

係数励振力と周期的変動荷重を受ける 偏平ケーブルの非線形振動

高橋和雄¹・鎌田智之²・花田博史³

¹正会員 工博 長崎大学教授 (〒852 長崎市文教町1-14)

²正会員 工修 前田建設工業 (株)

³学生員 長崎大学大学院

本研究では、係数励振力（周期的変動軸力）と周期的変動荷重が作用する系の非線形応答を平均法を用いて解析した。まず、平均法の精度を既往の解析結果および Runge-Kutta-Gill 法によるシミュレーション解との比較によって確かめる。次いで、係数励振力のみを受けるケーブルの応答をサグ比、係数励振力の振幅および減衰力のパラメータのもとに明らかにする。さらに、係数励振力と周期的変動荷重を同時に受ける偏平ケーブルの応答特性を検討する。

Key Words : nonlinear vibration, cable, parametric vibration, averaging method

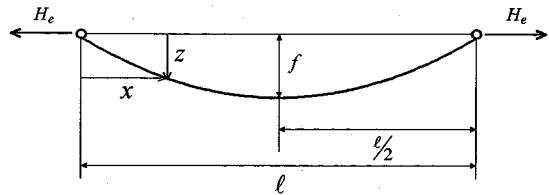
1. ま え が き

斜張橋の主桁もしくは塔が風荷重や走行荷重によって振動すると、支持ケーブルに振幅の大きな局部振動が発生することが指摘されている。この振動の原因にケーブルと桁の連成振動の内部共振、係数励振振動問題などが考えられ、いくつかの研究が見られる^{1),2)}。

著者らは、この方面の研究として、係数励振力を受けるケーブルの線形応答を明らかにしている^{3),4)}。文献3)において、ケーブルの支点が拘束された場合の動的不安定領域を示している。文献4)において、ケーブルの支点が動きうる場合の運動方程式を用いて解析し、軸方向の励振力によって係数励振振動と強制振動が同時に生ずることを示した。ケーブルの支点が拘束された場合には、たわみによる非線形項が効いてくるため、振幅は有限の大きさになることが予想される。しかし、この場合について、ケーブルのサグ比、励振力および減衰定数のもとに解析した結果はない。微分方程式を直接数値積分すれば、応答が得られるが、分岐を含む問題では解が複数個存在するため解の性質を明らかにするには解析的方法を用いなければならない。

また、ケーブルが主桁や塔の振動によって外力を受ける場合には、係数励振力の他に、周期的変動荷重を受けることが考えられる。このような場合の解析をしておくべきであるが、未だ行われていないようである。

そこで、本研究では係数励振力と周期的変動荷重を受ける偏平ケーブルの非線形運動方程式を解析するもので



図—1 偏平ケーブルの一般図

ある。偏平ケーブルの運動方程式を Galerkin 法を用いて 1 自由度系の非同次の非線形常微分方程式に変換する。次いで、この方程式を過渡状態を含めて取り扱える平均法⁵⁾を用いて解析する。数値解析において、既往の解析⁶⁾および Runge-Kutta-Gill 法によるシミュレーション解と比較することによって、定常解の精度を明らかにする。次いで、係数励振力が単独に作用する場合と係数励振力と周期的変動荷重が同時に作用する場合について、ケーブルの応答をケーブルの形状および減衰定数のパラメータのもとに明らかにする。

2. 係数励振力と周期的変動荷重を受ける偏平ケーブルの非線形運動方程式

Irvine の成書⁷⁾によれば、図—1 に示す偏平ケーブル（サグ比 $\gamma = f/l < 1/8$, $z = 4fx(l-x)/l^2$ ）が係数励振力 $H_l \cos \Omega t$ と周期的変動荷重 $p \cos(\Omega t + \varphi)$ を受ける場合の非線形運動方程式は次式で与えられる。

$$L(w) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{8f}{l^2} h - (H_e + H_t \cos \Omega t + H_a) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - p \cos(\Omega t + \varphi) = 0 \quad (1)$$

ここに、 $H_a = \frac{EA}{L_e} \left\{ \frac{8f}{l^2} \int_0^l w dx + \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$: たわみによる付加水平張力、 m : ケーブルの質量、 f : ケーブルのサグ、 l : スパン長、 H_e : 初期水平張力、 H_t : 係数励振力の振幅、 p : 荷重強度、 w : たわみ、 x : 支点からの水平距離、 t : 時間、 Ω : 係数励振力と周期的変動荷重の円振動数、 E : ヤング率、 A : 断面積、 $L_e = l(1 + 8f^2/l^2)$: 放物線ケーブルの長さ、 φ : 位相角。

係数励振力と周期的変動荷重を同時に受ける偏平ケーブルの運動方程式 (1) には、係数励振力の項 (第3項) と変動荷重の項 (第4項) が同時に含まれる。つまり、式 (1) は非同次の Mathieu 方程式で与えられる。

3. 解 法

分岐問題を取り扱うため、式 (1) の解を1自由度系モデルで次の変数分離形に仮定する⁹⁾。

$$w = IT(t)W(x) \quad (2)$$

ここに、 $T(t)$: 時間関数、 $W(x)$: 境界条件を満足する座標関数。

上式の座標関数 W として、基準化した対称1次線形自由振動の固有振動形を用いる。

$$W(x) = \left(1 - \tan \frac{\pi \omega_1}{2} \sin \pi \omega_1 \xi - \cos \pi \omega_1 \xi \right) / W_{\max} \quad (3)$$

ここに、 $\omega_1 = n_1 / \pi n_0$: 第1次の無次元固有円振動数、 n_1 : ケーブルの第1次の固有円振動数、 $n_0 = \pi \sqrt{H_e / ml^2}$: サグ $f=0$ となる弦の第1次の固有円振動数、 W_{\max} : 第1次対称振動の最大振幅、 $\xi = x/l$ 、 $\bar{p}_0 = pl/H_e$ 。

式 (2) は式 (1) の厳密解ではない。式 (1) に式 (2) を代入した方程式に Galerkin 法を適用し離散化した後、減衰力を考慮すると次の時間に関する常微分方程式が得られる。

$$\ddot{T} + 2h\omega_1 \dot{T} + (\omega_1^2 + C_1 \bar{H}_1 \cos \bar{\omega} \tau) T + C_2 T^2 + C_3 T^3 = C_4 \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega} \tau + \varphi) \quad (4)$$

注1) ケーブルは連続体であるため、多自由度系としてのモデル化がより厳密であるが、1次固有振動数近傍のみの応答とその2倍付近に現れる1/2分数調波共振に注目しているため、本研究では1次振動のみを考え1自由度系と仮定した。また、分岐応答は単独で現れるために、1自由度系として仮定しても差しつかえない。しかし、1次振動の応答曲線と高次振動の高調波共振が連成する可能性がある。これについては別途多自由度系として取り扱う必要がある。

ここに、 $C_1 = I_b / I_a \pi^2$ 、 $C_2 = 12\gamma I_b I_c I_d$ 、

$$C_3 = I_b^2 I_d / 2$$
、 $C_4 = I_c / I_a \pi^2$ 、

$$I_a = \int_0^1 W^2 d\xi$$
、 $I_b = \int_0^1 W'^2 d\xi$ 、

$$I_c = \int_0^1 W d\xi$$
、 $I_d = k^2 / (1 + 8\gamma^2) I_a \pi^2$ 、

h : 減衰定数、 $\bar{\omega} = \Omega / n_0$: 無次元加振円振動数、 $\tau = n_0 t$: 無次元時間、 $k = \sqrt{EA/H_e}$: 縦波-横波伝播速度比、 $\gamma = f/l$: サグ比、 $\bar{H}_1 = H_t / H_e$: 無次元係数励振力の振幅。

式 (4) は、2次、3次の非線形項をもつ非線形微分方程式である。ケーブルはサグ f をもつために、2次の非線形項が含まれる。

非同次の Mathieu 方程式の過渡状態を含めた解析を行える平均法⁹⁾による解析を行う。式 (4) の一般解には、外力項 $C_4 \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega} \tau + \varphi)$ から得られる外力と同周期の主共振および $C_1 \bar{H}_1 \cos \bar{\omega} \tau T$ の係数励振の項から得られる $\bar{\omega} = 2\omega_1/n$ ($n=1, 2, \dots$) 付近に生ずる単純共振が存在する⁹⁾。ここに、 $n=1$ の場合を主不安定領域、 $n \geq 2$ を副不安定領域と呼ぶ。この他に、式 (4) の2次および3次の非線形項 $C_2 T^2$ 、 $C_3 T^3$ を介して $\bar{\omega} = \omega_1/n$ ($n \geq 2$) 付近に n 倍の高調波共振、 $\bar{\omega} = n\omega_1$ ($n \geq 2$) 付近に $1/n$ 倍の分数調波共振、非周期解としてカオスも存在しうる^{9), 10)}。本論文では係数励振力と周期的変動荷重の相互作用を議論するため、係数励振振動が支配的となる $\bar{\omega} = 2\omega_1$ 付近の主不安定領域と $\bar{\omega} = \omega_1$ 付近の副不安定領域における解を検討する。これらの近傍では非線形強制振動から得られる1/2分数調波共振および主共振がそれぞれ生じ、両者の連成振動が現れることが予想される。以上の理由により、式 (4) の近似解として次式を仮定する。

$$T = c_0 + c_{1/2} \cos \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + c_1 \cos \bar{\omega} \tau + s_1 \sin \bar{\omega} \tau \quad (5)$$

ここに、 c_0 、 c_1 、 s_1 : 付随調波成分

$c_{1/2}$ 、 $s_{1/2}$: 分岐調波成分

振幅を求めるために、式 (5) は次のように書き換えられる。

$$T = c_0 + A_{1/2} \cos \left(\frac{\bar{\omega} \tau}{2} - \varphi_{1/2} \right) + A_1 \cos(\bar{\omega} \tau - \varphi_1) \quad (6)$$

ここに、 $A_{1/2} = \sqrt{c_{1/2}^2 + s_{1/2}^2}$: 分岐応答成分

$A_1 = \sqrt{c_1^2 + s_1^2}$: 付随応答成分

$\varphi_{1/2} = \tan^{-1}(s_{1/2}/c_{1/2})$ 、 $\varphi_1 = \tan^{-1}(s_1/c_1)$: 位相差

式 (5) を式 (4) に代入し、平均法を適用すれば平均化方程式が次のように得られる。

$$h\omega_1 \frac{dc_0}{d\tau} = -\frac{1}{2} \omega_1^2 c_0 - \frac{1}{4} c_1 C_1 \bar{H}_1 - \frac{1}{2} C_2 \left(c_0^2 + \frac{1}{2} c_{1/2}^2 + \frac{1}{2} s_{1/2}^2 + \frac{1}{2} c_1^2 + \frac{1}{2} s_1^2 \right)$$

$$-\frac{1}{2}C_3\left\{c_0^3+\frac{3}{2}c_0(c_{1/2}^2+s_{1/2}^2+c_1^2+s_1^2)\right. \\ \left.+\frac{3}{4}c_1(c_{1/2}^2-s_{1/2}^2)+\frac{3}{2}c_{1/2}s_{1/2}s_1\right\} \quad (7)$$

$$\bar{\omega}\frac{dc_{1/2}}{d\tau}=\frac{1}{4}s_{1/2}(4\omega_1^2-\bar{\omega}^2)-h\omega_1c_{1/2}\bar{\omega} \\ -\frac{1}{2}s_{1/2}C_1\bar{H}_1+C_2(2c_0s_{1/2}+c_{1/2}s_1-s_{1/2}c_1) \\ +C_3\left\{\frac{3}{4}s_{1/2}(4c_0^2+c_{1/2}^2+s_{1/2}^2+2c_1^2+2s_1^2)\right. \\ \left.+3c_0(c_{1/2}s_1-s_{1/2}c_1)\right\} \quad (8)$$

$$\bar{\omega}\frac{ds_{1/2}}{d\tau}=\frac{1}{4}c_{1/2}(\bar{\omega}^2-4\omega_1^2)-h\omega_1s_{1/2}\bar{\omega} \\ -\frac{1}{2}c_{1/2}C_1\bar{H}_1-C_2(2c_0c_{1/2}+c_{1/2}c_1+s_{1/2}s_1) \\ -C_3\left\{\frac{3}{4}c_{1/2}(4c_0^2+c_{1/2}^2+s_{1/2}^2+2c_1^2+2s_1^2)\right. \\ \left.+3c_0(c_{1/2}c_1+s_{1/2}s_1)\right\} \quad (9)$$

$$2\bar{\omega}\frac{dc_1}{d\tau}=s_1(\omega_1^2-\bar{\omega}^2)-2h\omega_1c_1\bar{\omega} \\ +C_4\bar{\rho}_0\sin\varphi+C_2(2c_0s_1+c_{1/2}s_{1/2}) \\ +C_3\left\{\frac{3}{4}s_1(4c_0^2+2c_{1/2}^2+2s_{1/2}^2+c_1^2+s_1^2)\right. \\ \left.+3c_0c_{1/2}s_{1/2}\right\} \quad (10)$$

$$2\bar{\omega}\frac{ds_1}{d\tau}=-c_1(\omega_1^2-\bar{\omega}^2)-2h\omega_1s_1\bar{\omega}-c_0C_1\bar{H}_1 \\ +C_4\bar{\rho}_0\cos\varphi-C_2\left(2c_0c_1+\frac{1}{2}c_{1/2}^2-\frac{1}{2}s_{1/2}^2\right) \\ -C_3\left\{\frac{3}{4}c_1(4c_0^2+2c_{1/2}^2+2s_{1/2}^2+c_1^2+s_1^2)\right. \\ \left.+\frac{3}{2}c_0(c_{1/2}^2-s_{1/2}^2)\right\} \quad (11)$$

式(7)~(11)は過渡解を求める平均化方程式であり、これをRunge-Kutta-Gill法などを用いて数値積分すれば、応答が得られる。定常解は、上式において

$$\frac{dc_0}{d\tau}=\frac{dc_{1/2}}{d\tau}=\frac{ds_{1/2}}{d\tau}=\frac{dc_1}{d\tau}=\frac{ds_1}{d\tau}=0 \quad (12)$$

と置くことにより、連立非線形代数方程式が得られる。この式は調和バランス法による式と一致する。求めた連立方程式にNewton-Raphson法を用い、初期値のもとに解けば、解が求められる。平均法あるいは調和バランス法は、仮定した解の周期関数の振幅成分を得る方法で、仮定した調波成分と同じ数の連立非線形微分方程式あるいは連立非線形代数方程式が得られる。したがって、これを解けば振幅成分が得られる。

また、式(4)で $T(\tau)=P_1$ 、 $\dot{T}(\tau)=P_2$ とおくことによって、次の2元連立の1階常微分方程式に変換できる。

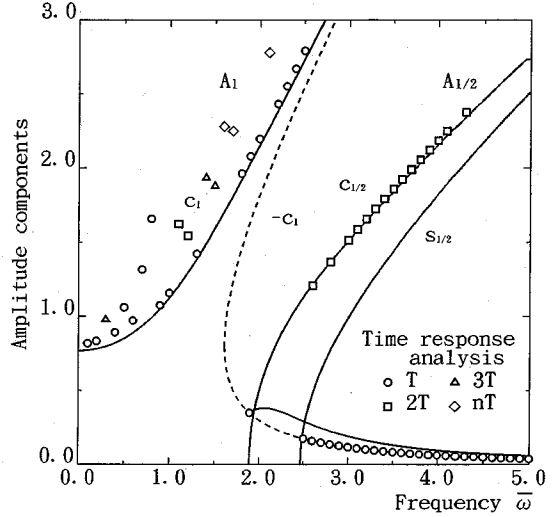


図-2 応答曲線
($h=0.01$, $\omega_1=1.0$, $\alpha=1.0$, $C_2=0$, $C_3=1.0$, $\beta=1.0$, $\varphi=0$)

$$\dot{P}_1=P_2$$

$$P_2=-2h\omega_1P_2-(\omega_1^2+C_1\bar{H}_1\cos\bar{\omega}\tau)P_1 \\ -C_2P_1^2-C_3P_1^3+C_4\bar{\rho}_0\cos(\bar{\omega}\tau+\varphi) \quad (13)$$

この式をRunge-Kutta-Gill法を用いて直接数値積分すれば、時間応答が得られる。

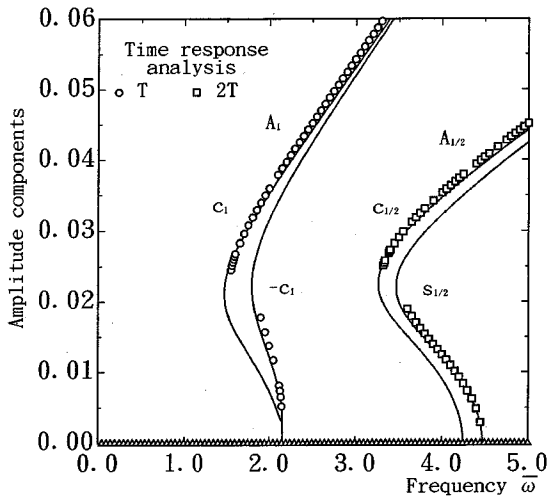
4. 係数励振力と周期的変動荷重を受ける系の非線形応答の解の特性と精度

式(4)で係数励振力の振幅 $C_1\bar{H}_1=\alpha$ 、変動荷重の振幅 $C_4\bar{\rho}_0=\beta$ と置いた一般形を対象とする。

$$\ddot{T}+2h\omega_1\dot{T}+(\omega_1^2+\alpha\cos\bar{\omega}\tau)T+C_2T^2+C_3T^3 \\ =\beta\cos(\bar{\omega}\tau+\varphi) \quad (14)$$

まず、文献6)と同じパラメータを用いて、解の精度を比較する。ここで、減衰定数 $h=0.01$ 、無次元固有円振動数 $\omega_1=1.0$ 、係数励振力の振幅 $\alpha=1.0$ 、2次の非線形項の係数 $C_2=0$ 、3次の非線形項の係数 $C_3=1.0$ 、変動荷重の振幅 $\beta=1.0$ 、位相角 $\varphi=0$ とする。

図-2は、上述のパラメータのもとでの応答曲線を示す。縦軸は振幅成分、横軸は無次元加振円振動数である。主調波応答 c_1 は、あらゆる振動数領域で生じ、実線が外力と同位相の応答 c_1 、破線が逆位相の応答 $-c_1$ を示している。1/2分数調波共振の応答 $c_{1/2}$ 、 $s_{1/2}$ は、無次元固有円振動数($\omega_1=1.0$)の2倍の主安定領域近傍の振動数領域でのみ現れる。文献6)には1/2分数調波共振が生じる場合の主調波応答が描かれているが、両者は完全に一致していることが確認されている。またシミュレーションによる応答をプロットした。高調波共振の領



図—3 応答曲線
 $(\gamma=0.03, k=30, \omega_1=2.18, \bar{H}_1=0.30, \bar{p}_0=0.0, h=0.005)$

域 (c_1 が正の応答曲線) の一部を除いて、平均法による解析解とシミュレーション解を比較すると、両者は一致している。なお、主調波応答 c_1 で一致しない解が見られるが、これは、式 (5) で仮定した周期解に含まれない高調波共振による解がシミュレーションに現れているためである。以上より、本研究では主調波応答と 1/2 分数調波共振のみを議論するため、平均法による解の精度は不十分である。高調波共振を取り扱うためには、別途解の仮定を行う必要がある。

なお、一般に 2 次の非線形項が 0 の場合に 1/2 分数調波共振の応答は現れないが、図—2 では現れている。これは、係数励振力の影響による主不安定領域が現れているためである。

5. 係数励振力のみを受ける偏平ケーブルの非線形振動

式 (1) において周期的変動荷重が作用しない係数励振力のみを受ける場合を考える。応答に及ぼすサグ比、係数励振力および減衰力の影響を解析する。式 (4) の係数 $C_1 \sim C_4$ および ω_1 は式 (3) の固有振動形と文献 7) で示された固有振動数を用いて求められる。これらはケーブルのサグ比 γ と縦波-横波伝播速度比 k をパラメータに決定される。なお、係数励振力のみが作用する場合には、加振円振動数 $\omega=2\omega_1$ 付近に生ずる主不安定領域 ($s_{1/2}, c_{1/2}$) と加振円振動数 $\omega=\omega_1$ 付近に生ずる副不安定領域 (s_1, c_1) の 2 種類が存在する。

図—3 には、サグ比 $\gamma=0.03$ 、縦波-横波伝播速度比 $k=30$ の偏平ケーブル ($h=0.005$) について、係数励振力の振幅 $\bar{H}_1=0.3$ の場合の応答曲線を示す。縦軸はケー

ブルの中央点の変位をスパンで割った無次元応答振幅、横軸は無次元加振円振動数である。図中にはシミュレーションによる応答も示している。ただし、シミュレーションに関しては、同一の振動数に対して複数の分岐応答が含まれるため振幅が小さい解には初速度を $\dot{T}=0.01$ とし、振幅の大きい解には初速度を 2 倍の $\dot{T}=0.02$ としている (ともに、初変位 $T=0$)。係数励振力のみを受けて振動する場合、応答はある特定の振動数領域でのみ発生する。また、初期条件により応答振幅が異なる。なお、本研究では振幅の安定判別を行っていないが、応答曲線が得られているので、鉛直接線 (応答曲線の勾配が無限大) を境に振幅は安定から不安定に、もしくは不安定から安定に移る¹¹⁾。したがって、鉛直接線より上側もしくは下側が不安定となる。数値シミュレーションでは安定な解のみが現れることになる。図—3 においてシミュレーションによる解が得られている振幅が安定である。

解析的に解の安定判別を行うためには、式 (4) の解 T に微小な外乱 $\delta(t)$ を与えた場合の変分方程式を検討すればよい¹²⁾。この変分方程式の T の項を式 (5) を使って整理すると Mathieu-Hill の方程式が得られる。この安定判別を文献 12) の方法を用いて行えば、解の安定性を明らかにすることができる。

サグ比 $\gamma=0.03$ の場合は、応答は振幅が小さい場合に 2 次の非線形項が支配的な軟化バネ特性を示し、大きくなると 3 次の非線形項が支配的となるため、固有円振動数の 2 倍の振動数 $2\omega_1$ における解は 3 個あるが、そのうち 2 個が安定な解として存在し、初期条件によって現れる応答が異なることになる。

(1) 係数励振力の振幅の影響

図—4~7 には、サグ比 $\gamma=0.01, 0.02, 0.04$ および 0.05 、縦波-横波伝播速度比 $k=30$ のケーブルについて、固有円振動数の 2 倍の無次元加振円振動数 $2\omega_1$ で加振した場合の応答振幅と無次元係数励振力の振幅との関係を示す。縦軸にケーブルの中央点の変位をスパンで割った無次元応答振幅、横軸に無次元係数励振力の振幅をとる。図中の実線は減衰定数 $h=0.005$ 、破線は減衰定数 $h=0.0$ の場合の解析解を示している。

サグ比 $\gamma=0.01$ では、係数励振力が小さい領域において軟化バネ特性を示すために図—3 に示したように安定な応答が 2 個存在し、初期条件によって応答が変わる ($s_{1/2}$ の振幅が小さい解、もしくは $c_{1/2}$)。軟化バネ特性を示すサグ比 $\gamma=0.02$ では、係数励振力に関係なく、2 個の解が存在する。サグ比 $\gamma=0.04$ の解は、サグ比 $\gamma=0.01$ と同じような特性を示している。硬化バネ特性を示すサグ比 $\gamma=0.05$ は、振幅の小さい領域にだけ応答が現れる。減衰力の影響はサグ比に無関係に、係数励振力の小さい領域において効く。

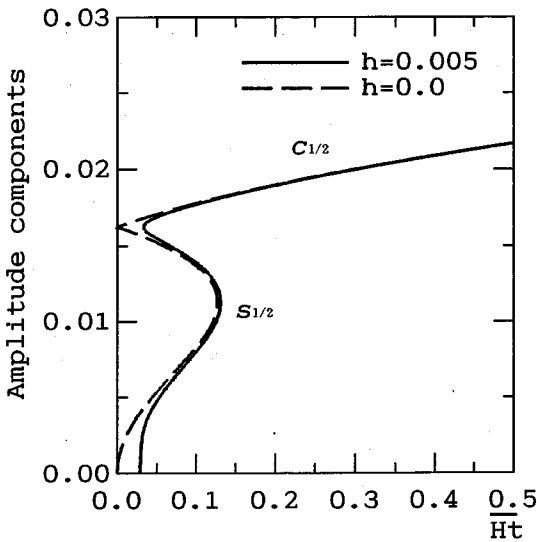


図-4 応答振幅と係数励振力の振幅の関係
($\gamma=0.01, k=30$)

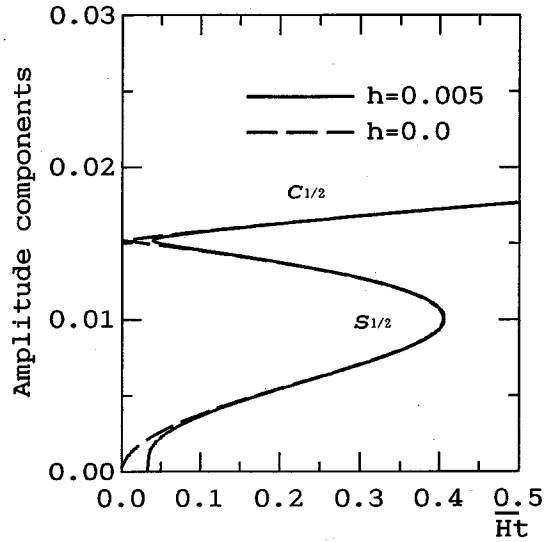


図-6 応答振幅と係数励振力の振幅の関係
($\gamma=0.04, k=30$)

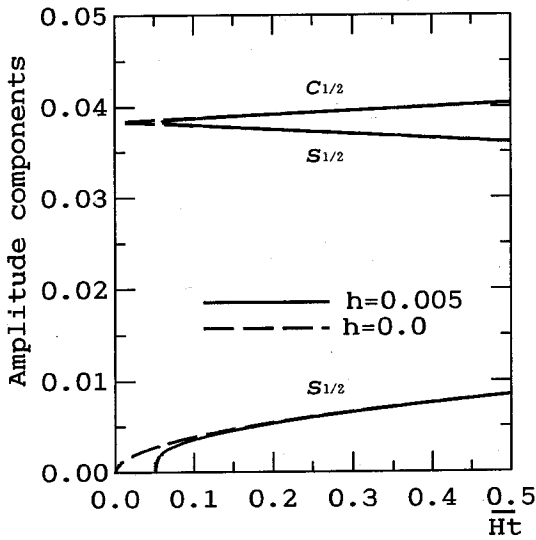


図-5 応答振幅と係数励振力の振幅の関係
($\gamma=0.02, k=30$)

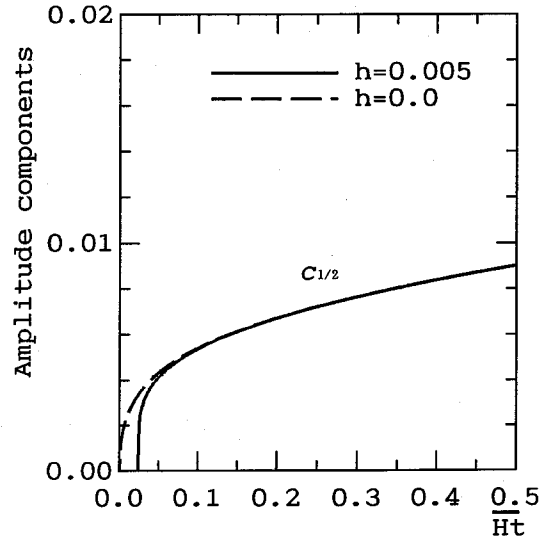


図-7 応答振幅と係数励振力の振幅の関係
($\gamma=0.05, k=30$)

(2) サグ比の影響

図-8には、主不安定領域 $2\omega_1$ における応答振幅 \bar{H}_i をパラメータに、縦波-横波伝播速度比 $k=30$ のケーブル ($h=0.005$) について示す。縦軸にケーブルの中央点の変位をスパンで割った無次元応答振幅で、横軸はサグ比 γ である。

実線は係数励振力の振幅 $\bar{H}_i=0.5$ 、破線は $\bar{H}_i=0.3$ 、一点破線は $\bar{H}_i=0.1$ の応答振幅を示す。応答振幅はサグ比 γ の影響を受け、サグ比の増加で、ほぼ一定だった応答が大きくなる ($\gamma=0.01$ 付近)。これは図-4に対応

し、係数励振力の振幅 $\bar{H}_i=0.1$ では応答が2つに分岐していることが確認される。また、モードの遷移現象が起きるサグ比の領域 ($\gamma=0.01\sim 0.03$ 付近) においては、2次の非線形項が支配的な硬化バネ特性をもつ領域があるため、2つに応答が分岐する。

2つに分岐した応答振幅は大きくなるか、もしくは急激に小さくなる ($\gamma=0.02$ 付近)。図-5に対応している。さらにサグ比が大きくなると、応答は再び1つになり、図-7に示すように係数励振力の振幅に関わらず、応答曲線は硬化バネ特性を示す。

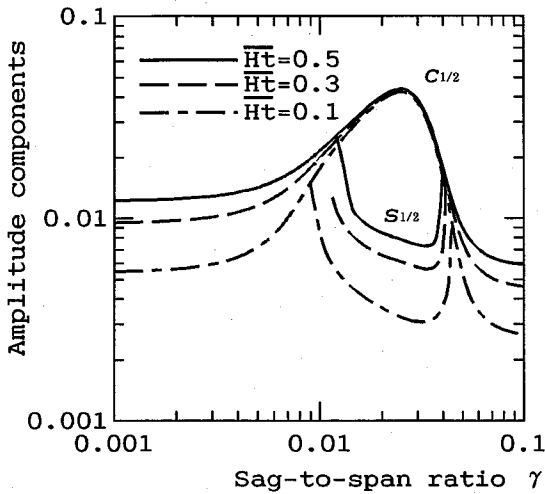


図-8 応答振幅とサグ比 γ の関係
($k=30, h=0.005$)

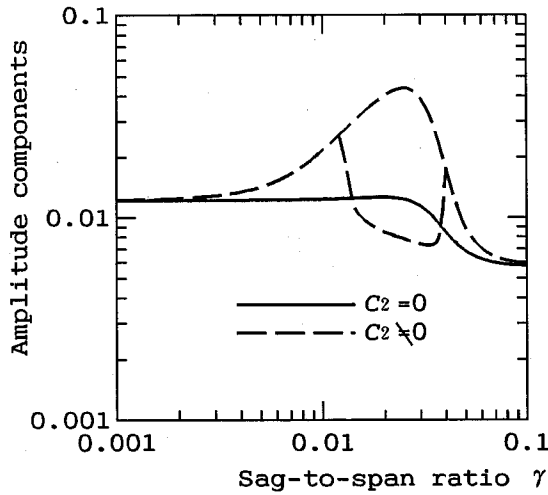


図-9 応答振幅とサグ比 γ の関係
($\bar{H}t=0.5, k=30, h=0.005$)

係数励振力の振幅を大きくすると、どのサグ比においても応答振幅が増大するが、モードの遷移領域における応答振幅のピークは変わらない。また、係数励振力が大きくなると軟化バネ特性を示す領域が狭くなる。

図-9は、縦波-横波伝播速度比 $k=30$ で2次の非線形項の係数 C_2 を考慮した場合と無視した場合の比較を示している。2次の非線形項を無視した場合、応答は3次の非線形項が支配的な硬化バネ特性を示すので、解は一つになりサグ比の変化による応答振幅への影響は小さい。したがって、2次の非線形項の影響によって、応答が大きく変動するといえる。

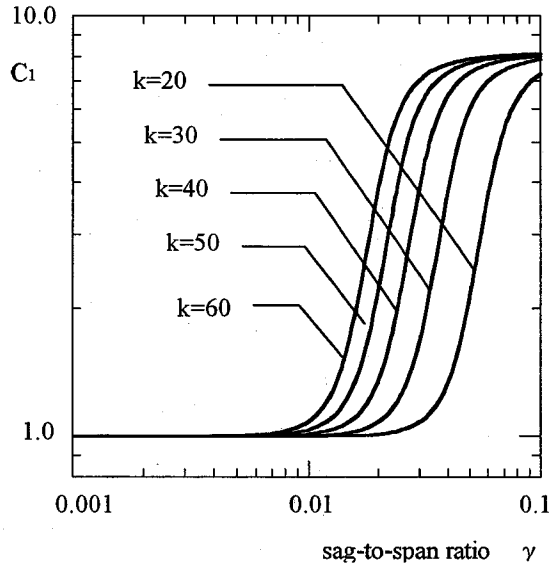


図-10 係数励振力の項の係数 C_1 とサグ比 γ の関係

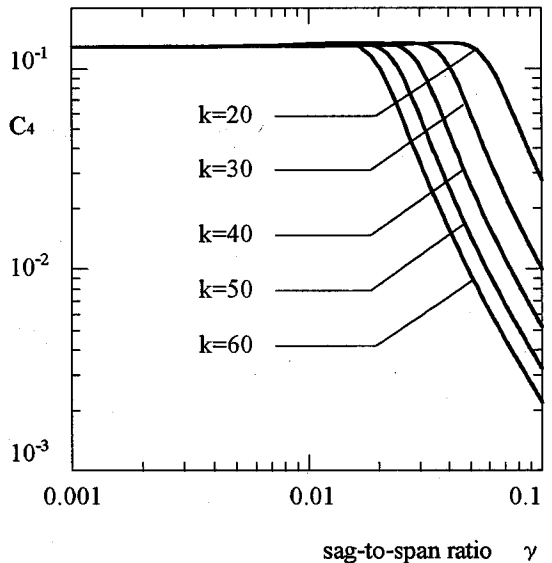


図-11 変動荷重の項の係数 C_4 サグ比 γ の関係

6. 係数励振力と周期的変動荷重が同時に偏平ケーブルに作用する場合の非線形振動

図-10, 11には、式(4)を用いて偏平ケーブルの係数励振力の項の係数 C_1 および変動荷重の項の係数 C_4 とサグ比 γ との関係縦波-横波伝播速度比 k をパラメータに示す。

係数励振力の項の係数 C_1 と変動荷重の項の係数 C_4 はモードの遷移領域において、ともに大きく変動している。係数励振力の項の係数 C_1 はモードの遷移領域でサ

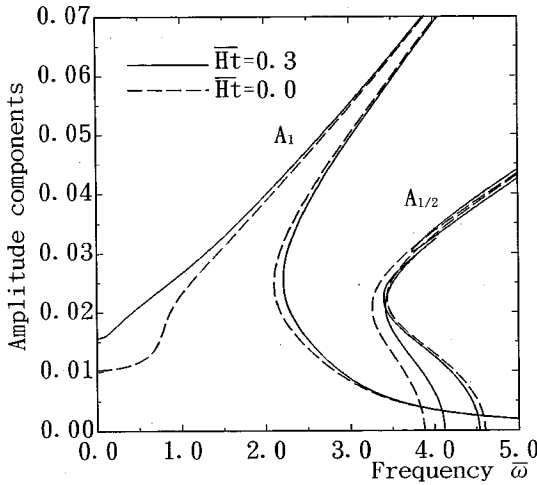


図-12 応答曲線
($\gamma=0.03, k=30, \omega_1=2.18, \bar{p}_0=0.3, h=0.005$)

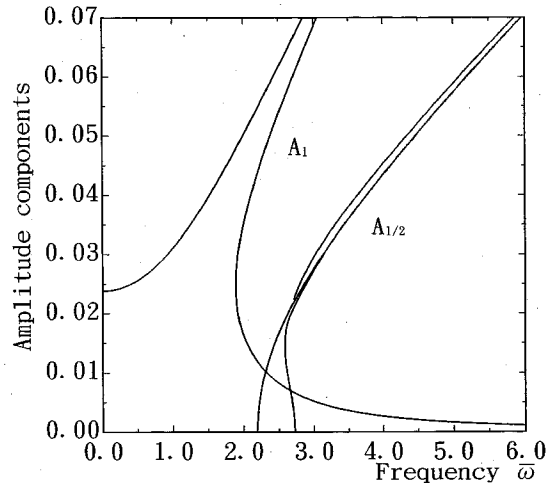


図-13 応答曲線
($\gamma=0.01, k=30, \omega_1=1.21, \bar{H}_t=0.3, \bar{p}_0=0.3, h=0.005$)

グ比の増加に伴い増大しているが、変動荷重の項の係数 C_4 はサグ比の増加に伴い減少している。図-10の C_1 と γ の関係は、モードの遷移後の一段高次の不安定領域に移ることと対応している³⁾。また、図-11の荷重項の係数は、モード形が $\sin\pi\xi$ から $\sin 3\pi\xi$ に遷移するため、等分布荷重に対しては、有効外力の項が減少することを示している。この他に、式(4)のパラメータとして ω_1, C_2 および C_3 がある。 ω_1 は線形振動数で1.0からモード遷移後は3.0に近づくことが知られている¹³⁾。 C_2 および C_3 は2次および3次の非線形項の係数である。2次の非線形項はケーブルがサグをもつことによって生ずる項で、振幅が小さいときに効いてくる。一方、3次の非線形項は、ケーブルの弾性伸びに対応する項である。これまでの研究によれば、2次の非線形項は、モード遷移領域のサグ比で効いてくる。モード遷移領域以外のサグ比や振幅が大きい場合には、3次の非線形項が支配的であることが分かっている¹⁴⁾。したがって、ケーブルに係数励振力と周期的変動荷重が作用する場合は、これらの特性を反映した応答特性を持つことになる。

図-12には、サグ比 $\gamma=0.03$ 、縦波-横波伝播速度比 $k=30$ のケーブル(減衰定数 $h=0.005$)について荷重強度を $\bar{p}_0=0.3$ とし、係数励振力が作用した場合 ($\bar{H}_t=0.3$) と、作用しない場合 ($\bar{H}_t=0.0$) の応答曲線の比較を示す。図中の実線は係数励振力が作用した場合であり、破線は係数励振力が作用しない場合を示す。周期的変動荷重が作用する場合、主調波応答はあらゆる振動数領域で発生し、係数励振力が作用しない場合は共振領域で c_1 と $-c_1$ の発生する振動数領域が狭くなる。しかし、振幅が大きくなると強制振動の項が卓越してくる。1/2分数調波共振においては、応答振幅の小さい領域で係数

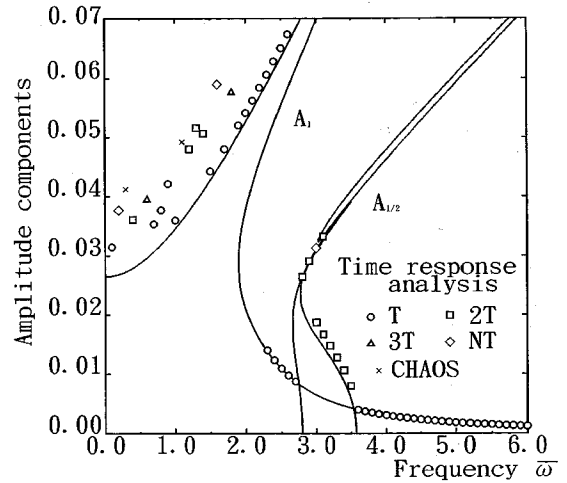
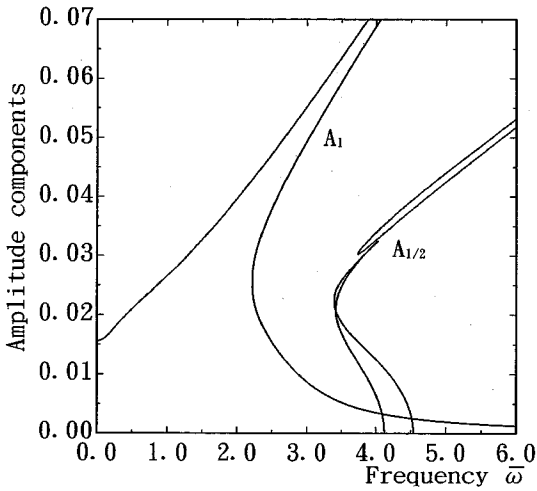


図-14 応答曲線
($\gamma=0.02, k=30, \omega_1=1.68, \bar{H}_t=0.3, \bar{p}_0=0.3, h=0.005$)

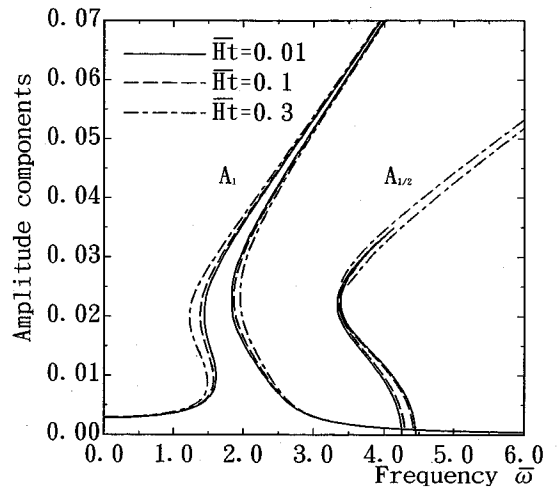
励振力が作用することによって、 $c_{1/2}$ と $s_{1/2}$ の発生する振動数領域が狭くなる。また、係数励振力が作用する場合に、応答振幅の大きな領域で別の分岐応答が発生している。係数励振力が作用しない場合よりもこの応答は振動数領域が広がっている。

(1) サグ比の影響

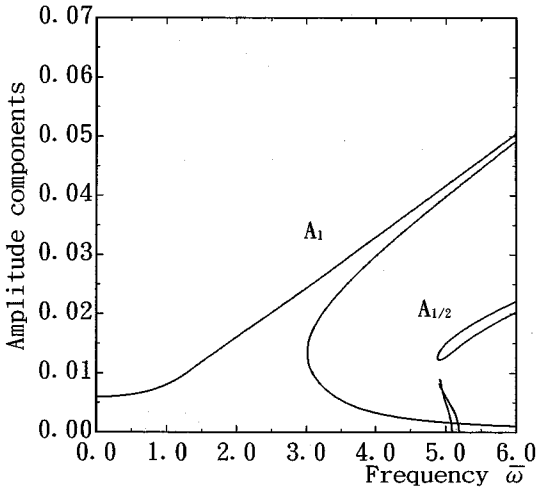
図-13~16には縦波-横波伝播速度比 $k=30$ 、無次元係数励振力の振幅 $\bar{H}_t=0.3$ および荷重強度 $\bar{p}_0=0.3$ の場合の偏平ケーブルについてサグ比 $\gamma=0.01, 0.02, 0.03$ および 0.04 の4つの場合について応答曲線を示す。主調波応答 A_1 は図-12に示したように強制振動の影響が支配的であるため、強制振動の特性が現れる。ケーブル



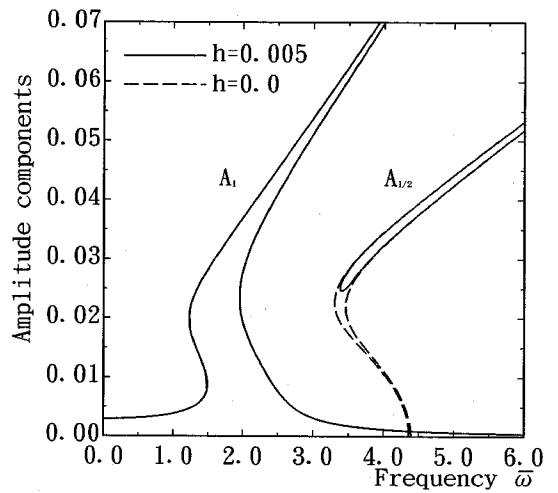
図—15 応答曲線
 $(\gamma=0.03, k=30, \omega_1=2.18, \bar{H}_t=0.3, \bar{p}_0=0.3, h=0.005)$



図—17 応答曲線
 $(\gamma=0.03, k=30, \omega_1=2.18, \bar{p}_0=0.1, h=0.005)$



図—16 応答曲線
 $(\gamma=0.04, k=30, \omega_1=2.55, \bar{H}_t=0.3, \bar{p}_0=0.3, h=0.005)$



図—18 応答曲線
 $(\gamma=0.03, k=30, \omega_1=2.18, \bar{H}_t=0.3, \bar{p}_0=0.1)$

の非線形振動特性がサグ比によって変化し、サグ比の増大とともに非線形性が強くなる¹⁴⁾。これに付随して、主調波応答に現れる非線形項の影響も大きくなり、応答振幅は小さくなる。つまり、振幅の振動数依存性が大きくなる。また、1/2分数調波共振については、振幅が小さい領域の分岐応答はサグ比によって現れる振動数領域の幅に変化がある。サグ比 $\gamma=0.02$ が最も広く、サグ比が大きくなるにつれて狭くなる。これに対して、応答振幅が大きい領域で発生する分岐応答はサグ比が大きくなるにつれて、幅が広くなり小さい振幅で発生するようになる。なお、本計算例は、荷重強度が大きいため主調波応答の振幅が大きく、3次の非線形項が支配的な振幅の増加によって復元力が増大する硬化バネ特性のみが現れて

いる。しかし、1/2分数調波共振では振幅が小さい領域で $\gamma=0.02\sim 0.04$ のケーブルにおいて振幅の増加によって振動数が減少する軟化バネ特性が現れている。

(2) 係数励振力の影響

図—17には、サグ比 $\gamma=0.03$ 、縦波-横波伝播速度比 $k=30$ のケーブルについて荷重強度 $\bar{p}_0=0.1$ 、減衰定数 $h=0.005$ の場合の係数励振力の振幅を $\bar{H}_t=0.01, 0.1, 0.3$ とした場合の応答曲線を示す。図中の実線は係数励振力の振幅 $\bar{H}_t=0.01$ で、破線は $\bar{H}_t=0.1$ で、一点破線は $\bar{H}_t=0.3$ である。係数励振力が大きくなると、主調波応答の共振領域が広がる。また、1/2分数調波共振は係数励振力の振幅を大きくすると、振幅の小さい領域

では $c_{1/2}$ と $s_{1/2}$ が互いに接近し、交差する。さらに係数励振力の振幅が大きくなると、振幅の小さい領域においては $1/2$ 分数調波共振は発生せず、振幅の大きな領域に分数調波共振が発生する。この振幅の大きな領域に発生した $1/2$ 分数調波共振は、係数励振力のみを考慮した場合の $1/2$ 分数調波共振のように $c_{1/2}$ と $s_{1/2}$ は互いに接近せず、振幅の大きな領域へ延びる。係数励振力は、 $1/2$ 分数調波共振に影響を及ぼし、この項が大きくなると、 $1/2$ 分数調波共振の応答も大きくなる。

(3) 減衰力の影響

図—18にはサグ比 $\gamma=0.03$ 、縦波-横波伝播速度比 $k=30$ のケーブルについて荷重強度 $p_0=0.1$ 、係数励振力の振幅 $\bar{H}_l=0.3$ の場合に減衰定数 h をパラメータにした応答曲線を示す。主調波応答は、減衰力の影響が見られない。 $1/2$ 分数調波共振の応答は、荷重強度 $p_0=0.0$ 、係数励振力の振幅 $\bar{H}_l=0.0$ の場合の背骨曲線に沿って $c_{1/2}$ 、 $s_{1/2}$ が発生する。また、減衰定数 $h=0.0$ の場合、応答振幅が小さくなると $c_{1/2}$ と $s_{1/2}$ の発生する振動数領域が狭くなる。減衰力を考慮した場合は、応答振幅の小さい領域において $c_{1/2}$ と $s_{1/2}$ が発生しなくなる。振幅の大きな領域には、主調波応答と同じように減衰力の影響が見られない。

7. ま と め

本論文では、係数励振力のみを受ける場合および係数励振力と周期的面内荷重を同時に受ける場合の偏平ケーブルの応答特性についてサグ比、係数励振力および荷重強度をパラメータに明らかにした。得られた結果を要約すると次のとおりである。

係数励振力のみが作用する場合について

1. 応答は特定の振動数領域で発生し、固有円振動数および固有円振動数の2倍付近で応答が発生する。
2. 特定のサグ比の領域において、応答が2つに分岐する。これは、振動モードの遷移現象に対応しており、2次の非線形項が支配的な軟化バネ特性のケーブルの場合に現れる。
3. 減衰力は応答振幅に対し、係数励振力が小さい場合に効き、係数励振力が大きい場合は効かない。ケーブルの減衰力は一般に小さいため、係数励振振動の振幅には減衰力が効かないことが予想される。

係数励振力と周期的変動荷重が同時に作用する場合について

4. サグ比の変化によって、係数励振力と周期的変動荷重の係数項が変動し、サグ比が大きくなると係数励振力の項は増大するが周期的変動荷重の項は減少する。
5. 係数励振力と周期的変動荷重を同時に作用した場合の応答は、係数励振力による振動と周期的変動荷重による振動の応答の両特性をもつ。係数励振力は、主調波応答には大きな影響を及ぼさない。一方、 $1/2$ 分数調波共振に対しては、係数励振力による影響が大きく現れる。
6. $1/2$ 分数調波共振において、係数励振力が作用すると、応答振幅の小さい領域と大きい領域に応答が2つに分岐する。
7. 減衰力は、 $1/2$ 分数調波共振の振幅の小さい領域に効く。

本研究では偏平ケーブルに係数励振力と周期的変動荷重が作用した場合の非線形応答を解析した。高次モードの高調波共振への影響や係数励振力と周期的変動荷重との間の振動数が異なる場合や位相差がある場合の解析は別途報告する。

謝辞：本論文をまとめるにあたって、多大な援助を頂いた大学院生の山口健市氏に感謝の意を表します。なお、計算には長崎大学総合情報処理センターのFACOM V-1200を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 藤野陽三, Pennung Warnitchai, Benito M. Pacheco : ケーブルはりモデルを用いた斜張橋の内部共振に関する実験と解析, 土木学会論文集, No. 432/I-16, pp. 109-118, 1991.
- 2) A. Pinto, J. Martins, J. L. Lilien : Parametric Excitation of Cables of Cable-Stayed Bridges, *International Conference A.I.P.C.-F.I.P.*, pp. 475-482. 1994.
- 3) K. Takahashi : Dynamic Stability of Cables Subjected to an Axial Periodic Load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 144, No. 2, pp. 323-330, 1991.
- 4) 高橋和雄, 鎌田智之, 町田健一郎, 松野進 : 支点が動きうるサグ比の小さいケーブルの動的安定性, 土木学会論文集, No. 495/I-28, pp. 127-130, 1994.
- 5) 井上順吉 : 機械力学, 理工学社, pp. 199-227, 1982.
- 6) 津田吉広, 末岡淳男, 田村英之 : 強制係数励振系の応答特性について, 日本機械学会, 機械力学計測制御講演論文集, Vol. A, pp. 199-227, 1982.
- 7) Irvine, H. M. : *Cable Structures*, The MIT Press, pp. 87-99, 1981.
- 8) Bolotin, V. V. : *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964.
- 9) 前澤成一郎 : 振動工学, 森北出版(株), pp. 267-269, 1973.
- 10) Szemplinska-Stupnika, W. and Bajkowski, J. : The $1/2$

- Subharmonic Resonance and Its Transition to Chaotic Motion in a Non-linear Oscillator, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.21, pp.401-419, 1986.
- 11) 文献9) の pp.263-265.
 - 12) 高橋和雄, 河原清勝, 山辺輝久: はりおよび薄板の非線形振動の Galerkin 法による解析の収束性および安定性について, 土木学会論文報告集, 第 293 号, pp.9-22, 1980.
 - 13) 山口宏樹, 伊藤学: 単一ケーブルの三次元線形自由振動, 土木学会論文報告集, 第 286 号, pp.29-36, 1979.
 - 14) 高橋和雄, 藤本一人, 村中幸治, 田川賢: 調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析, 土木学会論文報告集, 第 338 号, pp.59-68, 1983.

(1995.6.16 受付)

NONLINEAR VIBRATION OF A SMALL-SAG CABLE SUBJECTED TO AN AXIAL TIME-VARYING LOAD AND TRANSVERSE TIME-VARYING LOAD

Kazuo TAKAHASHI, Tomoyuki KAMATA and Hiroshi HANADA

Nonlinear dynamic response of a suspended small-sag cable driven by harmonic axial load and harmonic transverse load is presented. The basic equation of motion is solved by a Galerkin method for space co-ordinate and the averaging method for time co-ordinate. The single-degree-of-freedom approach is employed in this paper. The accuracy of the present solution is discussed at first. Then, nonlinear dynamic responses of a suspended cable are shown for various sag-to-span ratios, damping ratios and amplitudes of harmonic load.