

# Boussinesq 方程式を用いた円筒形同調液体ダンパーの非線形スロッシング解析

若原 敏裕<sup>1</sup>・藤野 陽三<sup>2</sup>・野村 卓史<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工修 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒160 東京都文京区本郷七丁目 3-1)

<sup>2</sup>フェロー Ph.D. 東京大学 教授 工学系研究科社会基盤工学専攻

<sup>3</sup>正会員 工博 日本大学 助教授 理工学部 土木工学科

Boussinesq 方程式を用いた円筒形同調液体ダンパー (TLD) の非線形スロッシング解析モデルについて検討を行った。まず、Boussinesq 方程式による任意形状 3 次元容器のスロッシング現象に対する解析理論を説明し、有限要素法による空間方向の離散化と応答の数値積分法に関する説明を行った。次に、浅水領域の円筒形 TLD に対する振動実験を行い、スロッシングによって生じる TLD の流体反力の非線形な振動特性について考察した。また、実験結果と解析結果の比較を行い本解析モデルの妥当性を示すとともに、有限要素の分割数が解析結果に与える影響についての検討も行った。最後に、数値解析によって求められた TLD 流体反力の応答曲線と位相曲線および水面形状から、波の非線形性が円筒形 TLD の流体反力に及ぼす影響について考察した。

**Key Words :** Boussinesq equation, tuned liquid damper, FEM, nonlinear sloshing, circular tank, vibration control, wind-induced vibration

## 1. はじめに

同調液体ダンパー (Tuned Liquid Damper : 以下、TLD) は容器内のスロッシング現象を利用した受動的な制振装置の一つであり<sup>1)</sup>、主にタワーや高層建物などの風による振動を抑える目的で、いくつかの構造物に対して実用化されている<sup>2)~7)</sup>。

一般に、TLD のような同調系ダンパーでは、制振性能の安定性と効率との兼ね合いから、浅い水深を用いて構造物の固有振動数に同調させ、容器底面や側面での摩擦による減衰効果を得る場合が多い。このような TLD では、容器内の波高と水深の比が相対的に大きくなるため、制振力として作用する TLD の流体反力は波の非線形性の影響を強く受ける。したがって、実際の構造物に対して TLD を適用する場合、設計時に TLD の制振力の非線形特性を十分に把握しておく必要がある。また、制振効果をあらかじめ予測する場合には、相似律の観点から、TLD と構造物を連成させた状態での実験が困難な場合が多く、TLD の非線形スロッシング解析モデルと構造解析モデルを連成させた相互作用モデルによる数値シミュレーションが必要となる。

これまでに提案されている TLD の非線形解析モデルを分類すると、浅水波方程式や Boussinesq 方程式に基づくものと非線形ポテンシャル理論を用いたものに分けられる。浅水波方程式を用いたものとしては清水、葉山<sup>8)</sup>の解析理論を応用した Sun, L.M. ら<sup>9)10)</sup>のモデルが代表的であり、また、Boussinesq 方程式を用いた

ものには Kaneko ら<sup>11)</sup>のモデルがある。いずれも、構造物との相互作用を考慮した TLD-構造系の調和応答を予測する解析方法の提案を行っている。また、非線形ポテンシャル理論を用いたものには、大山、藤井<sup>12)</sup>の境界要素法モデルが挙げられ、若原ら<sup>13)</sup>はこの解析モデルを応用した TLD-多自由度構造系の風外力によるランダム応答を求める解析方法の提案を行っている。これらの解析モデルは、いずれも矩形容器内の 2 次元スロッシング現象を対象とした解析モデルであり、振動方向が 1 方向にのみ卓越するような振動に対してのみ適用可能な解析手法である。

実際の風によるタワーや高層建物の応答について考察すると、一般には、風向方向と風向直角方向の 2 方向の水平外力を受け、また、構造物の平面形状によっては振り外力の影響も加わるため、その応答特性は必ずしも 1 方向に卓越するとは言えず、むしろ、応答の平面的な軌跡は、風向方向と風向直角方向に  $\pi/2$  程度の位相差を持った円軌道あるいは風向直角方向に長い楕円軌道となることが知られている<sup>14)</sup>。このような多方向入力に対して有効であるという観点から、これまでに実用化されている TLD は円筒容器を用いたものが多い<sup>2)~4)</sup>。したがって、実際の風外力に対して円筒形 TLD の制振効果に関する検討を行う場合には、構造物の風向方向と風向直角方向の応答に相当する水平 2 方向の同時入力が可能で、円筒容器内の 3 次元スロッシング現象を考慮できる解析モデルが必要となる。

従来、円筒容器のスロッシング問題は、宇宙船や打

ち上げ用ロケットの推進燃料タンクの設計<sup>15)</sup>、あるいは、液体貯蔵容器の耐震設計<sup>16)</sup>と言う立場から論じられることが多く、いずれも、深い水深のスロッシング現象を解析の対象とした研究がほとんどである。

円筒容器の浅水波領域での非線形スロッシング解析モデルに関する研究は、矩形容器のそれと比較して少なく、たとえば、石橋、葉山<sup>17)</sup>による浅水波理論に基づく解析モデルと大山<sup>18)</sup>による非線形ポテンシャル理論に基づいた境界要素法モデルが挙げられる。石橋らのモデルは、清水ら<sup>8)</sup>のモデルを3次元に拡張したものであり、差分法に基づく解析モデルである。非線形分散効果を計算結果に反映させるため、非分散性の離散化で生じる数値的な固有値が線形理論から求められる高次の固有振動数と対応するように離散化を行うものである。ただし、関連する全ての高次振動数と離散化による数値的な固有値を整合させる場合には、極めて複雑な離散化となる。大山の解析モデルは、彼の提案する数値波動水槽の基本となった3次元非線形波動解析法<sup>19)</sup>をスロッシング問題に応用したもので、非線形性が強い波動場までの解析が可能手法であり、実験結果と数値解析結果が良く対応することが示されている<sup>18)</sup>。ただし、この解析方法では、時刻ステップ毎に自由表面の境界条件を満足させるための収束計算が必要であり、収束計算の回数分だけ境界要素分割に応じた自由度で構成される連立1次方程式を解かなければならない。そのため、この解析モデルを用いて、TLDと構造物の連成応答を予測し、その制振効果について設計的な検討を行う場合のように<sup>20)</sup>、評価時間が長い解析をパラメトリックに行う場合には、極めて多くの計算負荷を生じる。

本研究は、Boussinesq 方程式を用いた円筒形TLDの非線形スロッシング解析モデルについて検討を行ったものである。Boussinesq 方程式を用いることにより、非線形性とそれに伴う分散性を同時に考慮できる。また、この解析方法は、3次元のスロッシング問題を平均流速場で記述される Boussinesq 方程式と連続方程式を用いて平面2次元問題に置換する方法であるため、上記のような3次元の流速場を直接解く流体解析法と比較して、実用上の計算負荷をある程度まで抑えることが可能である。

まず、本研究では、Boussinesq 方程式を用いた任意形状容器のスロッシング現象に対する解析理論を説明し、有限要素法による空間方向の離散化と応答の数値積分法に関する説明を行う。次に、1方向入力条件下での浅水領域の円筒形 TLD に対する振動実験を行い、スロッシングによって生じる TLD の流体反力の振動特性を把握する。また、実験結果と解析結果の比較を行い本解析モデルの妥当性を示すとともに、有限要素の分割数

が解析結果に与える影響についての検討も加える。さらに、数値解析によって得られた TLD 流体反力の応答と位相特性から、波の非線形性が円筒形 TLD の流体反力にどのような影響を及ぼすかについて考察する。最後に、共振時の1周期分の空間的な水面形状を追跡し、円筒形 TLD 内の非線形波動の特徴について論じる。

## 2. 解析理論

### (1) 基礎方程式の定式化

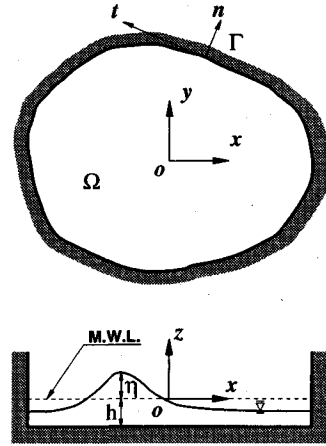


図-1 解析モデルの座標系の定義

図-1に示すような任意な平面形状を有する容器内の流体運動を考え、 $x-y$ 平面が静水面と同じになるような座標系を考えることにする。 $x, y, z$ 軸の流速をそれぞれ  $u, v, w$  とした時、連続方程式および運動方程式は、以下のように表される。なお、流体粘性の影響は後で考慮することにし、ここでは含めない。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \ddot{X}_A \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ddot{Y}_A \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (4)$$

ここで、 $p$  は圧力、 $\ddot{X}_A, \ddot{Y}_A$  はそれぞれ  $x, y$  軸方向の加振加速度であり、 $g$  は重力加速度を表す。また、静止時の水深を  $h$ 、液面変位を  $\eta$  で表すと、自由表面と底面における境界条件は、次式のように表される。

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (z = \eta) \quad (5a)$$

$$p = 0 \quad (z = \eta) \quad (5b)$$

$$w = 0 \quad (z = -h) \quad (5c)$$

いま、弱非線形、弱分散性を仮定し、 $u, v$  および  $\eta$  はともに 1 次の微小量とし、高次の微小項を無視するものとする。いま、次式で表される平均流速:

$$\bar{u} = \frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} v dz \quad (6)$$

を導入し、式 (1) を  $z = -h$  から  $z = \eta$  まで積分する。Leibnitz の定理を用いた後、境界条件式 (5a)(5c) を適用すると、平均流速  $\bar{u}, \bar{v}$  および液面変位  $\eta$  を用いた連続方程式が次式のように求められる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h+\eta) \bar{u} \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (h+\eta) \bar{v} \} = 0 \quad (7)$$

次に、平均流速  $\bar{u}, \bar{v}$  で表される運動方程式について考える。浅水波を仮定し、鉛直方向の流速分布  $w(z)$  が境界条件式 (5a) を満足する線形分布とする。境界条件式 (5a)(5b) を考慮して、移流項を無視した式 (4) を  $z = -h$  から  $z$  まで積分すれば、

$$\frac{p(z)}{\rho} = g(\eta - z) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \cdot \frac{(\eta - z)(2h + \eta + z)}{2(h + \eta)} \quad (8)$$

を得る。さらに、これを式 (2)(3) に代入した後、 $z = -h$  から  $\eta$  まで積分し両辺を  $h + \eta$  で割ると、次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} + \ddot{X}_A = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{h}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial y \partial t^2} + \ddot{Y}_A = 0 \quad (10)$$

式 (7) を時間  $t$  で微分し、高次の微小項を無視すれば、以下の関係式:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + h \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right) = 0 \quad (11)$$

が得られ、これを式 (9)(10) に代入すると、次式のように、平均流速  $\bar{u}, \bar{v}$  および液面変位  $\eta$  からなる運動方程式が求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \ddot{X}_A \\ = \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x \partial y \partial t} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \ddot{Y}_A \\ = \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial y^2 \partial t} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

この運動方程式 (12)(13) は浅水波に対する Boussinesq 方程式と呼ばれるもので<sup>21)</sup>、波の非線形性と分散性を同時に考慮できる基礎方程式である。式 (12)(13) において、その右辺が波の分散性を表す Boussinesq 項であり、波頂曲率に関する圧力補正項となっている。

容器側壁に対する境界条件は、境界  $\Gamma$  上での法線方向の流速成分  $\bar{u}_n$  が 0 であるとすれば、

$$\bar{u}_n = \bar{u}_b n_x + \bar{v}_b n_y = 0 \quad (14)$$

のように表される。なお、 $\bar{u}_b, \bar{v}_b$  は境界  $\Gamma$  上の平均流速を表し、 $n_x, n_y$  は各々境界上に立てた外向法線ベクトル  $n$  の  $x, y$  方向成分である。

これより、境界条件式 (14) のもと、連続方程式 (7) と Boussinesq 方程式 (12)(13) を連立させ、平均流速  $\bar{u}, \bar{v}$  および液面変位  $\eta$  に関して解くことにより、任意形状を有する容器内の波動場を平面 2 次元問題として解析することができる。

## (2) 減衰項の導入

実際の流体では粘性を持つため境界との間に流体運動に伴う摩擦が生じる。ここでは、この影響による減衰効果を流速に比例した減衰項として評価する。

いま、領域  $\Omega$  の容器底面および自由表面に対して、減衰係数  $\gamma_B$  を定義し、 $x, y$  方向の平均流速  $\bar{u}, \bar{v}$  に比例する減衰項  $\gamma_B \bar{u}$  および  $\gamma_B \bar{v}$  を運動方程式 (12)(13) に導入する。また、容器側壁に対して、減衰係数  $\gamma_W$  を定義し、境界  $\Gamma$  上での接線方向の流速成分:

$$\bar{u}_t = -\bar{u}_b n_y + \bar{v}_b n_x \quad (15)$$

に比例する減衰項  $\gamma_W \bar{u}_t$  を導入する。

Miles は円筒容器のスロッシングの基本モードに対する減衰係数を求めており<sup>22)</sup>、その減衰係数に対して浅水波近似を適用すれば、浅い水深の円筒容器の減衰係数  $\gamma_C$  は、

$$\gamma_C = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2}} \{ 1 + (\varepsilon_{11} - 1) \frac{h}{R} + S \} \quad (16)$$

と表される。ここに、 $\nu$  は液体の動粘性係数、 $\omega$  は円振動数、 $R$  は円筒容器の半径であり、 $S$  は Miles により提案された surface contamination の影響を表す係数である<sup>22)</sup>。また、 $\varepsilon_{mn}$  は、 $\partial J_m(\varepsilon)/\partial r = 0$  の  $n$  番目の正根 ( $J_m(\varepsilon)$ : 第 1 種  $m$  次の Bessel 関数) を意味し、ここでは、円筒容器のスロッシングの基本モード、すなわち、周方向 1 次 ( $m = 1$ )、半径方向 1 次 ( $n = 1$ ) のモードを対象としているため、 $\varepsilon_{11} = 1.841$  となる。

式 (16) 中の右辺第 1 項は、底面におけるせん断力係数を意味し、正弦波加振状態での底面での層流境界層の解析解に基づき、1 周期のせん断力エネルギーが等しくなるように等価線形化して求められたものである。また、式 (16) 中の右辺第 2 項は、容器側壁の影響を近似的に評価したものであり、同じく、第 3 項は、自由表面での減衰を評価したものである。この右辺第 3 項の  $S$  は理論的には 0 から 2 の間をとり得るが、Lepelletier ら<sup>23)</sup>、大山ら<sup>12)</sup>、Sun, L.M. ら<sup>9)</sup> の矩形容器の 2 次元スロッシング現象の解析を行う際に、fully contaminated surface に対応した  $S = 1$  として問題ないことが、彼らの行った解析結果と実験値の比較から示されており、本研究においても  $S = 1$  を採用することにした。

いま、底面と自由表面に対する減衰係数  $\gamma_B$  および側壁に対する減衰係数  $\gamma_W$  の評価に関して、式 (16) を参

考に各々の項の影響を考慮し、

$$\gamma_B = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} (1+S) \quad (S=1) \quad (17a)$$

$$\gamma_W = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} (\varepsilon_{11}-1) \frac{h}{R} \quad (17b)$$

とした。すなわち、式(17a)の底面と自由表面での減衰係数 $\gamma_B$ に対しては、式(16)の右辺第1項と第3項を用い、また、式(17b)の容器側壁での減衰係数 $\gamma_W$ に対しては、式(16)の右辺第2項を用いたことになる。

以上の検討に基づいて、式(12)(13)に減衰項を導入すると、次式の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \ddot{X}_A + \gamma_B \bar{u} \\ = \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x \partial y \partial t} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \ddot{Y}_A + \gamma_B \bar{v} \\ = \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial y^2 \partial t} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

なお、容器側壁に対する減衰は、空間方向の離散化の後、境界 $\Gamma$ 上の節点流速に対して考慮することにする。

### (3) 有限要素方程式

空間方向の離散化は有限要素法を用いて行う。有限要素として1次の三角形要素を用いる。このとき、未知変数を $\phi$ で代表させ各節点での値をそれぞれ $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ とし、3点の座標値を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ とすると、未知変数 $\phi$ は基底関数を用いて次式のように近似することができる。

$$\phi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 \quad (20)$$

ここに、

$$N_i = \frac{1}{2\Delta_E} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (i=1, 2, 3) \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_j - x_k \end{aligned} \right\} (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (22)$$

であり、 $\Delta_E$ は三角形要素の面積を表す。

連続方程式(7)とBoussinesq方程式(18)(19)に対してGalerkin法を適用し重み付き残差方程式を求め、重み関数として式(20)で表される未知変数 $\phi$ と同じ関数を用いれば、各々の要素に対する有限要素方程式は、総和規約を用いて以下のように導かれる。

$$\begin{aligned} M_{ki} \dot{\eta}_i + K^x{}_{kij} H_i \bar{u}_j + K^y{}_{kij} H_i \bar{v}_j \\ + K^x{}_{kij} \bar{u}_i H_j + K^y{}_{kij} \bar{v}_i H_j = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (M_{ki} + \frac{h^2}{3} B^{xx}{}_{ki}) \dot{\bar{u}}_i + \frac{h^2}{3} B^{xy}{}_{ki} \dot{\bar{v}}_i \\ + K^x{}_{kij} \bar{u}_i \bar{u}_j + K^y{}_{kij} \bar{v}_i \bar{u}_j \\ + g S^x{}_{ki} \eta_i + I^x{}_k \ddot{X}_A + \gamma_B C^x{}_{ki} \bar{u}_i = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (M_{ki} + \frac{h^2}{3} B^{yy}{}_{ki}) \dot{\bar{v}}_i + \frac{h^2}{3} B^{yx}{}_{ki} \dot{\bar{u}}_i \\ + K^x{}_{kij} \bar{u}_i \bar{v}_j + K^y{}_{kij} \bar{v}_i \bar{v}_j \\ + g S^y{}_{ki} \eta_i + I^y{}_k \ddot{Y}_A + \gamma_B C^y{}_{ki} \bar{v}_i = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ここに、 $\bar{u}_i, \bar{v}_i (i=1, 2, 3)$  および  $\eta_i (i=1, 2, 3)$  は要素を構成する各節点での平均流速と液面変位であり、 $H_i = (h + \eta)_i$  である。また、 $\dot{\phantom{x}}$  は時間に関する微分を意味する。なお、境界 $\Gamma$ に接する要素の場合は、側壁に関する減衰項 $-\gamma_W (\bar{u}_i n_y)_i$  および  $+\gamma_W (\bar{u}_i n_x)_i$  に相当する項をそれぞれ式(24)(25)の右辺に対して付加する。

式(23)~式(25)中の各有限要素に対する係数行列は次式のように表される。

$$M_{ki} = \int_{\Omega} N_k N_i d\Omega \quad (26a)$$

$$K^x{}_{kij} = \int_{\Omega} N_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \quad (26b)$$

$$K^y{}_{kij} = \int_{\Omega} N_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \quad (26c)$$

$$B^{xx}{}_{ki} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega - \int_{\Gamma} N_k \frac{\partial N_i}{\partial x} n_x d\Gamma \quad (26d)$$

$$B^{xy}{}_{ki} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega - \int_{\Gamma} N_k \frac{\partial N_i}{\partial y} n_x d\Gamma \quad (26e)$$

$$S^x{}_{ki} = \int_{\Omega} N_k \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega \quad (26f)$$

$$B^{yy}{}_{ki} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} N_k \frac{\partial N_i}{\partial y} n_y d\Gamma \quad (26g)$$

$$B^{yx}{}_{ki} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} N_k \frac{\partial N_i}{\partial x} n_y d\Gamma \quad (26h)$$

$$S^y{}_{ki} = \int_{\Omega} N_k \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega \quad (26i)$$

$$I^x{}_k = I^y{}_k = \int_{\Omega} N_k d\Omega \quad (26j)$$

$$C^x{}_{ki} = C^y{}_{ki} = \int_{\Omega} N_k N_i d\Omega \quad (26k)$$

式(23)~式(25)で示した各々の要素に対する有限要素方程式を重み関数に従って重ね合わせると、全体系に対する離散化された連続方程式および運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} [\bar{M}] \{\dot{\eta}\} + [K(\bar{u}, \bar{v})] \{H\} \\ + [K(H)] \{\bar{u}\} + [K(H)] \{\bar{v}\} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} ([M] + \frac{h^2}{3} [B^{xx}]) \{\dot{\bar{u}}\} + \frac{h^2}{3} [B^{xy}] \{\dot{\bar{v}}\} \\ + [K(\bar{u}, \bar{v})] \{\bar{u}\} + g [S^x] \{\eta\} \\ + [I^x] \{\ddot{X}_A\} + \gamma_B [C^x] \{\bar{u}\} \\ + \gamma_W \{\bar{u}_b n_y\} - \gamma_W \{\bar{v}_b n_x n_y\} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} ([M] + \frac{h^2}{3} [B^{yy}]) \{\dot{\bar{v}}\} + \frac{h^2}{3} [B^{yx}] \{\dot{\bar{u}}\} \\ + [K(\bar{u}, \bar{v})] \{\bar{v}\} + g [S^y] \{\eta\} \\ + [I^y] \{\ddot{Y}_A\} + \gamma_B [C^y] \{\bar{v}\} \\ - \gamma_W \{\bar{u}_b n_x n_y\} + \gamma_W \{\bar{v}_b n_x\} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

式(27)~式(29)において,  $[\cdot]$  で記述される行列は, 式(26)で示した各々の要素に対する係数行列を全体系に重ね合わせて求めた行列を意味し,  $\{\bar{u}\}, \{\bar{v}\}$  および  $\{\eta\}$  は全体系に対する平均流速および液面変位ベクトルを表す。また, 添字  $b$  は境界  $\Gamma$  上の流速ベクトルを意味する。

#### (4) 応答の数値積分法

応答の数値積分には Leap-Frog 法を用いる。Leap-Frog 法は時間方向に計算誤差の蓄積も数値粘性の影響も受けにくい中立な数値積分法であるため, もし解が得られた場合には, 最も数値粘性の影響が少ない結果が得られる<sup>24)</sup>。ただし, 運動方程式(28)(29)の流体粒子の加速度に比例する慣性項には波の分散性を表す Boussinesq 項(圧力補正項)を含んでいるため, 準陽的な取り扱いが不可欠となる。予備解析を行った範囲では, 連続方程式と運動方程式の双方に準陽的な Leap-Frog 法を用いた場合, 運動方程式中に減衰項が存在するものの, 減衰係数の値や入力加速度レベルによっては数値計算の途中で応答が発散してしまう場合が多い。そのため, 鄭ら<sup>25)</sup>や喜岡ら<sup>26)</sup>が行ったように, ここでは, 連続方程式(27)の慣性項に対して集中化行列と混合行列を採用し完全な陽的スキームとした。すなわち, 運動方程式に対してはそのまま準陽解法を用い, 連続方程式に対しては完全な陽解法を用いたことになる。

いま, 連続方程式(27)と運動方程式(28)(29)の間で  $\Delta t/2$  だけ時刻をずらし, 各々に対して  $\Delta t$  間隔で Leap-Frog 法を適用し数値積分を行う。添字  $n$  で時間ステップを表すと, 時間方向に離散化された連続方程式と運動方程式が以下のように表される。

$$[\bar{M}]\{\eta\}^{n+\frac{1}{2}} = [\bar{M}]\{\eta\}^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t([K(\bar{u}, \bar{v})]\{H\})^{n-\frac{1}{2}} + [K(H)]\{\bar{u}\}^n + [K(H)]\{\bar{v}\}^n \quad (30)$$

$$([M] + \frac{h^2}{3}[B^{xx}])\{\bar{u}\}^{n+1} + \frac{h^2}{3}[B^{xy}]\{\bar{v}\}^{n+1} = ([M] + \frac{h^2}{3}[B^{xx}])\{\bar{u}\}^n + \frac{h^2}{3}[B^{xy}]\{\bar{v}\}^n - \Delta t([K(\bar{u}, \bar{v})]\{\bar{u}\}^n + g[S^x]\{\eta\}^{n+\frac{1}{2}} + [I^x]\{\ddot{X}_A\}^{n+1} + \gamma_B[C^x]\{\bar{u}\}^n + \gamma_W\{\bar{u}_b n_y^2\}^n - \gamma_W\{\bar{v}_b n_x n_y\}^n) \quad (31)$$

$$([M] + \frac{h^2}{3}[B^{yy}])\{\bar{v}\}^{n+1} + \frac{h^2}{3}[B^{yx}]\{\bar{u}\}^{n+1} = ([M] + \frac{h^2}{3}[B^{yy}])\{\bar{v}\}^n + \frac{h^2}{3}[B^{yx}]\{\bar{u}\}^n - \Delta t([K(\bar{u}, \bar{v})]\{\bar{v}\}^n + g[S^y]\{\eta\}^{n+\frac{1}{2}} + [I^y]\{\ddot{Y}_A\}^{n+1} + \gamma_B[C^y]\{\bar{v}\}^n - \gamma_W\{\bar{u}_b n_x n_y\}^n + \gamma_W\{\bar{v}_b n_x^2\}^n) \quad (32)$$

なお, 式(30)の  $[\bar{M}]$  および  $[M]$  はそれぞれ集中化質量

行列と混合化質量行列であり, 混合化質量行列  $[\bar{M}]$  は次式で与えられる。

$$[\bar{M}] = e[\bar{M}] + (1-e)[M] \quad (33)$$

ここに,  $e$  は選択係数と呼ばれ, 数値積分の安定化と同時に数値粘性による減衰効果を最小限に押さえるように定められるものである<sup>27)</sup>。これは, 解くべき問題にも依存するが, 通常  $e = 0.7 \sim 0.95$  の範囲で用いられることが多い。ここでは, 式(30)および式(31)(32)において移流項と分散項を無視し線形化した場合の解析結果と線形理論によって求められるスロッピングの定常応答解の比較から  $e = 0.95$  を採用した。

式(14)で示した容器側壁の境界条件は, 以下のようにして考慮できる。いま, 式(31)および式(32)を解き,  $n+1$  ステップの計算終了後に求められる境界における節点の平均流速を, 便宜上,  $\bar{u}_b^{n+1}$  と  $\bar{v}_b^{n+1}$  で表す。この状態では, まだ境界条件を完全に満足していない。境界条件式(14)より, 境界  $\Gamma$  上の法線方向の流速成分は 0 であるため, 境界  $\Gamma$  における平均流速は接線方向の平均流速  $\bar{u}_t$  でのみ表される。したがって, 境界条件を満足した後の境界  $\Gamma$  上の流速  $\bar{u}_b^{n+1}$  と  $\bar{v}_b^{n+1}$  は次式のように表される。

$$\{\bar{u}_b^{n+1} \ \bar{v}_b^{n+1}\}^t = \{-n_y \ n_x\}^t \bar{u}_t^{n+1} \quad (34)$$

一方, 境界  $\Gamma$  上の接線方向の平均流速  $\bar{u}_t^{n+1}$  は,  $\bar{u}_b^{n+1}$  と  $\bar{v}_b^{n+1}$  を用いて,

$$\bar{u}_t^{n+1} = -\bar{u}_b^{n+1} n_y + \bar{v}_b^{n+1} n_x \quad (35)$$

と表されるので, 式(34)に代入すると, 境界条件を満足した後の  $\bar{u}_b^{n+1}$  と  $\bar{v}_b^{n+1}$  は,

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_b^{n+1} \\ \bar{v}_b^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_y^2 & -n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_t^{n+1} \\ \bar{v}_t^{n+1} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

と表される。各ステップ毎の計算終了後に, 式(36)で示される関係を利用して, 境界  $\Gamma$  上の平均流速を改めることにより, 境界条件式(14)を考慮することができる。

#### (5) TLD の流体反力

構造物に対する制振力として作用する TLD の流体反力は以下のようにして求めることができる。いま, 式(8)で表される鉛直方向の圧力分布  $p(z)$  に式(11)を代入し, 鉛直方向に  $z = -h$  から  $\eta$  まで積分を行い, さらに, 境界  $\Gamma$  に沿って線積分を実行する。その際, 境界上の法線ベクトルの方向成分  $n_x, n_y$  を考慮すれば,  $x, y$  方向の TLD の流体反力  $F_{Dx}$  および  $F_{Dy}$  を求めることができる。すなわち,

$$F_{Dx} = \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma} (h + \eta)^2 n_x d\Gamma - \frac{\rho h}{3} \oint_{\Gamma} (h + \eta)^2 \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right\} n_x d\Gamma \quad (37)$$

$$F_{Dy} = \frac{\rho g}{2} \oint_{\Gamma} (h + \eta)^2 n_y d\Gamma - \frac{\rho h}{3} \oint_{\Gamma} (h + \eta)^2 \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right\} n_y d\Gamma \quad (38)$$

となる。式(20)の形状関数を適用し、式(37)(38)を離散化すると各々の有限要素に対する流体反力が求められ、境界 $\Gamma$ に接する全ての要素について総和( $l = 1 \sim N_B$ )をとると、それぞれ $x, y$ 方向のTLDの流体反力が求められる。いま、式(30)を解いて求められる液面変位 $\eta$ と式(31)(32)を解き、式(36)の関係式を利用して容器側壁での境界条件を満足させた後の平均流速 $\bar{u}, \bar{v}$ を用いて $n+1$ ステップにおける流体反力を求めると、次式のようになる。

$$F_{Dx}^{n+1} = \rho \sum_{l=1}^{N_B} \left[ \frac{g}{2} H_k^{n+\frac{1}{2}} \oint_{\Gamma} N_k N_i n_x d\Gamma H_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{3} H_k^{n+\frac{1}{2}} \oint_{\Gamma} N_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} n_x d\Gamma H_i^{n+\frac{1}{2}} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} - \frac{h}{3} H_k^{n+\frac{1}{2}} \oint_{\Gamma} N_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} n_x d\Gamma H_i^{n+\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_j^n}{\Delta t} \right]_l \quad (39)$$

$$F_{Dy}^{n+1} = \rho \sum_{l=1}^{N_B} \left[ \frac{g}{2} H_k^{n+\frac{1}{2}} \oint_{\Gamma} N_k N_i n_y d\Gamma H_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{3} H_k^{n+\frac{1}{2}} \oint_{\Gamma} N_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} n_y d\Gamma H_i^{n+\frac{1}{2}} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} - \frac{h}{3} H_k^{n+\frac{1}{2}} \oint_{\Gamma} N_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} n_y d\Gamma H_i^{n+\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_j^n}{\Delta t} \right]_l \quad (40)$$

なお、 $N_B$ は解析領域を有限要素に分割した際の境界 $\Gamma$ に接する要素の数である。

### 3. 振動実験によるTLDの流体反力

#### (1) 振動実験の概要

円筒形TLDの流体反力の非線形な動特性を把握し、解析方法の妥当性を検証するため、模型振動実験を行った。実験に用いた容器は外径50cm、内径48cm( $=2R$ )、高さ30cm、厚さ1cmの亚克力製円筒容器である。液体としては水を用い、水深 $h$ は4cm( $h/2R = 0.083$ )に設定した。この場合、次式より求められる周方向1次( $m=1$ )、半径方向1次( $n=1$ )のモードに対応するスロッシング固有振動数は、

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\epsilon_{mn} \frac{g}{R} \tanh(\epsilon_{mn} \frac{h}{R})} \quad (41)$$

より、 $f_{11} = 0.75\text{Hz}$ である。ここに、 $\epsilon_{11} = 1.841$ であり、 $\epsilon_{mn}$ は、 $\partial J_m(\epsilon)/\partial r = 0$ の $n$ 番目の正根( $J_m(\epsilon)$ :第1種 $m$ 次のBessel関数)である。

図-2に示すように、この円筒容器を振動台にのせ1方向に正弦波加加速度加振を行った。実験での測定項目

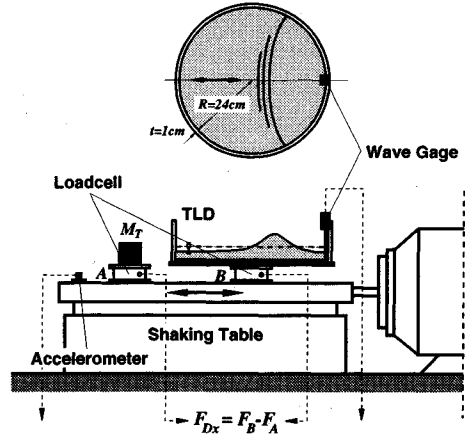


図-2 円筒容器の概要と振動実験装置

は、図-2に示す位置の液面変位 $\eta$ と流体反力 $F_{Dx}$ および振動台の加速度 $\ddot{X}_A$ である。液面変位の測定には容量式波高計を用い、また、流体反力は図-2に示すように2つのロードセルを用いて測定している。ロードセルAでは、容器や測定機器など液体以外の質量 $M_T$ と等しい重りに作用する慣性力 $F_A (= M_T \ddot{X}_A)$ を測定しており、これをロードセルBで測定した全体の水平反力 $F_B$ からアナログ減算機を用いて差し引くことにより流体反力 $F_{Dx}$ を求めている。

実験における加振振動数 $f$ は、スロッシング固有振動数 $f_{11} (= 0.75\text{Hz})$ を基準に、 $0.53 \leq f/f_{11} \leq 1.47$ の範囲で設定し、正弦波加振加速度の振幅 $A (= \ddot{X}_A^{max})$ は1.6、4.8および8.0 $\text{cm/s}^2$ の3通り、無次元振幅で $a_0 = A/R(2\pi f_{11})^2 = 0.003, 0.009$ および0.015とした。

本実験での加振方法は、通常行われるような加振を継続したまま振動数を徐々に変化させ定常応答を待つような加振方法ではなく、解析の際の初期条件と整合させるため各加振振動数において以下のような加振方法を採用した。

- 1) 静止状態から徐々に振幅を上げ所定の振幅に達した後、液面の応答が定常振動状態になるまで正弦波加振する。
- 2) 十分な定常状態の応答を記録した後、加振振幅を徐々に下げ加振を終了する。
- 3) 液面が静穏状態になるのを待ち、振動数を変化させ、新たに静止状態より加振を開始する。

なお、ここで言う「定常振動状態」とは減衰効果により加振初期のうなりが消滅した後の応答状態を指している。実験でのサンプリング周波数は40Hzとし、各振動

数において加振開始より十分な定常状態の応答が得られるまでの波形(加振開始より50波)を記録している。

円筒容器のような鉛直軸に対称形をした容器を水平に加振した場合、スワーリングという旋回運動を生じることが知られている<sup>28)~30)</sup>。しかし、本実験における加振条件のように、いずれの振動数においても静止時から加振を開始した場合には、加振開始より定常状態を経て50波から60波程度までは面内運動が不安定になりスワーリングを起こすような現象は見られなかった。ただし、 $f_{11}$ よりわずかに高い振動数域  $f/f_{11}=1.01 \sim 1.05$  ( $a_0=0.009$ ) において、面外方向に微小な乱れを意図的に与えると、3~4波分の移行時間を伴うものの、面内運動から面外運動成分が分岐しスワーリングに移行することが実験において確認された。これらの振動数域は、わずかな乱れを与えることにより不安定な面内振動からより安定なスワーリングモードに移行する分岐に相当する振動数域であると考えられる。スワーリングに伴うこれらの現象は、波の非線形性に関連した興味深い現象であり、また、制振装置としての性能に影響があるとも考えられるが、本研究では、面内運動、すなわち、加振方向の振動成分に関連した非線形現象にのみ着目した数値解析法の開発とその妥当性に関する検討を行い、スワーリングに伴うこれらの非線形現象の検討は今後の研究課題としたい。

## (2) 流体反力の実験結果と線形解との比較

実験結果に見られる流体反力の非線形性を明確に把握する目的から、流体反力の実験結果と線形理論に基づく定常応答解を比較し、両者の差異について考察する。

図-3は振動実験より得られた定常状態における振動方向の無次元流体反力  $F_{Dx}/\rho\pi R^2hA$  の最大値の応答特性を示したものである。また、図中の実線は、線形理論に基づく定常応答解を示している。ただし、線形解を計算するに当たっての減衰係数 $\gamma$ は、 $f/f_{11} \approx 1.0$ の実験値と線形解の値がほぼ等しくなるように定めた。したがって、線形解に対する $\gamma$ は式(16)から得られる減衰係数 $\gamma_C$ に対して、 $\gamma = 2.5\gamma_C$  ( $a_0 = 0.003$ )、 $\gamma = 3.0\gamma_C$  ( $a_0 = 0.009$ ) および  $\gamma = 4.0\gamma_C$  ( $a_0 = 0.015$ ) となっている。これより、図-3に示した実験結果は、波の非線形性の影響で、線形応答と比較して見かけ上の等価な減衰が大きくなったような特徴を示していることがわかる。特に、 $a_0 = 0.015$  の場合は、共振振動数付近の実験結果が砕波を伴っているため、この影響で見かけ上の等価な減衰も $\gamma_C$ の4倍になり特に大きな値となっている。

通常、矩形容器の場合、水深 $h$ と振動方向の幅 $L$ の比 $h/L$ が0.3~0.4の間の値を境に、流体反力の応答特性が大きく変化することが知られている。たとえば、清水、葉山が導いた摂動解<sup>8)</sup>を参考にすれば、 $h/L > 0.337$

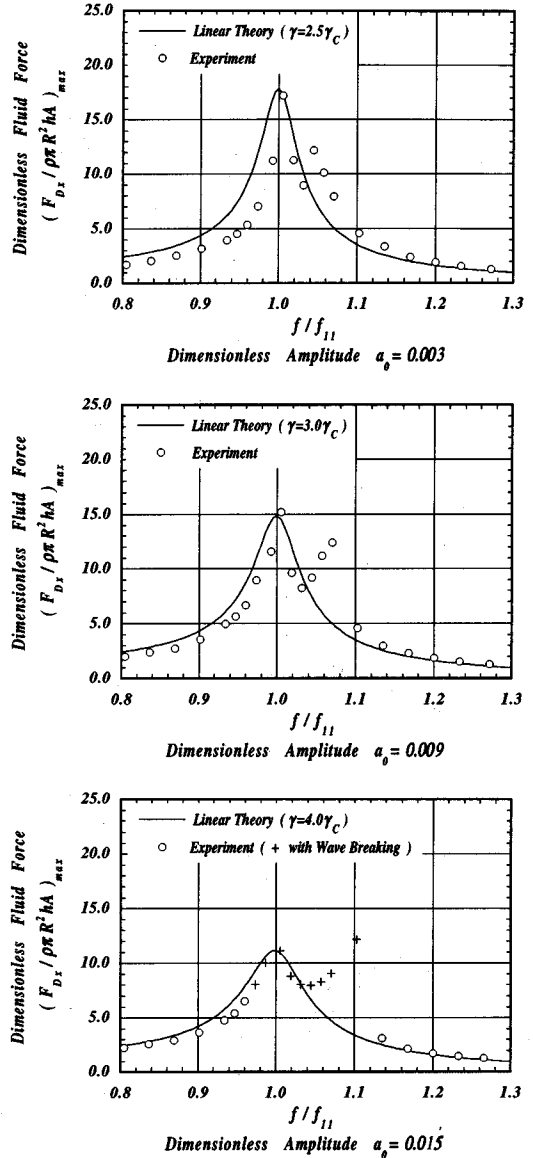


図-3 振動実験による無次元流体反力の振動特性

の場合は応答のピークが加振振幅が大きくなるほど低振動数側にずれるソフトスプリングタイプの応答曲線を生じ、一方、 $h/L < 0.337$  の場合は、逆に応答のピークが加振振幅の増加に伴い高振動数側にずれるハードスプリングタイプの応答曲線となる。

しかし、円筒容器の場合、水深 $h$ と容器内径 $2R$ の比 $h/2R$ が0.3より深い範囲ではソフトスプリングタイプの応答曲線を生じるものの、 $h/2R$ が極小さな場合においても顕著なハードスプリングタイプの応答曲線と

はならない。木村ら<sup>31)32)</sup>の検討結果では、 $h/2R > 0.3$ の範囲では、円筒容器に作用する圧力の周波数応答がソフトスプリングタイプの応答曲線を示し、 $h/2R$ が小さくなるとその傾向が弱まることを示している。石橋ら<sup>17)</sup>の実験結果 ( $h/2R = 0.05$  および  $0.15$ ) や大山<sup>18)</sup>の実験結果 ( $h/2R = 0.05$ ) を見る限り、その影響は極わずかなものであり、ほぼ  $f/f_{11} \approx 1.0$  で応答曲線のピークとなる。本実験結果 ( $h/2R = 0.08$ ) の場合も同様で、無次元振幅  $a_0 = 0.003 \sim 0.015$  の範囲では、無次元流体反力の最大値がピークをとる振動数は線形理論から求められる共振振動数  $f_{11}$  とほぼ等しく、加振振幅による大きな変化はほとんど見られない。

また、図-3より、実験結果が線形理論と大きく異なる特徴として、 $f/f_{11} = 1.04$  ( $a_0 = 0.003$ ),  $1.07$  ( $a_0 = 0.009$ ) および  $1.10$  ( $a_0 = 0.015$ ) において、線形理論では現れないもう一つの別のピークを持つことが挙げられる。このピークは  $a_0$  が大きくなるにつれ高さは増加し、高振動数側にシフトするハードスプリングタイプの非線形性を示す。この共振現象は石橋ら<sup>17)</sup>の実験結果 ( $h/2R = 0.05$ ) や大山<sup>18)</sup>の実験結果 ( $h/2R = 0.05$ ) においても加振振幅による差異はあるが  $1.03 < f/f_{11} < 1.06$  の範囲で確認されている。

#### 4. 数値解析結果

##### (1) 要素分割数の影響

有限要素法のような空間的な離散化手法を用いて非線形流体解析を行う場合、解析領域の要素分割数の大きさが解析結果に及ぼす影響は大きい。ここでは、要素分割数  $N$  が異なる4つのメッシュパターンについて数値解析を行い、実験結果との比較から妥当な解析結果を得るための要素分割について検討を行った。

図-4は、解析に用いた有限要素分割である。図示したように半径  $R$  を  $N_r$  に分割しその間隔を  $\Delta R$  としている。また、円周に対しては  $N_\theta = 8 \times N_r$  の分割である。

表-1に示す A, B, C および D の4種類のメッシュパターンに対して、 $a_0 = 0.003$ ,  $f/f_{11} = 1.0$  の場合の数値解析を行う。ただし、応答の数値積分を行う時間間隔  $\Delta t$  は、以下のようにして求めるものとした。本解析法では時間に関して2次精度の Leap-Frog 法を用いており、クーラン数が  $2/3$  以下の場合に安定な数値積分スキームである。この条件を満足する時間間隔  $\Delta t_{cr}$  は次式で与えられる。

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{3} \frac{\min\{\Delta x_{min}, \Delta y_{min}\}}{(f/f_{11})\sqrt{gh}} \quad (42)$$

ここに、 $\Delta x_{min}$  と  $\Delta y_{min}$  は、解析領域における  $x$  および  $y$  方向の最小メッシュ間隔である。実際の解析においては、式 (42) の  $\Delta t_{cr}$  の  $1/10$  の時間刻みを用いて応答

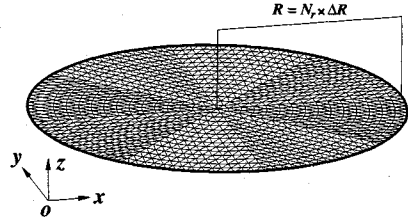


図-4 解析に用いた有限要素分割パターン

表-1 解析に用いた要素分割に関するパラメータ

Mesh	$N_r$	$N_\theta$	$N$	$L_c/\Delta R^*$
A	20	160	3200	69
B	25	200	5000	86
C	30	240	7200	103
D	35	280	9800	120

\*  $L_c = 2\pi R/\varepsilon_{11}$  : Wave Length

の数値積分を行っている。なお、解析における加速度入力波としては、実験で計測された振動台加速度  $\ddot{X}_A$  を用いている。

図-5および図-6は表-1に示す A~D のメッシュに対する解析結果と実験値の比較を示したものであり、図-5は無次元波高  $\eta/h$  であり、図-6が無次元流体反力  $F_{Dx}/\rho\pi R^2 h A$  を示したものである。要素分割の荒い Mesh-A を用いて行った解析結果では、波高においても流体反力においても実験値に見られる高調波成分を十分に捉えることができず、波高において、波の峰が2つに分かれた状態を再現できていない。Mesh-Bでは、波高に関しては、まだ十分な実験結果との一致は見られず、メッシュの解像度不足による数値粘性効果のためやや小さめの振幅を与える。一方、流体反力に関してはほぼ妥当な振幅を与えるものの若干の位相ずれが残る。Mesh-Cになると、波高に関して実験値との対応はだいぶ改善され、流体反力は実験値と良く一致することがわかる。Mesh-Dまで要素分割を細かくすれば、波高、流体反力ともに解析値と実験値とは良く一致する。

このように、解析結果に実験で得られるような非線形特性を反映させるためには、波高に関しては半径方向に波長  $L_c$  の  $1/120$  程度のメッシュ分割 (Mesh-D) が必要であり、流体反力に関しては半径方向に波長  $L_c$  の  $1/100$  程度のメッシュ分割 (Mesh-C) が必要であると言える。なお、波高に比べ流体反力がより少ないメッシュ分割でも実験値と良い対応を示すのは、流体反力が解析領域内で平均化された物理量であるため、局所



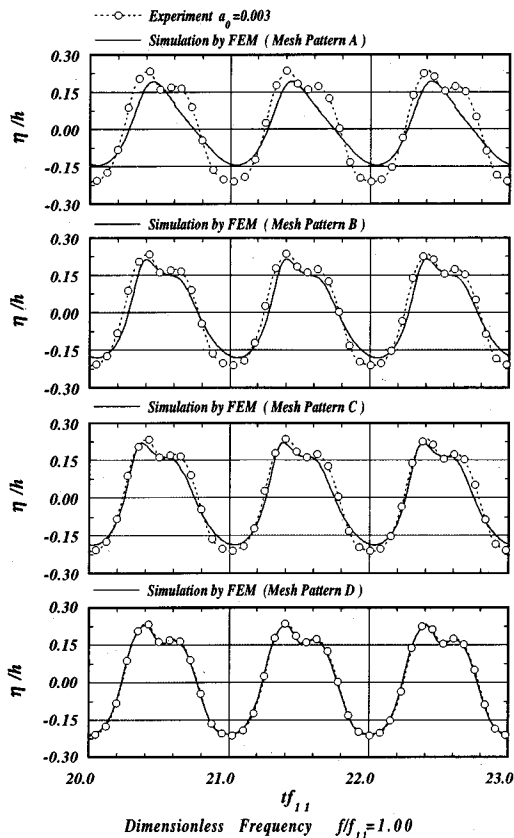


図-5 要素分割数の大小が無次元波高 $\eta/h$ に及ぼす影響  
(無次元振幅 $a_0=0.003$ )

的な誤差が打ち消され、その結果、より少ないメッシュ分割でも良い一致を示すものと考えられる。

図-5および図-6に示した検討結果より、実験結果と解析結果を対応させ現象を考察する目的から、以降の解析においては Mesh-D を用いることにする。ただし、TLD の目的と計算効率の観点から、実用上は流体反力が正確に求められるメッシュ分割 (Mesh-B もしくは Mesh-C) で十分である。

## (2) 解析結果と実験結果の比較

本解析手法の妥当性について検証するため、実験結果と数値解析結果の比較を行った。TLD と構造物の連成応答について論じる場合、構造物応答と流体反力の位相差が TLD の制振効果に大きな影響を及ぼす。TLD 単体の応答を考えた場合、この位相差は入力加速度と流体反力の位相差に相当し、TLD と構造物の固有振動数が同調状態の場合、共振成分の位相差が $\pi/2$ の時、流体反力は構造物に対する制振力として最大の効果を持つ。

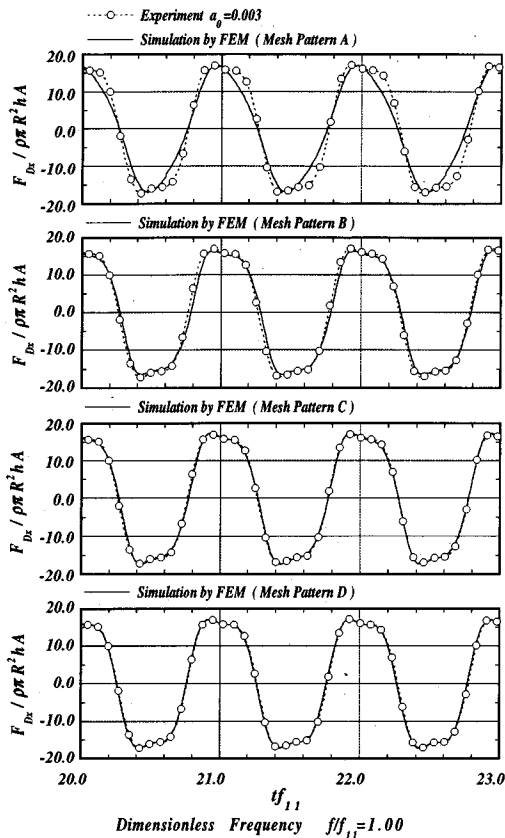


図-6 要素分割数の大小が無次元流体反力 $F_{Dx}/\rho\pi R^2hA$ に及ぼす影響 (無次元振幅 $a_0=0.003$ )

したがって、TLD の非線形解析手法の妥当性を論じる場合、流体反力の振幅特性と同時にその入力加速度との位相差についても十分な考察を行う必要がある。ここでは、これらの観点から、無次元流体反力 $F_{Dx}/\rho\pi R^2hA$ の最大値、入力加速度との位相差 $\Delta\epsilon_{Dx}/\pi$ および円筒容器端部 (図-2 に示す位置) における無次元波高 $\eta/h$ の最大値と最小値に関して実験値と解析値との比較を行った。なお、無次元振幅 $a_0=0.015$ の場合、共振振動数付近で碎波を生じているため、 $a_0=0.003$ と $a_0=0.009$ の場合についての解析結果について考察した。

図-7と図-8は、 $a_0=0.003$ と $a_0=0.009$ の場合についての解析値 (●) と実験値 (○) の比較結果を示したものである。いずれの加振振幅の場合も、流体反力、位相差および波高に関する解析結果と実験結果の対応は極めて良いものとなっている。特に、線形理論では説明できない $f/f_{11} = 1.04$  ( $a_0 = 0.003$ ),  $1.07$  ( $a_0 = 0.009$ ) にあるピークを明確に捉えている。

この共振現象は、 $f/f_{11} \approx 1.0$  で生じる共振とは基本

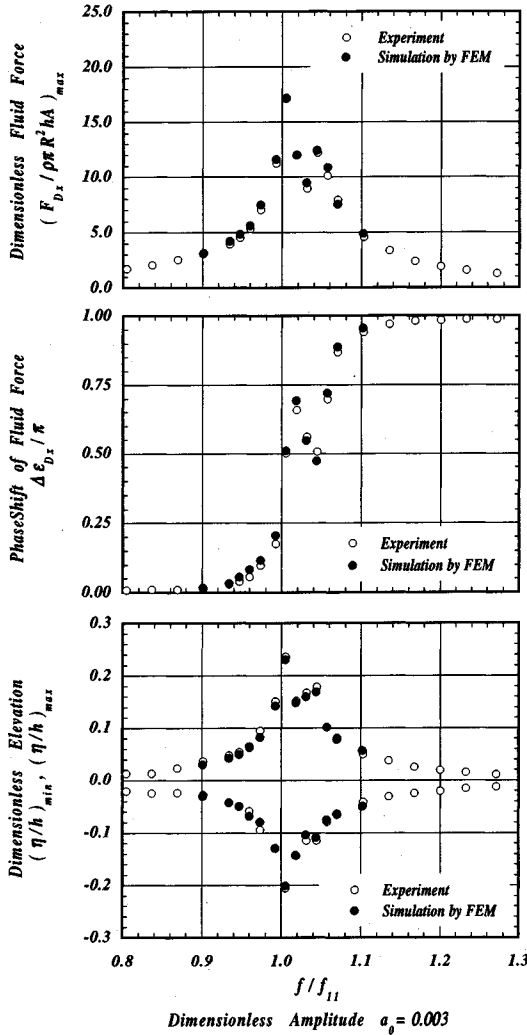


図-7 解析結果と実験結果の比較 (無次元振幅  $a_0=0.003$ )

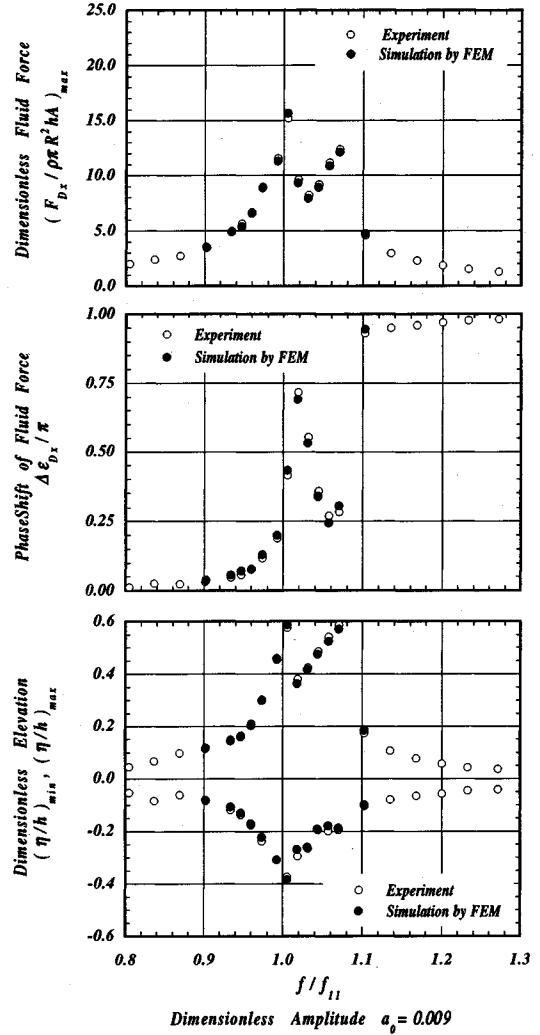


図-8 解析結果と実験結果の比較 (無次元振幅  $a_0=0.009$ )

的に異なり、波の非線形性の影響で生じる高調波成分が他のモードを励起し、さらに励起されたモードが共振成分に影響を及ぼす高調波共振であるとして考察できる。船越ら<sup>33)</sup>の説明を引用すれば、「加振によって与えられたエネルギーは非線形性により加振と水面波の位相関係の変化や他のモードへの移行が行われ、粘性散逸によりエネルギーが失われる。」という挙動として解説できる。

本研究における解析結果と実験結果では、この高調波共振(内部共鳴)は  $a_0=0.003$  の場合、 $f/f_{11}=1.04$  で生じており、この場合に生じる2倍の高調波の周波数は  $2 \times 1.04 \times f_{11}=1.56\text{Hz}$  と計算できる。一方、これに最も近い固有振動数は、式(41)から求められる周方向0次、

半径方向1次の固有振動数  $f_{01}=1.53\text{Hz} (\epsilon_{01} = 3.832)$  であり、ほぼ2倍の高調波周波数と一致する。この場合の固有モードは鉛直軸に点対称な山のように盛り上がった上下振動モードに相当する<sup>18)</sup>。また、 $a_0=0.009$  の場合には、この高調波共振は、非線形性に伴うハードスプリング特性の影響で  $a_0=0.003$  の場合と比較してやや高振動数よりの  $f/f_{11}=1.07$  で生じる。

このように、 $f/f_{11} \approx 1.05$  付近で生じた2番目のピークは、加振振動数の2倍の高調波成分が周方向0次、半径方向1次の固有モードを励起した高調波共振であると言える。以下、区別のため、 $f/f_{11} \approx 1.0$  で生じるピークのことを主共振ピークと呼び、それよりやや高振動数側の  $f/f_{11} \approx 1.05$  付近で生じるピークのこ

とを高調波共振ピークと呼ぶ。

この波の非線形性に伴う高調波共振現象が、TLDの制振効果にどのように影響するかは興味深いところである。図-7と図-8に示した加振振動数に対する位相差の変化から分かるように、高調波共振ピークを与える振動数付近にも $\pi/2$ を交差する振動数域があり、この高調波共振によって生じる流体反力も構造物に対する制振力として作用する可能性が考えられる。言い換えれば、流体反力の非線形性により高振動数側にロバストな特性を持つことが予想できる。ただし、主共振ピークと比較して流体反力の値は8割程度であり、さらに、そのうちの何割かは対称モードとなる2倍の高調波成分の寄与であり、制振力として作用しないことを考えると、高調波共振時には、主共振時のような制振力を期待することはできない。また、非対称モードとなる奇数次の高調波成分によって生じる高調波共振の場合には、構造物の高次モードを励起することが懸念される。しかし、一般に、風による構造物の振動制御では1次卓越型の振動特性を有する構造物を対象とする場合が多く、これらの高調波成分が構造物の高次モードを励起する可能性は少ないと言うことが、若原ら<sup>13)</sup>の検討結果によって示されている。したがって、以上の考察結果から、波の非線形性に伴う高調波共振現象は、TLDの制振性能に対して高振動数側にロバストな特性を与え、構造物の応答に悪影響を与えるようなものではないと言える。ただし、制振の対象とする構造物に奇数次の高調波成分に近い固有モードが存在し、その減衰が小さい場合には、波の非線形性によって生じる高調波成分が構造物の高次モードに何らかの影響を及ぼす可能性があり、注意すべき点と考えられる。

図-9と図-10は、図-8で示した $a_0 = 0.009$ の場合の主共振ピーク( $f/f_{11} = 1.01$ )と高調波共振ピーク( $f/f_{11} = 1.07$ )での無次元流体反力 $F_{Dx}/\rho\pi R^2 h A$ と無次元波高 $\eta/h$ の時系列を示したものであり、解析結果と実験結果の比較を行っている。図-9および図-10における時系列の比較結果から、本解析手法による解析値と実験値は良く一致しており、波形および波の位相差ともに実験結果を良く捉えている。

図-9に示した主共振ピークの時系列には、流体反力および波高ともに波の非線形性に伴う主振動数の2倍の高調波成分が見られ、波高に関して1周期の間に明確な2つの波峰が現れている。一方、図-10の高調波共振ピークの時系列では、明確な高調波成分は見られず、流体反力では波峰が尖り鋭い峰となっており、波高に関しては静水面に対して上下非対称となり波の峰が尖り谷の部分の浅く鍋底型になる特徴を持つ。また、高調波共振時の波高は、主共振時とほぼ同程度の値をとり、流体反力の方は、主共振時の流体反力に対して8割程

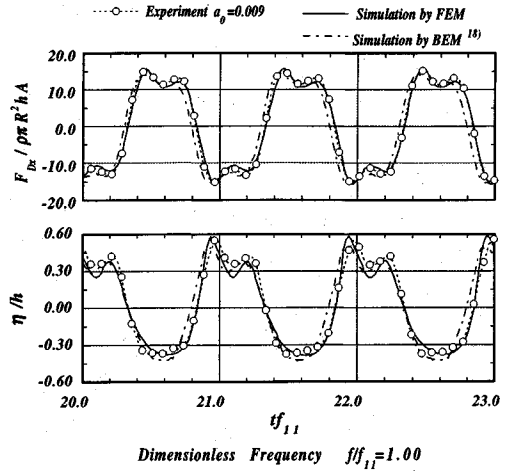


図-9 主共振ピークでの流体反力 $F_{Dx}/\rho\pi R^2 h A$ と波高 $\eta/h$ の時系列波形(無次元振幅 $a_0=0.009$ )

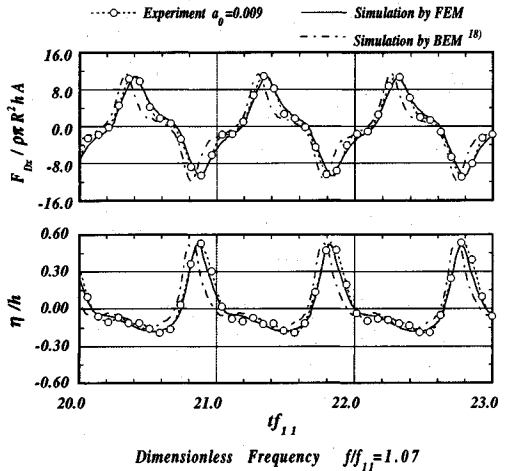


図-10 高調波共振ピークでの流体反力 $F_{Dx}/\rho\pi R^2 h A$ と波高 $\eta/h$ の時系列波形(無次元振幅 $a_0=0.009$ )

度の値となっている。

また、参考までに、図-9および図-10には、計算効率の比較を行う目的で、非線形ポテンシャル理論に基づく3次元境界要素法モデル<sup>18)</sup>による解析結果を示しており、本解析法と同程度の計算精度となっている。図示した2ケースの解析条件では、本解析法の計算負荷は上記の解析方法と比較して約1/3であり(使用マシン:Convex C3840)、TLDを対象とした流体解析に限定した場合、平面2次元問題としての取り扱いが可能なBoussinesq方程式を用いた解析モデルは、非線形ポテ

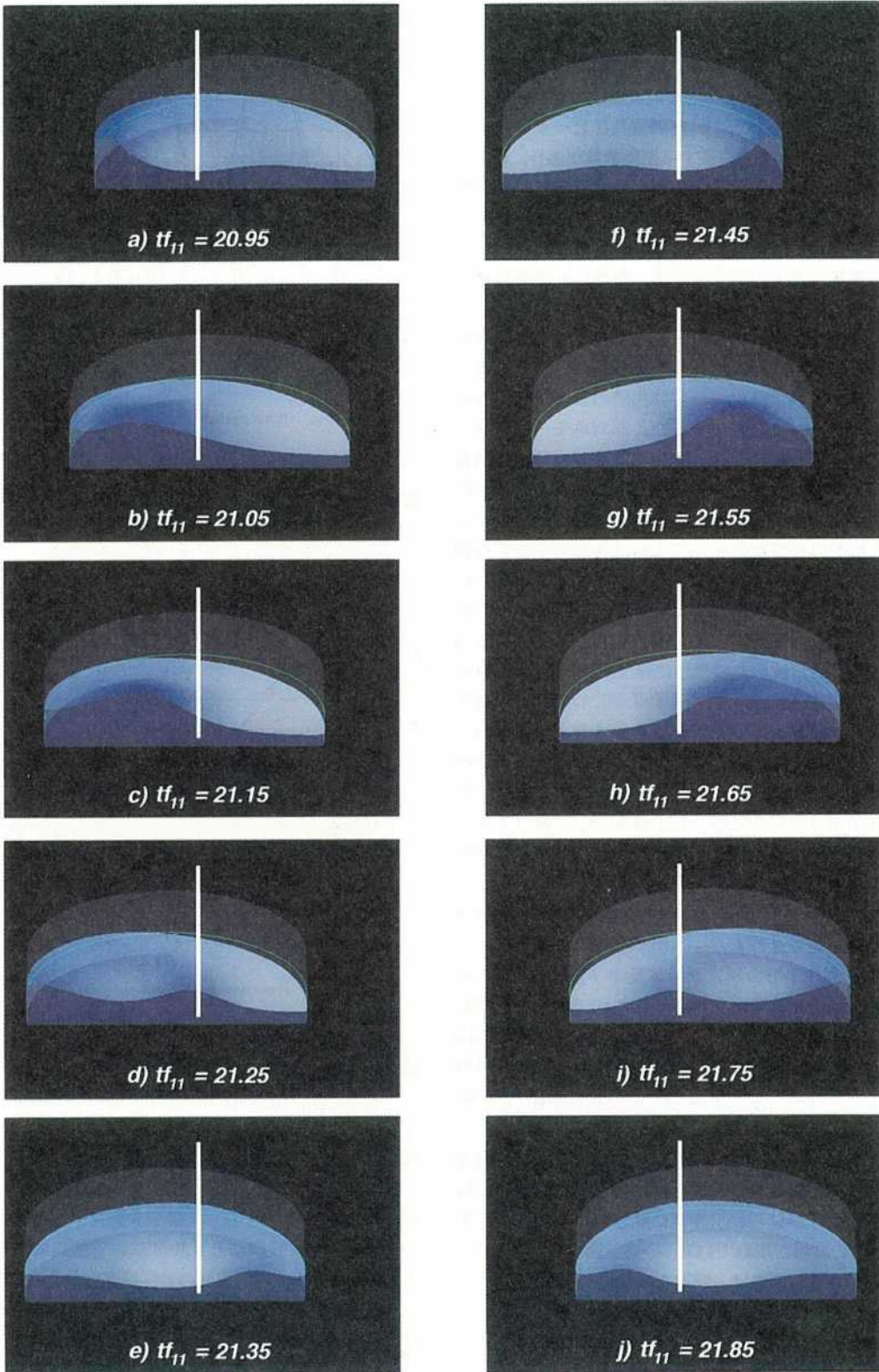


図-11 主共振ピークでの1周期分の水面形状（無次元振動数  $f/f_{11}=1.01$ ，無次元振幅  $a_0=0.009$ ）

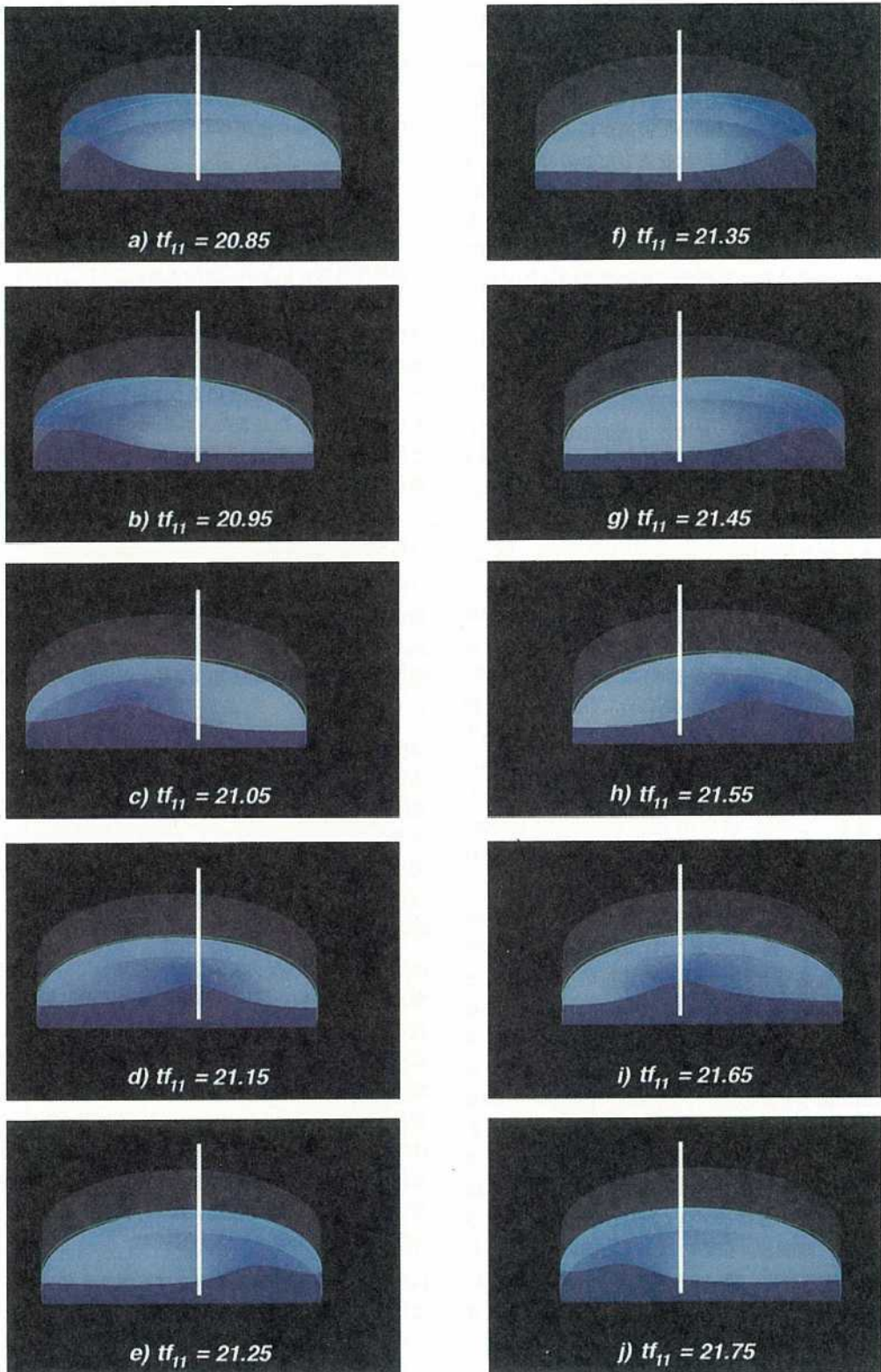


図-12 高調波共振ピークでの1周期分の水面形状 (無次元振動数  $f/f_{11}=1.07$ , 無次元振幅  $a_0=0.009$ )

ンシャル理論に基づく3次元解析モデルと比較して、3倍程度の計算効率を有しているものと考えられる。

図-11と図-12は、主共振時と高調波共振時の空間的な水面形状を理解するため、それぞれ図-9および図-10において、容器端部において波高が最大値を示した時刻から1周期分の水面形状を表したものである。図の中央に立てた軸は静止位置を表す。波高の分布は色の濃淡で表しており、濃い色ほど波高が大きいことを意味する。なお、容器中央部の2次元的な波動伝播の様子を理解しやすくするため画像を中央部で1/2に割っている。ただし、実際の数値解析は円筒容器全面に対して行っている。また、容器の動きと波動伝播の関係がはっきりわかるように容器の変位を実スケールの10倍、波高に関して実スケールの2倍を採用している。

図-11は主共振ピークにおける水面形状を示したもので、容器中央部を伝播する平面的な波と、それにやや遅れて円周に沿って互いに逆位相に伝播する2つの進行波を見ることができる。図-11のa)とf)では中央部を伝播する波により容器端部で波高が最大となり、図-11のc)とg)ではやや遅れて進行してきた円周に沿って互いに逆位相に伝播する波と容器端部で反射し中央部を逆行する波とが重なり合い、容器中心より $R/4$ ほどの位置(容器端部と中央部の中間)で大きな波高を示す。その後、2つの波は図-11のd)とi)に示すように、再度、2つに分裂し、それぞれ中央部と円周部を伝播する。この時、やや遅れて円周に沿って互いに逆位相に伝播してきた波により、もう一度、容器端部で波高が極大となる。この図-11のd)とi)に相当する部分が、図-9の流体反力や波高の時系列に見られる2番目の波峰に該当する。

また、図-12は高調波共振ピークにおける水面形状を示したもので、図-11と異なり、容器中央部を伝播する山のような盛り上がった1つの進行波しか見ることができない。高調波共振時には、前述したように、非線形性によって生じた2倍の高調波成分が周方向0次、半径方向1次の固有振動成分とほぼ一致し、鉛直軸に点対称な山のように盛り上がった上下振動モードを励起するため、見かけ上の水面形状はこの上下モードの影響で孤立した山のような形をとる。図-12のc)~e)あるいはh)~j)にかけて、ソリトンのような孤立した波が中央部を伝播する様子が良く理解できる。このようなことから、高調波共振時には上下方向の振動モードが強く影響するため、図-10の流体反力の時系列において波峰が尖り鋭い峰となり、波高に関しては、静水面に対して上下非対称となり波の峰が鋭く尖り谷の部分の浅く鍋底型になることが理解できる。

図-12に示した高調波共振時の水面形状と図-11の主共振時の水面形状を比較すると、それぞれc)~e)ある

いはg)~j)にかけて両者の差異が顕著に見られ、図-12の高調波共振時の水面形状には、円周に沿って互いに逆位相に進行する波の成分が見られないため、図-11のd)とe)あるいはi)とj)にあるような、中央部がへこみ円周部分が盛り上がるような水面形状は見られない。

## 5. 結 論

本研究では、Boussinesq方程式を用いた円筒形TLDの非線形スロッシング解析モデルについての検討を行った。実験結果と解析結果の比較を行い解析モデルの妥当性を示すとともに、数値解析によって得られたTLD流体反力の応答と位相特性から、波の非線形性が円筒形TLDの流体反力にどのような影響を及ぼすかについての考察を行った。また、共振時の1周期分の空間的な水面形状を追跡し、円筒形TLD内に生じる非線形波動の特徴について明らかにした。

本研究で得られた主要な結論をまとめると以下のようになる。

- (1) 円筒形TLD内の3次元的な非線形スロッシング現象に対して、非線形性と分散性を同時に考慮できるBoussinesq方程式を用いた解析理論について説明し、有限要素法による空間方向の離散化と応答の数値積分法について示した。
- (2) 浅水領域の円筒形TLDに対する振動実験を行い、スロッシングによって生じるTLDの流体反力の非線形な振動特性を調べた。その結果、無次元加振振幅が増大すると波の非線形性の影響により、TLDの流体反力の応答特性は見かけ上の等価な減衰が大きくなったような特徴を示し、線形理論で説明する場合には、微小振幅時の減衰の数倍の値を与えなければならない。
- (3) TLDの流体反力および波高に関して、実験結果と解析結果の比較を行い、解析結果が実験結果と良く一致することを示した。また、解析結果は有限要素分割に依存し、実験結果に見られるような非線形性を解析結果に忠実に反映させるためには、少なくとも有限要素分割の解像度を1波長の120分の1以下程度にしなければならない。ただし、TLDの目的と計算効率の観点から、実用上は流体反力が正確に求められる解像度で十分であり、1波長の1/80~1/100程度の有限要素分割が必要となる。
- (4) 本解析結果は線形理論では説明できない非線形性に伴う高調波共振によって生じた2番目のピークも良く捉えることができる。また、このピークが生じる無次元振動数 $f/f_{11} = 1.05$ 近傍における入力とTLD流体反力の位相差が $\pi/2$ をとることから、TLDの同調振動数が多少低振動数側にずれても、構造物の固有振動数

が高調波共振を生じる振動数域にあれば、高調波共振に伴う TLD の流体反力を制振力として期待できる。すなわち、波の非線形性に伴う高調波共振現象は、TLD の制振性能に対して高振動数側にロバストな特性を与え、構造物の応答に悪影響を与えるようなものでないことが言える。

(5) 主共振ピークと高調波共振ピークにおける空間的な水面形状を明らかにし、両者の違いについて考察した。その結果、主共振ピークでは、容器中央部を伝播する平面的な波とそれにやや遅れて円周に沿って互いに逆位相に伝播する 2 つの進行波を見ることができ、高調波共振ピークでは、容器中央部を伝播する山のような盛り上がった 1 つの進行波しか見ることができない。これは、高調波共振時には、非線形性によって生じた 2 倍の高調波成分が周方向 0 次、半径方向 1 次の上下振動モードを励起し、見かけ上の水面形状はこの上下モードの影響で孤立した山のような形になるためである。また、この時の波高は主共振時とほぼ同程度の値をとり、流体反力は主共振時に対して 8 割程度の値となる。

## 6. おわりに

本研究では、風外力に対する高層建物やタワー等の居住性や使用性を検討する場合を想定し、比較的振幅が小さい領域の TLD の非線形スロッシング解析モデルについて検討した。今後の検討課題として、渦励振のような比較的振幅の大きい振動を想定した場合、砕波を伴うような強非線形現象を対象とする必要も考えられる。そのような場合には、振動実験結果に基づく半経験的ルールに従うような減衰モデルを設定する必要がある。TLD に関する実務設計ができるだけ解析的に行えるよう、解析モデルの改善に努めたい。また、実際の高層建物やタワー等の設計において、想定構造物に TLD を設置した場合の応答を予測し、その制振効果を設計的な立場から検討する場合には、相似律の観点から言って、TLD と構造物を連成させた状態での実験が困難な場合が多く、TLD の非線形スロッシング解析モデルと構造物に対する解析モデルを連成させた相互作用モデルによる数値シミュレーションが不可欠となる。今後、本研究で示した円筒形 TLD の非線形解析モデルを応用し、構造物と TLD の連成応答を求める相互作用モデルについて検討し、TLD-構造物系の応答挙動を明らかにするとともに、制振装置としての有効性の限界を明確にするよう努めたいと考えている。

謝辞： 本研究を進めるにあたり、ワシントン大学の Prof. Harry Yeh および清水建設 技術研究所 環境技

術研究部の和氣 亜紀夫主席研究員には貴重なご意見を賜っている。また、清水建設 技術研究所 環境技術研究部の大山 巧 研究員には、本解析法の計算効率に関する検討を行う上で、3 次元非線形ポテンシャル理論に基づくスロッシング現象の解析プログラムを使用させて頂いた。ここに記して深謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) Fujino, Y., Pacheco, B.M., Chaiseri, P. and Sun, L.M. : Parametric Studies on Tuned Liquid Damper (TLD) Using Circular Tanks by Free-oscillation Experiments, *Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE.*, Vol.5, No.2, pp.381s-391s, 1988 (Proc. of JSCE No.398/I-10).
- 2) Tamura, Y., Fujii, K., Sato, T., Wakahara, T. and Kosugi, M. : Wind-Induced Vibration of Tall Towers and Practical Applications of Tuned Sloshing Damper, *Proc. of the Symposium/Workshop on Serviceability of Building*, Ottawa, Canada, Vol.I, pp.228-241, 1988.
- 3) Tamura, Y., Kohsaka, R. and Modi, V.J. : Practical Applications of Nutation Damper for Suppressing Wind-Induced Vibrations of Airport Towers, *Jour. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.41-44, pp.1919-1930, 1992.
- 4) Wakahara, T., Ohyama, T. and Fujii, K. : Suppression of Wind-Induced Vibration of a Tall Building using Tuned Liquid Damper, *Jour. of Wind Eng. and Industrial Aerodynamics*, Vol.41-44, pp.1895-1906, 1992.
- 5) 野路利幸, 吉田英敏, 立見栄司, 小坂英之, 萩生田弘 : 実構造物における制振効果の検証- 水のスロッシングを利用した制振装置の研究 (その 2) - 日本建築学会構造系論文報告集, 第 419 号, pp.145-152, 1991.
- 6) 米田昌弘, 藤野陽三, 他 : 幸魂橋主塔に対する T.L.D. の減衰付加効果について, *日本風工学会誌*, No.41, pp.105-106, 1989.
- 7) 中垣亮二, 植田利夫, 有馬健次, 加道博章 : Tuned Sloshing Damper の振動特性と制振効果, *構造工学論文集*, No.36A, 土木学会, pp.591-602, 1990.
- 8) 清水 隆, 葉山眞治 : 浅水波理論を応用したスロッシングの非線形応答 (第 1 報, 基礎方程式の導出と長方形容器における非線形応答), *日本機械学会論文集 (C 編)*, 53 巻 486 号, pp.357-363, 1982.
- 9) Sun, L.M., Fujino, Y., Pacheco, B.M. and Isobe, M. : Nonlinear Waves and Dynamic Pressures in Rectangular Tuned Liquid Damper (TLD) - Simulation and Experimental Verification-, *Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE.*, Vol.6, No.2, pp.251s-262s, 1989(Proc. of JSCE No.410/I-12).
- 10) Chaiseri, P., Fujino, Y., Pacheco, B.M. and Sun, L.M. : Interaction of Tuned Liquid Damper (TLD) and Structure -Theory, Experimental Verification and Application-, *Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE.*, Vol.6, No.2, pp.273s-282s, 1989(Proc. of JSCE No.410/I-12).
- 11) Kaneko, S. and Ishikawa, M. : Modeling of Tuned Liquid Damper with Submerged Nets, *Fundamental Aspects of Fluid-Structure Interactions.*, ASME, PVP-Vol.247, pp.185-203, 1992.
- 12) 大山 巧, 藤井邦雄 : 2 次元非線形スロッシング問題の境界要素解析, *構造工学論文集*, No.35A, 土木学会,

- pp.575-584, 1989.
- 13) 若原敏裕, 大山 巧, 藤井邦雄: 液面動揺の非線形性を考慮した TLD-構造系の風応答解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 426 号, pp.79-88, 1991.
  - 14) 若原敏裕, 大塚民夫, 日比一喜: 高層建物の風応答観測に基づく同調液体ダンパーの制振効果, 第 2 回 振動制御コロキウム Part B 「講演論文集」, 土木学会, pp.111-118, 1993.
  - 15) Abramson, H.N.: The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers, NASA SP-106, 1966.
  - 16) 曾我部 潔, 柴田 碧: 円筒液体貯槽の液面動揺の応答 第 1 報 - 基礎式と正弦波解 -, 生産研究 26 卷, 第 3 号, 東京大学, pp.119-122, 1974.
  - 17) 石橋博人, 葉山眞治: 浅水波理論を応用したスロッシングの非線形応答 (第 2 報, 長方形容器と円筒容器における非線形応答), 日本機械学会論文集 (C 編), 55 卷 511 号, pp.663-670, 1989.
  - 18) 大山 巧: 円筒容器内の非線形スロッシング現象の解析, 土木学会論文集, 第 417 号/II-13, pp.255-264, 1990.
  - 19) 大山 巧, 磯岡和夫: 非線形不規則波動場を対象とした数値波動水槽の開発, 土木学会論文集, 第 429 号/II-15, pp.77-86, 1991.
  - 20) 田村幸雄, 上江州 清, 大熊武司: 超高層住宅の風応答を対象とした制振システム設計の考え方, 第 3 回 振動制御コロキウム Part A 「構造物の振動制御」, 土木学会, pp.185-194, 1995.
  - 21) Mei, C.C.: The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, John Wiley & Sons, pp.504-512, 1983.
  - 22) Miles, J.W.: Surface Wave Damping in Closed Basins, *Proc. of Royal Society of London*, A297, pp.459-475, 1967.
  - 23) Lepelletier, T.G. and Raichlen, F.: Nonlinear Oscillations in Rectangular Tanks, *Jour. of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.114, pp.1-23, 1988.
  - 24) 川原睦人: 有限要素法流体解析, 日本科学技術連盟, pp.169-182, 1985.
  - 25) 鄭 榮裕, 川原睦人: 有限要素法による浅水波の解析, 第 5 回 計算力学シンポジウム講演論文集, 日本科学技術連盟, pp.95-100, 1992.
  - 26) 喜岡 渉, 長嶋禎泰: Boussinesq 方程式による構造物近傍の非線形平面波の解析, 第 40 回海岸工学講演概要集, 土木学会, pp.596-600, 1993 年.
  - 27) Kawahara, M., Hirano, H., Tsubota, K. and Inagaki, K.: Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow, *Int. Jour. of Numerical Method of Fluids*, Vol.2, pp.89-112, 1982.
  - 28) 大森博司, 松井徹哉, 日比野浩: 液体貯槽における有限振幅液面動揺に関する研究 (その 1), 基礎方程式の誘導とその円筒形貯槽への適用, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 375 号, pp.65-72, 1987.
  - 29) Funakoshi and Ito: Surface Waves due to Resonant Horizontal Oscillation, *Jour. of Fluid Mechanics*, Vol.192, pp.219-247, 1988.
  - 30) 藤野陽三, パチエコ ベニート, チャイセリ ピヤワット, 孫 利民, 古賀健一: TMD アナロジーをベースにした TLD の特性の理解, 構造工学論文集, No.36A, 土木学会, pp.577-590, 1990.
  - 31) 木村憲明, 大橋弘隆: 軸対称容器におけるスロッシングの非線形応答 (第 1 報, 支配方程式の導出と解の性質), 日本機械学会論文集 (第 1 部), 44 卷 385 号, pp.3024-3033, 1978.
  - 32) 木村憲明, 大橋弘隆: 軸対称容器におけるスロッシングの非線形応答 (第 2 報, 数値計算および実験との比較), 日本機械学会論文集 (第 1 部), 44 卷 386 号, pp.3446-3454, 1978.
  - 33) 船越満明, 井上 進: 水面波のカオス, 日本物理学会誌, Vol.44, No.5, pp.323-329, 1989.

(1995.11. 27 受付)

## NONLINEAR SLOSHING ANALYSIS OF CIRCULAR TUNED LIQUID DAMPER BY USING BOUSSINESQ EQUATION

Toshihiro WAKAHARA, Yozo FUJINO and Takashi NOMURA

A nonlinear Tuned Liquid Damper(TLD) 3D-model has been developed to investigate the nonlinear characteristics of circular TLD by using the Boussinesq equation. The numerical results were compared with the experimental data obtained from shaking table experiments. The validity of the proposed model was confirmed by the results of those comparisons. The nonlinear effects of wave in circular tank to TLD fluid dynamic force were also made clear to investigate the response curves, the phase curves and the visualized photographs of the free surface deformations from the numerical results.