_0)/\lambda_y^2, \quad U_1 = C(w_0 - 2w_1 + w_3)/\lambda_y^2$$

次に、図-8 に示す仮想点については、1'2' は単純支持辺の延長上にあるから、 $w_{1'2'} = 0$  であり、かつ  $U_{1'} = 0$ 、 $w_{1'} = 0$  から、 $w_{3'} = -w_0$  となる。 $w_{3'} = -w_0$  は直交異方性板を支持する縁桁が両端単純支持であることから得られる。なお、次式が成立する。

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{1'} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{1'2'} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{1'4'} \right\}$$

$$\therefore (w_0 - w_{3'})/2\lambda_x = (1/2) \{ (w_2 - w_{3'2'}) + (w_2' - w_{3'2'}) \}/2\lambda_x$$

しかるに、 $w_{3'} = -w_0$  であるから

$$4w_0 = (w_2 - w_{3'2'}) + (w_2' - w_{3'2'}) \quad \dots \dots \dots (25)$$

すなわち、縁桁上の一般点に対すると同様の計算を行い、式 (21) の C の係数の第 5, 6 項が式 (25) で消失する。計算結果は式 (26) のようである。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \alpha^2 4\alpha C + B^2/4 - 5C^2/2 & -2\alpha C + 2C^2 4\alpha C - 4J & -B^2/4 - C^2/2 + AC + J & \\
 \hline
 \text{上縁桁} & +5AC - BC + 5J & & \\
 \hline
 -2\alpha^2 2\alpha A - 2\alpha C + D/2 & \alpha A + \alpha B + \alpha C + D & -D/2 & \\
 \hline
 \text{単} & & & \\
 \text{支} & -AB & & \\
 \text{持} & & & \\
 \text{辺} & \alpha^2 B^2/4 & -\alpha B & B^2/4 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|c|}} \right\} = \frac{\bar{R}_x \lambda_y}{2B_x} \quad (26)$$

また、鈍角隅に隣接する縁桁上の点については、式 (27) のようになる。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 -B^2/4 - C^2/2 + AC + J & -2\alpha C + 2C^2 4\alpha C - 4J & \alpha^2 4\alpha C + B^2/4 - 5C^2/2 & \\
 \hline
 \text{上縁桁} & +5AC + BC + 5J & & \\
 \hline
 D/2 & \alpha A - \alpha B + \alpha C - D & -2\alpha^2 2\alpha A - 2\alpha C - D/2 + AB & \\
 \hline
 \text{単} & & & \\
 \text{支} & & & \\
 \text{持} & B^2/4 & \alpha B & \alpha^2 B^2/4 \\
 \hline
 \text{下縁桁} & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|c|}} \right\} = \frac{\bar{R}_x \lambda_y}{2B_x} \quad (27)$$

(4) 以上で各点に対する階差方程式の計算を終了したのであるが、係数を再記すると、次のようである。

$$\alpha = \sqrt{B_y/B_x}, \quad K = \lambda_y/\lambda_x$$

$$A = K^2(1 + \alpha \tan^2 \varphi), \quad B = \alpha K \tan \varphi, \quad C = (1 - \alpha \nu_x) K^2, \quad J = K^4(E_b I_b/\lambda_y B_x)$$

もし、 $\nu_x = \nu_y = 0$  と仮定するならば、 $C = K^2$  となる。

以上は、 $\kappa = H/\sqrt{B_x B_y} = 1$  の場合に対する公式であることに注意されたい。

なお、式 (12), (14), (15), (19), (22), (23), (24), (26), (27) に  $\alpha = 1$  を代入すれば、N.M. Newmark の誘導した式と一致する。これによつて、上式の誤りを換算できる。なお、曲げモーメントの計算は簡単であるので、省略する。

#### 4. 直交異方性板の skew network による階差方程式の応用

さきに述べたように、Guyon-Massonnet の方法はあまりにも有名であるが、上記の階差方程式を応用すれば、斜角のある場合の distribution coefficient が求められるわけである。

ただし、この計算は影響係数を求めるものであるから、単に多元連立一次方程式の右辺の値を与えて方程式を解

くのではなく、左辺の係数よりなるマトリックスの逆マトリックスを求める必要がある。これは digital computer を用いて始めて可能である<sup>3)</sup>。著者らは、種々の digital computer によつて、 $K$  の種々の値、(スパン)/(幅員) の種々の値、斜角 ( $\varphi$ ) の種々の値、 $a = \sqrt{B_y/B_x}$  の種々の値に対する計算を行つて、斜角ある場合の distribution coefficient を求めようと目下努力しており、いずれ公表したいと考えている。

もつとも上記は  $\kappa=1$  の特殊な場合に対するものにすぎないが、 $\kappa=1$  以外の値に対する階差方程式も誘導している。

計算例 図-9 のような  $B_x/B_y=64$ ,  $a/b=1$  の直交異方性板の固有振動数を  $\kappa=1$  と仮定して求めてみよう<sup>4)</sup>。この場合、図のように skew network を設けて、図のようにたわみを仮定して、iteration によつて固有値を求めた。参考までに、 $\varphi=45^\circ$  の場合の行列式の元素を示すと、次のようである。ただし、 $\lambda = \rho b^2 y^4 / B_x$  である。

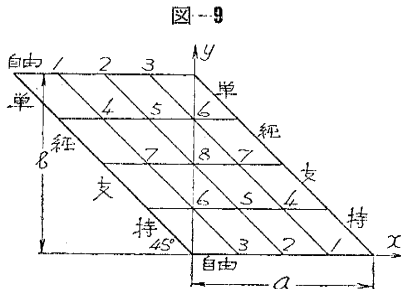


図-9

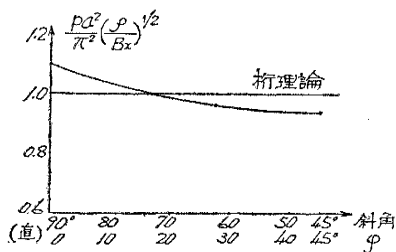
この計算のねらいは、斜桁橋の固有振動数が直桁橋のそれとくらべて、斜角によつていかに変化するかを知るにある。

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$
901-128 $\lambda$	-704	159	-146	140	-34	4	-4
-704	1094-128 $\lambda$	-704	-4	-144	140	0	2
159	-704	901-128 $\lambda$	34	-4	-142	4	4
-146	-4	34	1930-256 $\lambda$	-144	326	-196	152
140	-144	-4	-144	2256-256 $\lambda$	-1436	144	-160
-34	140	-142	263	-1436	1930-256 $\lambda$	-124	-8
4	0	4	-196	144	-124	2256-256 $\lambda$	-1440
-4	2	4	152	-160	-8	-1440	1130-128 $\lambda$

計算の結果を、 $\varphi=0$  (直),  $\varphi=27^\circ 36'$  ( $\approx 30^\circ$ ),  $\varphi=45^\circ$  の三つの場合に対して、 $\mu = (ba^2/\pi^2)(\rho/B_x)^{1/2}$  として、 $\mu$  の値を示すと、図-10 のようである。

なお、直角の直交異方性板としての正解値は、階差法による近似値より 5% 大きい。従つて、 $\varphi=30^\circ \sim 45^\circ$  の場合は  $\mu \approx 1.0$  となりそうである。しかし、これからして、斜桁橋の固有振動数を有理論で求めてよいということにはならない。要は、直桁橋の固有振動数は、斜桁橋のそれと、相当に違うのである。

図-10



### 5. むすび

直桁橋に対する直交異方性板理論の適用を、さらに、斜桁橋の場合に拡張すべく、相対する斜辺で単純支持され、他の二辺で自由、あるいは、縁桁で支持された、直交異方性平行四辺形板の skew network による階差方程式を、 $\kappa = H/\sqrt{B_x B_y} = 1$  の場合に対して求めたものである。斜等方性平板に関する研究は、斜スラブ橋の問題と関連して少なくはないが、斜桁橋となると、寥々たるものであるので、最近の digital computer の進歩を利用して、斜桁橋の構造力学に貢献したいと考えている。今回の報告はこの第1報である。

### 参考文献

- 1) T.Y.Chen, C.P. Siess and N.M. Newmark: Studies of Slab and Beam Highway Bridges, Part 6. Moments in Simply Supported Skew I-Beam Bridges, University of Illinois Bulletin, No.439 (1957)
- 2) A.W. Hendry and L.G. Jaeger: The Analysis of Certain Interconnected Skew-Bridge Girders: Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Paper No. 6129, 6. 1 (1957. 1) p. 79.
- 3) 米沢: 直交異方性板理論の斜桁橋構造への適用に関する研究, 土木学会誌, 40, 10 (昭.30.10), p. 501  
M. Naruoka and H. Yonezawa: Über die Anwendung der Biegetheorie orthotroper Platten auf die Berechnung schiefer Balkenbrücken, Bauingenieur, 32. 10 (1957. 0), S. 391.
- 4) 成岡: 直交異方性板の曲げ理論とその応用, 土木学会誌, 41, 10 (昭.31.10), p. 1.
- 5) 成岡, 松純: 計数型継電器式電気計算機と応用力学問題への応用, 土木学会誌, 42, 9 (昭.32.9), p. 9.
- 6) 米沢: 直交異方性板理論による桁橋構造の自由振動に関する研究, 土木学会誌, 40, 2 (昭.30.2), p. 59  
M. Naruoka and H. Yonezawa: A Study of the Period of the Free Lateral Vibration of the Beam Bridge by the Theory of the Orthotropic Rectangular Plate-Ing. Archiv, 26. 1 (1958. 1), S. 20. (昭.33.9.4)