

下負荷面および回転硬化の概念に基づく 土の弾塑性構成式

橋口公一¹・上野正実²・陳 忠平³

¹正会員 工博, 農博 九州大学教授 農学部農業工学科 (〒 812-81 福岡市東区箱崎6-10-1)

²農博 琉球大学助教授 農学部生物生産学科 (〒903-01 沖縄県中頭郡西原町千原1)

³工修 九州大学大学院農学研究科博士課程 (農業工学専攻) (〒 812-81 福岡市東区箱崎6-10-1)

1960年代以降, 種々の繰返し塑性モデルが提案されている。これらの中で, 特に下負荷面モデルは, 関連流動則に従い, 連続性条件, 滑らか条件および仕事率・剛性緩和を満たすとともに, Masing効果を合理的に表し, 繰返し負荷挙動の予測に適用できる数学的な構造を有している。本論文では, 下負荷面の概念を導入し, また, 異方性の発達を表現するため, 降伏面の回転すなわち回転硬化の発展則を定式化して, 土の弾塑性構成式を規定する。この構成式を適用して砂の排水および非排水条件下の単調, 繰返し負荷挙動の予測を行い, 実測値との比較により, その妥当性を実証する。

Key Words : *constitutive equation, elastoplasticity, soil, subloading surface, rotational hardening, cyclic loading*

1. 序 論

繰返し負荷に対する材料の弾塑性挙動の表現は, 工学上の具体的問題の理論的予測に不可欠であり, 従前より多くの研究がなされている。古典弾塑性論においては, 降伏面の内部はいかなる応力変化によっても塑性変形を生じない“(純粋)弾性域”であると仮定される。ゆえに, 例えば, 応力振幅一定の繰返し負荷に対して, 初期負荷時にのみ塑性変形を生じ, 第2サイクル以降は弾性変形のみが繰り返されて, 塑性変形の集積, つまり, 力学的ラチェット現象を表現できない。したがって, 古典論は, 土木・建築構造物の耐震設計や機械・器具の耐振設計には適用できない。そこで, 1960年代以降, 繰返し負荷に対する塑性変形挙動を表現するためのモデルつまり繰返し塑性モデルが種々, 提案されてきた。これらの中で, 特に, 多面^{1),2)}, 二面^{3),4)}, 単面⁵⁾, 初期下負荷面^{6),7)}, 無数面⁸⁾, (拡張)下負荷面モデル⁹⁾はよく知られている。なお, 非線形移動硬化モデル^{10),11)}は多面モデルと同様の力学的特性を示すことが指摘されている¹²⁾⁻¹⁴⁾。また, 動径投影の境界面モデル¹⁵⁾は, 初期下負荷面モデルの枠組に属する¹⁶⁾。これらのモデルの中で, (拡張)

下負荷面モデル(以後, 単に“下負荷面モデル”と称する)のみが, 繰返し塑性構成式としての力学的要求条件, すなわち, 連続性条件, 滑らか条件, 仕事率・剛性緩和およびMasing効果のすべてを満たし得る^{17),18)}。また, 本モデルは, 金属の繰返し負荷挙動に対する適用性が実証され¹⁹⁾, さらに, 土に対する適用も試みられている^{20),21)}。なお, 土の繰返し負荷挙動の表現を目的として, 降伏面あるいは負荷面の内向きの応力速度に対しても(外向きの場合と異なる新たな塑性係数を仮定して)塑性変形が生じるとするモデル²²⁾⁻²⁵⁾が提案されている。これをZienkiewicz and Mroz²²⁾は“一般化塑性論”(generalized plasticity)と名付けているが, 種々の不合理な特性(例えば, 応力速度が降伏面あるいは負荷面の内向きである場合, より内向きであるほど塑性変形が顕著に生じる)を呈するモデルである。また, 砂を対象に, 拡張Mises (Drucker-Prager)型の降伏面の回転に基づくモデル^{26),27)}が提案されているが, 少なくともこれによっては等方あるいは異方圧密の繰返し負荷挙動を表現することはできない。さらに, 異方圧密粘土に対して, 楕円体面型の降伏面に回転を考慮したモデル²⁸⁾が提案されているが, 降伏面の回転の考慮は異方圧密過程に限定されており, ま

た、動径投影の境界面モデルつまり初期下負荷面モデルの枠組におけるもので、過大な力学的ラチェット現象を示し、繰返し負荷挙動の予測には適用できない。

金属の誘導異方性は、Bauschinger効果をもたらす移動硬化つまり降伏面の平行移動で簡明に表現できる。しかし、土の降伏面は原点を常にかろうじて含むので、異方性をもたらす偏差応力方向への降伏面の平行移動は一般に許されず、移動硬化は適用できない。他方、Sekiguchi and Ohta²⁹⁾は、回転した降伏面を用いて、 K_0 圧密地盤の初期異方性を簡明に表現することを提案した。橋口^{30),31)}は、これを“回転硬化”と称して、その発展則について考察した。

本論文では、繰返し負荷挙動の表現のため下負荷面の概念を導入するとともに、初期異方性さらには誘導異方性の表現のため回転硬化の概念を導入し、その発展則を規定して、粘土から砂にわたる土の弾塑性構成式を提案する。また、本構成式の適用性に関して、砂の実測値に対して比較、照査を行う。なお、応力（速度）およびストレッチング（変形速度あるいはひずみ速度）の符号は引張を正とする。また、応力はすべて間隙圧を差し引いたいわゆる有効応力を意味するものとする。

2. 回転硬化を考慮した下負荷面モデル

下負荷面モデル⁹⁾は、古典論における降伏面（本モデルにおいては、その物理的意味を明示する用語“正規降伏面”を用いる）の内部に、常に現応力点を通して正規降伏面に相似な形を保ちながら、膨張/収縮する下負荷面を仮定するのがその基本特性であるが、以下に土を対象に、回転硬化すなわち正規降伏面の回転を導入して、その具体的定式化を行う。

まず、通常のように、ストレッチング D は弾性ストレッチング D^e と塑性ストレッチング D^p に和の形に分解されるとする。

$$D = D^e + D^p \quad (1)$$

ここに、弾性ストレッチングは応力速度に対して次のように線形に関係づけられる。

$$D^e = E^{-1} \dot{\sigma} \quad (2)$$

σ は応力、 $\dot{\sigma}$ は共回転速度を表し、 E は弾性係数テンソルで次のHooke則の形式で与えられると仮定する。

$$E_{ijkl} = (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3)$$

ここに、 K および G はそれぞれ体積弾性係数およびせん断弾性係数で、一般に応力さらには内部状態変数の関数であり、また、 δ_{ij} はKroneckerのデルタである。

等方硬化および回転硬化をもつ正規降伏面を次式で与える。

$$f(\hat{p}, \hat{\chi}) = F(H) \quad (4)$$

ここに、 H は等方硬化変数、また、 $\hat{\sigma}$ を正規降伏面上の応力として

$$\hat{p} \equiv -\frac{1}{3}\text{tr}\hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma}^* \equiv \hat{\sigma} + \hat{p}I \quad (5)$$

$$\hat{\eta} \equiv \hat{Q} - \beta, \quad \hat{Q} \equiv \frac{\hat{\sigma}^*}{\hat{p}} \quad (6)$$

$$\hat{\chi} \equiv \frac{|\hat{\eta}|}{\hat{m}} \quad (7)$$

\hat{m} は、材料定数 ϕ および

$$\sin 3\hat{\theta}_\sigma \equiv -\sqrt{6} \frac{\text{tr}\hat{\eta}^3}{|\hat{\eta}|^3} \quad (8)$$

の関数、つまり

$$\hat{m} = f_m(\sin 3\hat{\theta}_\sigma; \phi) \quad (9)$$

である。 $|\cdot|$ は大きさを表す。以後、正規降伏面は相似性を維持すると仮定する。ゆえに、 f は $\hat{\sigma}$ の斉1次関数で表されることになり、Eulerの同次関数に関する定理を満たし、また、次の表現が成り立つ。

$$f(\hat{p}, \hat{\chi}) = \hat{p}g(\hat{\chi}) \quad (10)$$

式(6)の変数 $\hat{\eta}$ は、降伏面の回転を簡明に表すためにSekiguchi and Ohta²⁹⁾により導入されたものである。

回転硬化変数 β の発展則の規定に当って、次のように仮定する。

- 1) 正規降伏面の回転速度は塑性偏差ストレッチングの大きさに比例し、塑性的体積ストレッチングには依存しない。
- 2) 正規降伏面の回転範囲には限界が存在し、その限界を表す面を正規降伏面の“回転硬化限界面”と称する。回転硬化限界面は、式(9)の \hat{m} を表す関数 f_m において ϕ を他の材料定数 ϕ_b で置き換えた

$$\hat{m}_b = f_m(\sin 3\hat{\theta}_\sigma; \phi_b) \quad (11)$$

により、主応力空間において原点に頂点を持ち、中心軸が平均応力軸に一致する次式の錘面で与えられる。

$$\frac{|\sigma|}{p} = \hat{m}_b \quad (12)$$

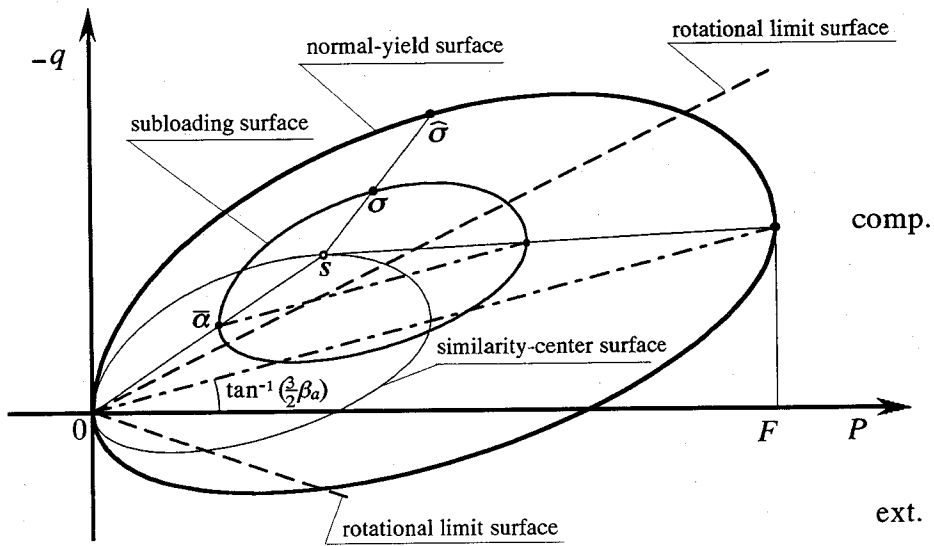


Fig.1 Normal-yield and subloading surfaces with a rotational hardening illustrated in the axisymmetric stress state in the (p, q) plane.

ここに,

$$\sigma_m \equiv \frac{1}{3} \text{tr} \sigma, \quad p \equiv -\sigma_m, \quad \sigma^* \equiv \sigma + pI \quad (13)$$

- 3) 正規降伏面の中心軸 $\sigma^*/p = \beta$ は、回転硬化限界面上の共役線 $\sigma^*/p = \hat{m}_b \hat{\eta} / |\hat{\eta}|$ に漸近する。
- 4) 単調・比例 ($\sigma^*/p = \text{const.}$) 負荷つまり異方圧密過程においては、 β はこの負荷経路に漸近する。

これらを満たすものとして次式を仮定する。

$$\hat{\beta} = b_r |D^p| |\hat{\eta}| \hat{\eta}_b \quad (14)$$

ここに、 b_r は材料定数であり、また、

$$D_v^p \equiv \text{tr} D^p, \quad D^{p*} \equiv D^p - \frac{1}{3} D_v^p I \quad (15)$$

$$\hat{\eta}_b \equiv \hat{m}_b \hat{t} - \beta \quad (16)$$

$$\hat{t} \equiv \frac{\hat{\eta}}{|\hat{\eta}|} \quad (17)$$

以下に、下負荷面の概念を導入する。下負荷面は正規降伏面(4)に相似であるとし、次式で表わされると仮定する。

$$f(\bar{p}, \bar{\chi}) = RF(H) \quad (18)$$

ここに、

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma - \bar{\alpha} \quad (19)$$

$$\bar{p} \equiv -\frac{1}{3} \text{tr} \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma}^* \equiv \bar{\sigma} + pI \quad (20)$$

$$\bar{\eta} \equiv \bar{Q} - \beta, \quad \bar{Q} \equiv \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{p}} \quad (21)$$

$$\bar{\chi} \equiv \frac{|\bar{\eta}|}{\bar{m}} \quad (22)$$

\bar{m} は、 ϕ と

$$\sin 3\bar{\theta}_\sigma \equiv -\sqrt{6} \frac{\text{tr} \bar{\eta}^3}{|\bar{\eta}|^3} \quad (23)$$

の関数 f_m 、つまり

$$\bar{m} = f_m(\sin 3\bar{\theta}_\sigma; \phi) \quad (24)$$

である。 $\bar{\alpha}$ は、正規降伏面上の応力零の点に対応する下負荷面上の共役点である。 R ($0 \leq R \leq 1$) は正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比であり、 $R = 0$ および 1 はそれぞれ純粋弾性状態および正規降伏状態に相当する。すなわち、 $\bar{\alpha}$ は下負荷面の移動を表し、また、 R は正規降伏面に対する下負荷面の収縮率を表す。正規降伏面に対する下負荷面の相似性により次の関係が成り立つ (Fig.1 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= R\hat{\sigma}, \quad \bar{s} = Rs, \\ \bar{Q} &= \hat{Q}, \quad \bar{\eta} = \hat{\eta}, \quad \bar{\theta}_\sigma = \hat{\theta}_\sigma, \\ \bar{m} &= \hat{m}, \quad \bar{m}_b = \hat{m}_b, \quad \bar{\chi} = \hat{\chi}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに、

$$\bar{s} \equiv s - \bar{\alpha} \quad (26)$$

Fig. 1において、 β_a は β の軸方向成分であり、 q は σ_a および σ_l をそれぞれ軸応力および側方応力として次式で与えられる。

$$q \equiv \sigma_a - \sigma_l \quad (27)$$

以後、 $\hat{\sigma}$ は、下負荷面上の現応力 σ におけると同じ外向き法線をもつ正規降伏面上の共役応力とみなす。 s は正規降伏面と下負荷面の相似中心である。

さらに、式(10)と同様に次の表現が成り立つ。

$$f(\bar{p}, \bar{\chi}) = \bar{p}g(\bar{\chi}) \quad (28)$$

変数 R は、式(19), (25)₂, (26)から得られる

$$\bar{\sigma} = \sigma - (1 - R)s \quad (29)$$

を式(18)に代入した式を解くことにより算定され、さらに、 $\bar{\alpha}$ は関係式 $\bar{\alpha} = (1 - R)s$ で算定される。

式(14)-(17)および(25)より、応力が正規降伏面のすまたは内部に存在する一般状態に対して回転硬化の発展則は次式で与えられる。

$$\dot{\beta} = b_r |D^p| |\bar{\eta}| \bar{\eta}_b \quad (30)$$

ここに、

$$\bar{\eta}_b = \bar{m}_b \bar{t} - \beta \quad (31)$$

$$\bar{t} = \frac{\bar{\eta}}{|\bar{\eta}|} \quad (32)$$

$$\bar{m}_b = f_m(\sin 3\bar{\theta}_\sigma; \phi_b) \quad (33)$$

次に、正規降伏面と下負荷面の相似中心の移動則を規定する。

相似中心 s を通して応力空間の原点に関して正規降伏面に相似な面(“相似中心面”と呼ぶ)は次式で表される。

$$f(p_s, \chi_s) = R_s F(H) \quad (34)$$

ここに、 R_s ($0 \leq R_s \leq 1$)は正規降伏面に対する相似中心面の大きさの比である。なお、式(10), (28)と同様に次の表現が成り立つ。

$$f(p_s, \chi_s) = p_s g(\chi_s) \quad (35)$$

以上において、

$$p_s = -\frac{1}{3} \text{tr} s, \quad s^* = s + p_s I \quad (36)$$

$$\eta_s = Q_s - \beta, \quad Q_s = \frac{s^*}{p_s} \quad (37)$$

$$\chi_s = \frac{|\eta_s|}{m_s} \quad (38)$$

m_s は、式(9)の関数 f_m において引数 $\sin 3\hat{\theta}_\sigma$ を

$$\sin 3\theta_s = -\sqrt{6} \frac{\text{tr} \eta_s^3}{|\eta_s|^3} \quad (39)$$

で置き換えた関数、つまり

$$m_s = f_m(\sin 3\theta_s; \phi) \quad (40)$$

相似中心は正規降伏面の内部に存在しなければならない。すなわち、相似中心面は正規降伏面より大きくはなり得ない。ゆえに、次の不等式が満たされねばならない。

$$f(p_s, \chi_s) \leq F(H) \quad (41)$$

式(41)は、微分形で次のように表わされる。

$f(p_s, \chi_s) = F(H)$ つまり $R_s = 1$ のとき

$$\text{tr} \left[\frac{\partial f(p_s, \chi_s)}{\partial s} (\dot{s} + \frac{1}{F} \{ \text{tr} (\frac{\partial f(p_s, \chi_s)}{\partial \beta} \dot{\beta}) - \dot{F} \} s) \right] \leq 0 \quad (42)$$

ここに、 $(\dot{\cdot})$ は物質時間微分を示す。不等式(41)または(42)は“相似中心の包圍条件”と称される。

ここで、式(42)を満たす次式を仮定する。

$$\dot{s} + \frac{1}{F} \{ \text{tr} (\frac{\partial f(p_s, \chi_s)}{\partial \beta} \dot{\beta}) - \dot{F} \} s = c |D^p| \bar{\sigma} \quad (43)$$

ここに、

$$\bar{\sigma} = \sigma - s \quad (44)$$

c (≥ 0)は材料関数である。式(43)より相似中心の移動則として次式を得る。

$$\dot{s} = c |D^p| \bar{\sigma} + \frac{1}{F} \{ \dot{F} - \text{tr} (\frac{\partial f(p_s, \chi_s)}{\partial \beta} \dot{\beta}) \} s \quad (45)$$

下負荷面の式(18)を微分することにより、次式が得られる。

$$\text{tr} (\frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}}) + \text{tr} (\frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \bar{\beta}} \dot{\bar{\beta}}) = R \dot{F} + \dot{R} F \quad (46)$$

ここに、 $\dot{\bar{\sigma}}$ は式(29)から次のように表わされる。

$$\dot{\bar{\sigma}} = \dot{\sigma} - (1 - R) \dot{s} + \dot{R} s \quad (47)$$

ゆえに、式(46)は、速度変数として応力速度 $\dot{\sigma}$ 、および塑性ストレッチング D^p との関係が与えられている内部状態変数の変化速度 $\dot{\beta}$ 、 \dot{s} 、 \dot{F} に加えて、 \dot{R} を含む。したがって、本式を塑性係数を決定するための適応条件に拡張するためには、 \dot{R} と D^p の関係を与えねばならない。

そこで、塑性負荷過程においては、応力、したがって、下負荷面は正規降伏面に漸近する、つまり、 R は次の関係を満たして単調に増大すると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} R = 0: \dot{R} &= +\infty, \\ 0 < R < 1: \dot{R} &> 0, \\ R = 1: \dot{R} &= 0, \\ R > 1: \dot{R} &< 0. \end{aligned} \right\} (D^p \neq 0) \quad (48)$$

ゆえに、塑性負荷過程における R の発展式は次式で与えられる。

$$\dot{R} = U(R) |D^p| \quad (D^p \neq 0) \quad (49)$$

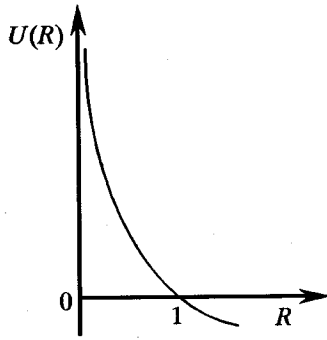


Fig.2 The function U of variable R .

ここに、 U は次の関係を満たす R の単調減少関数である (Fig.2)。

$$\left. \begin{aligned} R=0: U &= +\infty, \\ 0 < R < 1: U &> 0, \\ R=1: U &= 0, \\ R > 1: U &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

関数 U の具体例を以下に示す。

$$U = u_1 (1/R^{m_1} - 1) \quad (51a)$$

$$U = -u_2 \ln R \quad (51b)$$

ここに、 u_1 、 u_2 および m_1 は材料定数である。

次の関連流動則を仮定する。

$$D^p = \lambda \bar{N} \quad (\lambda > 0) \quad (52)$$

ここに、 λ は正値の比例係数であり、また、 \bar{N} は下負荷面の外向き単位法線つまり

$$\bar{N} \equiv \frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \sigma} / \left| \frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \sigma} \right| \quad (53)$$

式(30)、(45)、(47)、(49)および(52)を下負荷面に拡張された適応条件式(46)に代入して、正値の比例係数 λ は次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{\text{tr}(\bar{N} \dot{\sigma})}{D_p} = \frac{\text{tr}(\bar{N} E D)}{D_p + \text{tr}(\bar{N} E \bar{N})} \quad (54)$$

ここに、

$$D_p \equiv \text{tr}(\bar{N} \bar{a}) + \text{tr}(\bar{N} \bar{\sigma}) \left\{ \frac{F'}{F} h - \frac{1}{RF} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \beta} b \right) + \frac{U}{R} \right\} \quad (55)$$

$$\bar{a} \equiv \frac{\dot{\alpha}}{\lambda} = (1-R) z - U s \quad (56)$$

$$F' \equiv \frac{dF}{dH}, \quad h \equiv \frac{\dot{H}}{\lambda} \quad (\dot{F} = F' \lambda h) \quad (57)$$

$$b \equiv \frac{\dot{\beta}}{\lambda} = b_r |\bar{N}^*| |\bar{\eta}| \bar{\eta}_b \quad (58)$$

$$z \equiv \frac{\dot{s}}{\lambda} = c \tilde{\sigma} + \frac{1}{F} \left\{ F' h - \text{tr} \left(\frac{\partial f(p_s, \chi_s)}{\partial \beta} b \right) \right\} s \quad (59)$$

$$\bar{N}^* \equiv \bar{N} - \frac{1}{3} (\text{tr} \bar{N}) I \quad (60)$$

なお、次の負荷基準^{32)~34)}を採用する。

$$\left. \begin{aligned} D^p \neq 0: \text{tr}(\bar{N} E D) &> 0, \\ D^p = 0: \text{tr}(\bar{N} E D) &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

先に明らかにしたように、本モデルは、連続性条件¹⁸⁾

$$\lim_{\delta D \rightarrow 0} \dot{\sigma}(\sigma, S_i, D + \delta D) = \dot{\sigma}(\sigma, S_i, D) \quad (62)$$

のみならず、滑らか条件

$$\lim_{\delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\dot{\sigma}(\sigma + \delta \sigma, S_i, D)}{D} = \frac{\dot{\sigma}(\sigma, S_i, D)}{D}$$

$$\left(\lim_{\delta \alpha_{rs} \rightarrow 0} \frac{\dot{\sigma}_{ij}(\alpha_{rs} + \delta \alpha_{rs}, (S_i)_{rs}, D_{rs})}{D_{kl}} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}(\alpha_{rs}, (S_i)_{rs}, D_{rs})}{D_{kl}} \right) \quad (63)$$

を満たす。ここに、スカラーまたはテンソルの内部状態変数を S_i ($i = 1, 2, \dots, m$)として、応力速度の応答を $\dot{\sigma}(\sigma, S_i, D)$ で示している。

降伏面の内部を弾性域とする古典論は、滑らか条件(63)に抵触し、負荷基準における降伏の判定や応力が降伏面から飛び出さないように応力増分を選択するための特殊なコンピュータアルゴリズム^{35)~37)}を導入する必要がある。他方、下負荷面モデルにおいては、滑らか条件が満たされるので、降伏判定は必要でなく、また、応力が正規降伏面から飛び出すとき、すなわち、 $R > 1$ に対して、式(48)により $\dot{R} < 0$ であるので、応力は自動的に正規降伏面に引き戻される。また、Masing効果は材料関数 c の選択によって制御可能であり、これによりヒステリシス・ループが現実的に描かれる¹⁸⁾。なお、既往の大部分の土の塑性構成式は、降伏面と異なる塑性ポテンシャル面を仮定する非関連流動則を用いており、弾塑性構成式における基本条件である仕事率・剛性緩和に抵触するのに対して^{17), 38), 39)}、本モデルは関連流動則を用いており、この緩和条件をも満たす¹⁷⁾。

3. 材料関数

本節では、下負荷面モデルにおける材料関数を土に対して具体的に与える。

まず、下負荷面、相似中心面および回転硬化境界面の形状に関して次の材料関数を採用する。

$$g(\bar{\chi}) = 1 + \bar{\chi}^2, \quad g(\chi_s) = 1 + \chi_s^2 \quad (64)$$

$\beta = 0$ の場合、主応力空間において、式(18), (28), (64)₁による下負荷面の $\bar{\theta}_\sigma =$ 一定の子午線断面は、長軸が平均応力軸に平行な半楕円形を呈する。

さらに、次の諸式を仮定する。

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \frac{2\sqrt{6} \sin\phi}{3 \{1 + a(1 - \sin^2 3\bar{\theta}_\sigma)\} - \sin\phi \sin 3\bar{\theta}_\sigma}, \\ m_s &= \frac{2\sqrt{6} \sin\phi}{3 \{1 + a(1 - \sin^2 3\theta_s)\} - \sin\phi \sin 3\theta_s}, \\ \bar{m}_b &= \frac{2\sqrt{6} \sin\phi_b}{3 \{1 + a(1 - \sin^2 3\bar{\theta}_\sigma)\} - \sin\phi_b \sin 3\bar{\theta}_\sigma} \end{aligned} \quad (65)$$

式(65)₁の \bar{m} による式 $\bar{\chi} = 1$ つまり $|\bar{\eta}| = \bar{m}$ は、 $\beta = 0$, $\bar{\alpha} = 0$ のとき、軸対称伸長・圧縮状態において、 $|\sigma^*|/P = 2\sqrt{6} \sin\phi / (3 \pm \sin\phi)$ (+: 伸張 ($\bar{\theta}_\sigma = -\pi/6$), -: 圧縮 ($\bar{\theta}_\sigma = \pi/6$)) となり、Coulomb-Mohrの破壊則の形式に一致し、加えて、 $0.0493 < a < 0.176$ のとき、 $0^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$ において凸面性を満たす。以後、 $a = 0.1$ とする。

等方硬軟化関数 $F(H)$ の規定に当って、次の体積 v と圧力 p の線形関係^(40,41)を導入する (Fig.3)。

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_v^p + \varepsilon_v^e \\ &= \ln \frac{v^p}{v_0} + \ln \frac{v}{v^p} \\ &= -(\rho - \gamma) \ln \frac{p_y}{p_{y0}} - \gamma \ln \frac{p}{p_0} \end{aligned} \quad (66)$$

本式の時間微分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} D_v &= D_v^p + D_v^e \\ &= -(\rho - \gamma) \frac{\dot{p}_y}{p_y} - \gamma \frac{\dot{p}}{p} \end{aligned} \quad (67)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} D_v &\equiv \text{tr} D, \quad \varepsilon_v \equiv \int D_v dt, \\ D_v^e &\equiv \text{tr} D^e, \quad \varepsilon_v^e \equiv \int D_v^e dt, \\ D_v^p &\equiv \text{tr} D^p, \quad \varepsilon_v^p \equiv \int D_v^p dt. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

ε_v , ε_v^e および ε_v^p はそれぞれ体積、弾性体積および塑性体積対数ひずみである。 v_0 は初期体積、 v^p は初期圧力 p_0 まで除荷した状態における体積で“塑性体積”と呼ばれる。 p_y および p_{y0} はそれぞれ降伏圧力およびその初期値である。 ρ および γ は、 $(\ln p, \ln v)$

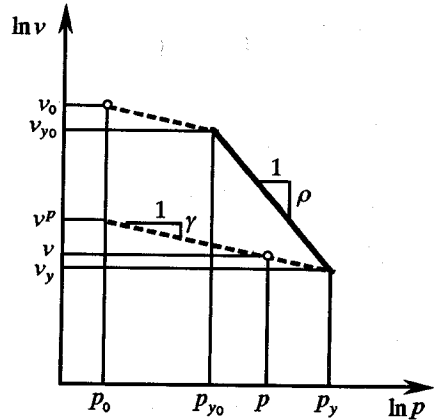


Fig.3 The $\ln v$ - $\ln p$ linear relation for isotropic consolidation of soils.

平面におけるそれぞれ正規圧密（弾塑性）線および膨潤（弾性）線の勾配である。

等方硬軟化関数 F を式(66)における p_y に一致するようによれば、等方圧縮過程においては次式が成り立つ。

$$F = F_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^p}{\rho - \gamma}\right) \quad (69)$$

ここに、 F_0 は F の初期値である。土の硬化・軟化は第一義的には塑性体積の減少・増加によって生じ、等方硬軟化関数は式(69)で与えられる。ところで、砂においては、塑性体積ストレッチングに加えて、塑性偏差ストレッチング D^{p*} によって応力比 $|\sigma^*|/p$ が小である場合および大である場合、それぞれ軟化および硬化がもたらされる^(42,43)。この事実を考慮して、式(69)を拡張し、等方硬軟化関数 F を次のように仮定する。

$$F = F_0 \exp\left(-\frac{H}{\rho - \gamma}\right) \quad (70)$$

$$\dot{H} = D_v^p + \mu |D^{p*}| \left(m_d - \frac{|\sigma^*|}{p}\right) \quad (71)$$

$$m_d = f_m(\theta_\sigma; \phi_d)$$

$$= \frac{2\sqrt{6} \sin\phi_d}{3 \{1 + a(1 - \sin^2 3\theta_\sigma)\} - \sin\phi_d \sin 3\theta_\sigma} \quad (72)$$

ここに、

$$\sin 3\theta_\sigma = -\sqrt{6} \frac{\text{tr} \sigma^*{}^3}{|\sigma^*|^3} \quad (73)$$

μ および ϕ_d は材料定数である。式(70), (71)により式(57)に対して次式が成り立つ。

$$F' = -\frac{F}{\rho - \gamma}, \quad h = \text{tr} \bar{N} + \mu |\bar{N}^*| \left(m_d - \frac{|\sigma^*|}{p} \right) \quad (74)$$

相似中心の移動則(45)における材料関数 c を次のように与える。

$$c = c_1 \exp(c_2 \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \bar{N}) / R^{c_3} \quad (75)$$

ここに、 c_1, c_2, c_3 は材料定数である。式(75)は、等方応力状態において $c = c_1 \exp(\pm c_2) / R^{c_3}$ (+:膨張, -:収縮)となる。

体積弾性係数 K は式(67)により次式で与えられる。

$$K = \frac{p}{\gamma} \quad (76)$$

弾性ストレッチングは式(2), (3), (76)により次のように与えられる。

$$D^e = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{p} \dot{\sigma}_m I + \frac{1}{2G} \dot{\sigma}^* \quad (77)$$

4. 共回転速度

2階テンソル T の共回転速度は次式で与えられる。

$$\dot{T} = \dot{T} - W_m T + T W_m \quad (78)$$

ここに、 W_m は共回転スピつまり材料内部構造のスピ(44,45)であり、次のように与えられると仮定する(46)~(48)。

$$W_m = W - W^P \quad (79)$$

ここに、 W は連続体スピつまり速度勾配テンソルの反対称部分であり、また、 W^P は塑性スピと名付けられ、移動硬化に対して具体形が提案されている(46)~(48)。

本モデルには二つの2階テンソルの塑性内部状態変数、つまり、回転硬化変数 β および相似中心 s が含まれている。しかし、相似中心は微小な塑性変形でも速やかに応力に漸近し、 $s \rightarrow \sigma$ となる。ゆえに、塑性スピの反対称形を構成するための2階テンソル変数として σ と β のみを採用すればよいであろう。そこで、移動硬化の場合を参照して(46)~(48)、塑性スピとして次式を仮定する。

$$W^P = \varphi |D^P| \zeta(\alpha, \beta), \quad \zeta \equiv \beta \sigma - \sigma \beta \quad (80)$$

ここに、 φ は材料定数または応力および内部状態変数の関数である。

5. 実測値との比較

本モデルの土への適用性を実証するために、実測

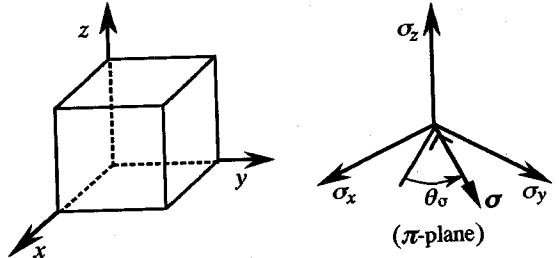


Fig. 4 Rectangular coordinates (x, y, z) and the variable θ_σ for the true triaxial test apparatus.

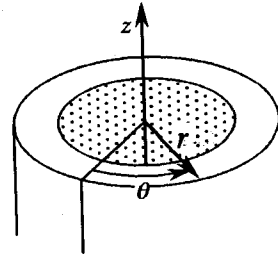


Fig. 5 Cylindrical coordinates (r, θ, z) for the hollow cylinder test apparatus.

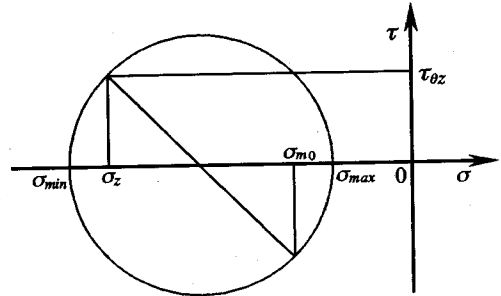


Fig. 6 Mohr's stress circle for the increments of axial stress and torsional shear stress from isotropic stress state in the hollow cylinder test apparatus.

値との比較を行う。なお、実測値におけるストレッチングの時間積分の絶対値は0.1以下であるので、 $W_m = 0$ つまり $\dot{T} \equiv \dot{T}$ とみなす。

(1) 排水試験

実測データは、1987年、米国クリーブランドで開催されたワークショップ⁴⁹⁾において予測コンテストの対象とされた砂の排水条件におけるものであるが、多くの研究者によってモデルの適合性の検証に用いられている。試験の詳細は文献⁴⁹⁾に述べられているが、概要を以下に述べる。

供試された土は、"Hostun sand"と称される粒径の揃った砂であり、初期間隙比 $e_0 = 0.616$ の密な状態

におけるものである。

実測データは真三軸および中空振り試験装置によって得られたものである。

真三軸試験装置：本試験装置に対して Fig.4 のように座標系 (x, y, z) がとられる。中間主応力の状態を表わす b 値は次式で定義される。

$$b \equiv \frac{\sigma_{max} - \sigma_{int}}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3} \tan \theta_\sigma) \quad (81)$$

$$(-\pi/6 \leq \theta_\sigma \leq \pi/6)$$

ここに、 σ_{max} 、 σ_{int} および σ_{min} はそれぞれ最大、中間および最小主応力である。軸対称伸張状態においては $b = 1$ ($-\alpha_x = -\alpha_y \geq -\alpha_z$, $\theta_\sigma = -\pi/6$)、軸対称圧縮状態においては $b = 0$ ($-\alpha_x = -\alpha_y \leq -\alpha_z$, $\theta_\sigma = \pi/6$) である。

中空振り試験装置：本試験装置に対して Fig.5 のように円柱座標系 (r, θ, z) がとられる。等方応力状態からの軸応力の変化 $\Delta\sigma_z$ と振りせん断応力 $\tau_{\theta z}$ に対して次式が成り立つ (Fig.6 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{int} &= \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_m \\ \left. \begin{aligned} \sigma_{max} \\ \sigma_{min} \end{aligned} \right\} &= \sigma_m + \frac{\Delta\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2} \\ \sigma_z &= \sigma_m + \Delta\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

ここに、 σ_m は初期等方応力値を示す。これより b 値は次式で与えられる。

$$b = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\Delta\sigma_z}{\sqrt{(\Delta\sigma_z)^2 + (2\tau_{\theta z})^2}} \right\} \quad (83a)$$

つまり

$$b = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (2\tau_{\theta z}/\Delta\sigma_z)^2}} \right\} \quad (83b)$$

$$(+: \Delta\sigma_z > 0, -: \Delta\sigma_z < 0)$$

ゆえに、 b 値一定試験においては、応力増分比 $\tau_{\theta z}/\Delta\sigma_z$ が一定に保たれる。

計算における材料定数および初期値として次の値を用いた。

材料定数：

降伏面 (楕円体面) 形状 $\phi = 28^\circ$

硬/軟化 $\left\{ \begin{array}{l} \text{等方} \left\{ \begin{array}{l} \text{体積 } \rho = 0.007 \\ \text{偏差 } \mu = 0.45, \phi_d = 20^\circ \end{array} \right. \\ \text{回転 } b_r = 130, \phi_b = 26^\circ \end{array} \right.$

R の発展 $u_1 = 0.5, m_1 = 3.8$

相似中心の移動 $c_1 = 10, c_2 = 1, c_3 = 3$

弾性定数 $\gamma = 0.003, G = 200,000$ kPa

初期値：

$F_0 = 400$ kPa, $\beta_0 = 0, s_0 = -50$ I kPa,

$\sigma_0 = -100$ I kPa

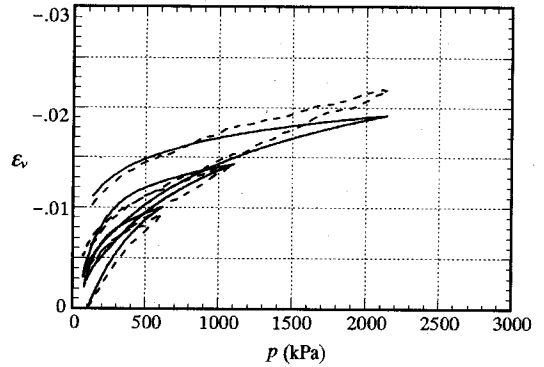


Fig.7 Cyclic isotropic loading by the true triaxial test apparatus.

ここに、 β_0, s_0 および σ_0 はそれぞれ β および s および σ の初期値である。例えば、 ρ, μ は等方圧密試験データを参照して決定されるが、これらを含めて予測の対象となる実測データの全てをよく近似し得るように材料定数さらには初期値 F_0, β_0 および s_0 を以上のように決定した。

示されている実測値の初期応力状態は試験によって異なるが、計算は、一貫して、以上の材料定数を用いて唯一の初期状態から行っている。実測結果および計算結果をそれぞれ点線および実線で示す。

a) 繰返し等方負荷 (真三軸試験装置)

Fig.7 に、繰返し等方負荷 $p = 100 \rightarrow 610 \rightarrow 75 \rightarrow 1100 \rightarrow 70 \rightarrow 2145 \rightarrow 137$ kPa を示す。

圧力が 1,000 kPa を超える状態でひずみが小さく予測される傾向が見られるが、相似中心の移動によりヒステリシス・ループも適切に表現されている。

b) 側方応力一定軸対称圧縮 (真三軸試験装置)

Fig.8 に、等方応力状態 $\sigma = -200$ I kPa からの側方応力一定軸対称圧縮を示す。本図で、 $|\sigma^*|$ および $|\varepsilon^*|$ はそれぞれ偏差応力および偏差ひずみの大きさであり、主値により次のように表される。

$$|\sigma^*| = \sqrt{\frac{1}{3}\{(\alpha_x - \alpha_y)^2 + (\alpha_y - \alpha_z)^2 + (\alpha_z - \alpha_x)^2\}}$$

$$|\varepsilon^*| = \sqrt{\frac{1}{3}\{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2\}} \quad (84)$$

除荷・再負荷における応答が実測値より剛くヒステリシス・ループが小さく予測されている。なお、関連流動則を用いているにもかかわらず、体積ひずみはむしろ小さく表現されている。これは、正規降伏面からみれば限界状態より密な側でも、正規降伏面の内部に存在する下負荷面上の応力点における外向き法線は平均応力軸の負方向の成分をも持ち得るので、塑性的体積収縮すらもたらし得、かつ、一般

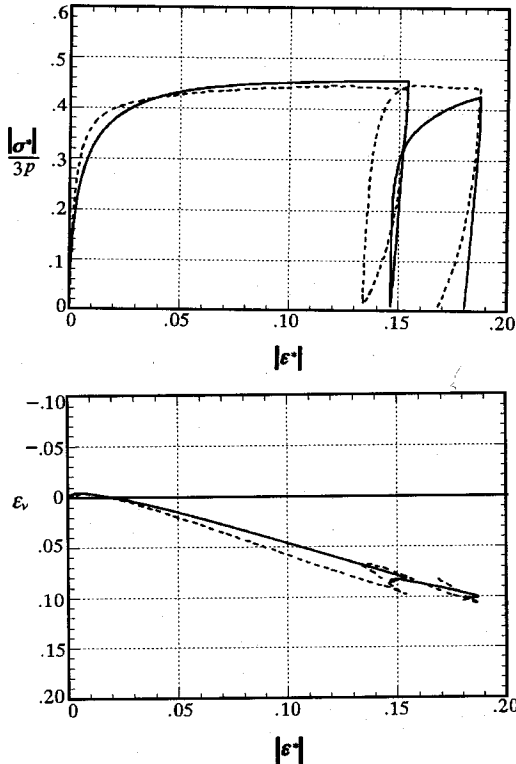


Fig. 8 Axisymmetric compression with a constant lateral stress by the true triaxial test apparatus.

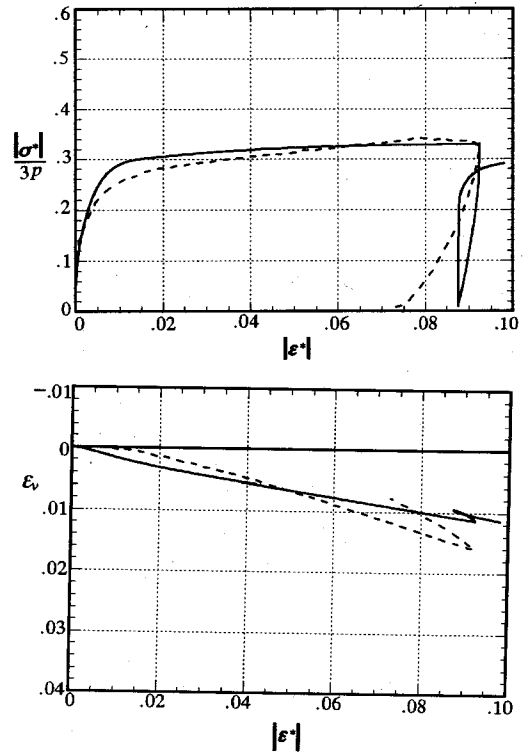


Fig. 9 Axisymmetric extension with a constant lateral stress by the true triaxial test apparatus.

に、この側では、応力は正規降伏面に達し得ないまま途中で折り返して限界状態に至ることによって考えられる(6. 参照)。

c) 側方応力一定軸対称伸張 (真三軸試験装置)

Fig. 9に、等方応力状態 $\sigma = -200$ I kPaからの側方応力一定軸対称伸張を示す。

本場合も除荷状態で実測値より剛い応答が予測されている。なお、理論曲線には、再負荷によるヒステリシス・ループも参考の意味で示している。

d) b 値: 0.286一定 (真三軸試験装置)

Fig. 10に、等方応力状態 $\sigma = -500$ I kPaからの $b = 0.286$ ($\theta_\sigma = 13.53^\circ$)の比例負荷を示す。つまり、等方応力 -500 kPaから、増分比 $\Delta\sigma_x/\Delta\sigma_z = -0.4005$ を満たしつつ、比例的に σ_z を -1100 kPaに、 σ_x を -259.7 kPaに変化させる。その間、 α_y は一定に維持される。

3方向の主ひずみは、実測値より小さく剛い応答が予測されており、また、体積ひずみは実測値よりやや膨張側に予測されている。

e) b 値: 0.666一定 (真三軸試験装置)

Fig. 11に、等方応力状態 $\sigma = -500$ I kPaからの $b = 0.666$ ($\theta_\sigma = -10.51^\circ$)の比例負荷を示す。つま

り、等方応力 -500 kPaから、増分比 $\Delta\sigma_x/\Delta\sigma_z = -0.5015$ を満たしつつ、比例的に σ_x を -665.5 kPaに、 σ_z を -170 kPaに変化させる。

3主ひずみいずれも実測値に対するよい一致が見られる。しかし、本場合にも、体積ひずみは実測値よりやや膨張側に予測されている。

f) b 値: 0.286一定 (中空振り試験装置)

Fig. 12に、等方応力状態 $\sigma = -500$ I kPaからの $b = 0.286$ の比例負荷を示す。つまり、等方応力 -500 kPaから、増分比 $\tau_{\alpha z}/\Delta\sigma_z = -1.056$ を満たしつつ、比例的に σ_z を -926.1 kPaに、 $\tau_{\alpha z}$ を 450 kPaに変化させる。工学せん断ひずみ $\gamma_{\alpha z}$ に対するせん断応力 $\tau_{\alpha z}$ 、体積ひずみ ϵ_v および軸ひずみ ϵ_z の関係が示されている。

いずれも実測と理論の比較的よい一致が見られる。

g) b 値: 0.666一定 (中空振り試験装置)

Fig. 13に、等方応力状態 $\sigma = -500$ I kPaからの $b = 0.666$ の比例負荷を示す。つまり、等方応力 -500 kPaから、増分比 $\tau_{\alpha z}/\Delta\sigma_z = 1.421$ を満たしつつ、比例的に σ_z を -309.9 kPaに、 $\tau_{\alpha z}$ を 270 kPaに変化させる。

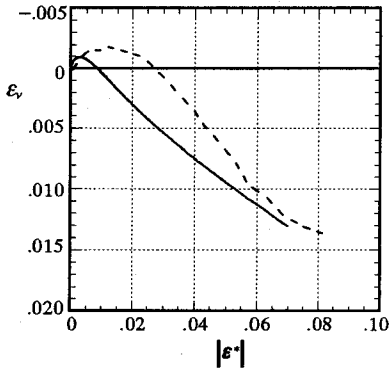
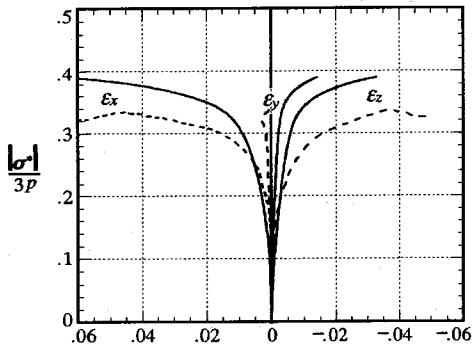


Fig.10 Proportional loading with $b = 0.286$ by the true triaxial test apparatus.

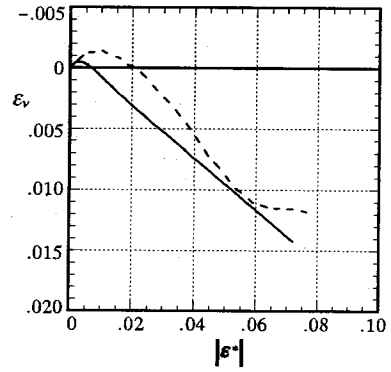
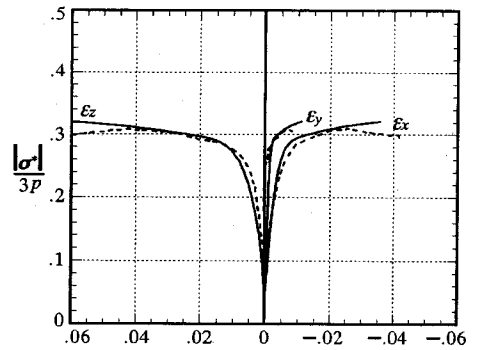


Fig.11 Proportional loading with $b = 0.666$ by the true triaxial test apparatus.

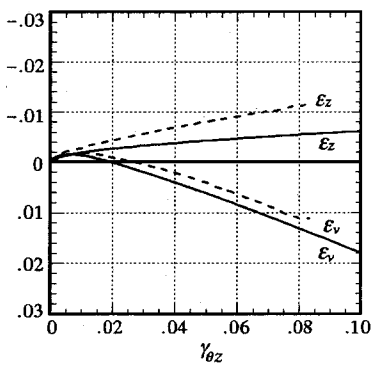
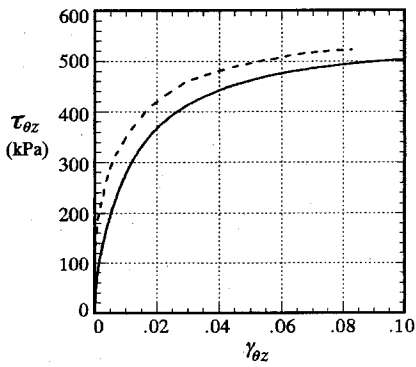


Fig.12 Proportional loading with $b = 0.286$ by the hollow cylinder test apparatus.

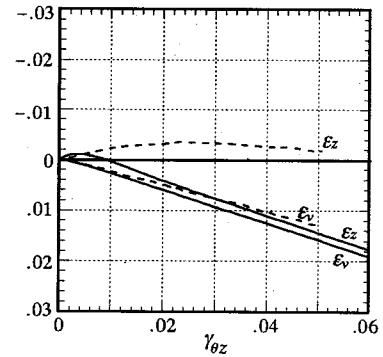
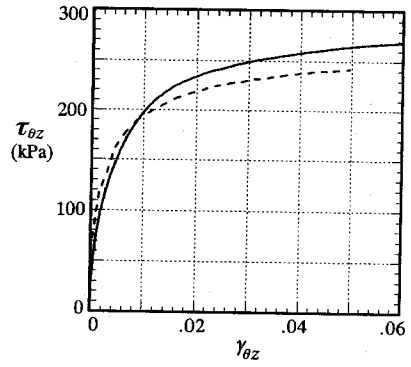


Fig.13 Proportional loading with $b = 0.666$ by the hollow cylinder test apparatus.

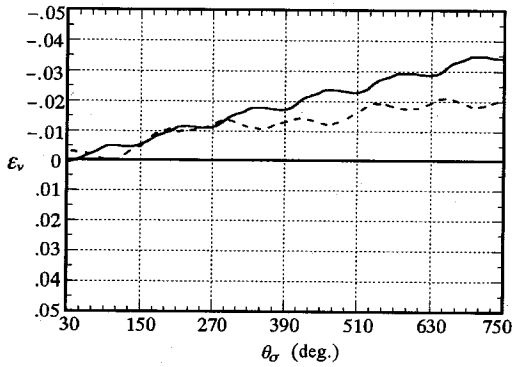
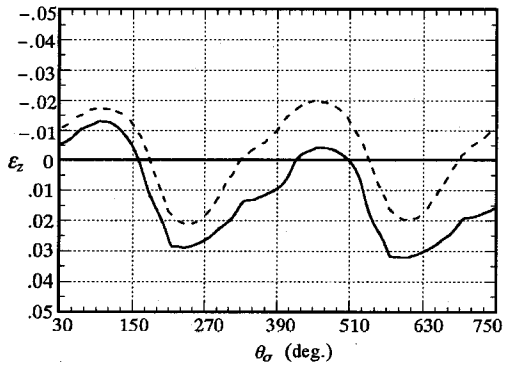
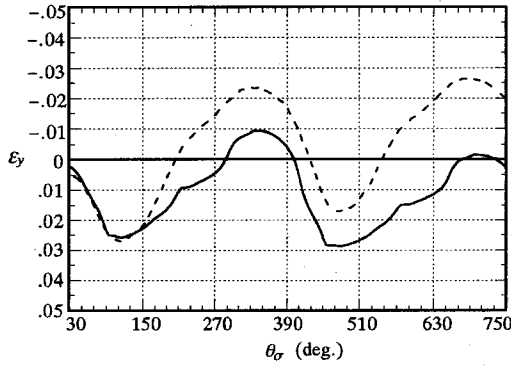
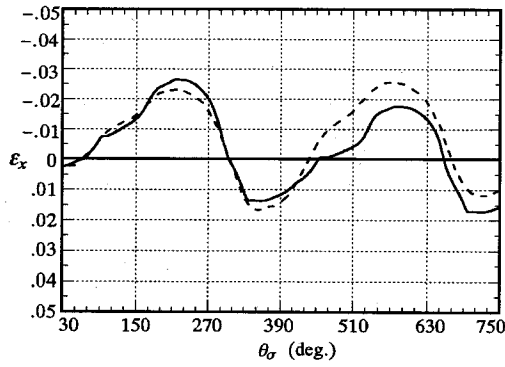


Fig. 14 Variations of three principal strains ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z and volumetric strain ϵ_v vs. θ_σ for the loading of circular stress path in the deviatoric stress plane by the true triaxial test apparatus.

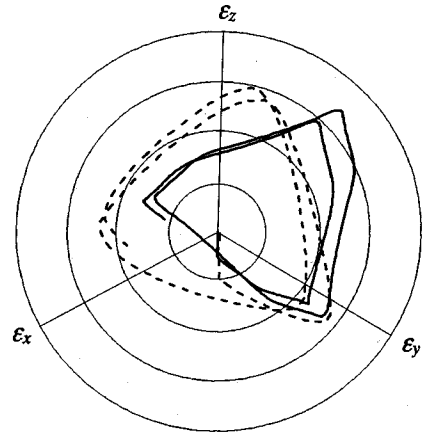


Fig. 15 Strain path in the deviatoric strain plane for the loading of circular stress path in the deviatoric stress plane by the true triaxial test apparatus.

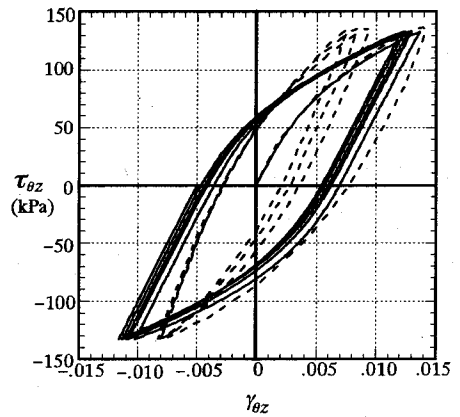


Fig. 16 Cyclic torsional loading by the hollow cylinder test apparatus.

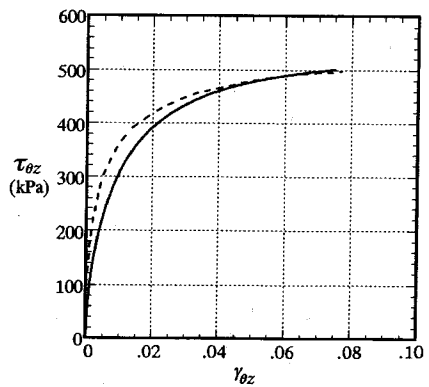


Fig. 17 Monotonic torsional loading after the cyclic torsional loading by the hollow cylinder test apparatus.

軸ひずみ ε_z は実測では圧縮であるのに対して著しい伸張が予測されているが、それ以外についてはよい一致が見られる。

h) 偏差応力平面における円形応力経路 (真三軸試験装置)

本試験は次の2段階からなる。

1) 等方応力 -500 kPaから平均応力を一定に保って比例負荷で α_x, α_y を -329 kPaに、 α_z を -843 kPaに変化させて、 $\alpha_m = -500$ kPa, $|\sigma^*| = 420$ kPaとする。

2) α_m および $|\sigma^*|$ を一定に保ちつつ、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_m + \sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma^*| \sin\left(\theta_\sigma + \frac{2}{3}\pi\right), \\ \alpha_y &= \alpha_m + \sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma^*| \sin\theta_\sigma, \\ \alpha_z &= \alpha_m + \sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma^*| \sin\left(\theta_\sigma - \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

により3主応力 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ を正弦的に変化させて、偏差応力平面において円形応力経路($\theta_\sigma = 30^\circ \rightarrow 750^\circ$)を描かせる。

Fig. 14に、 θ_σ に対する3主ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ および体積ひずみ ε_v の変化を示す。この結果に基づいて、Fig. 15に、偏差ひずみ平面におけるひずみ経路を示している。

体積ひずみおよび3主ひずみのいずれも比較的良好に予測されている。偏差ひずみ平面におけるひずみ経路は三角形形状となるが、その傾きつまり位相に実測と理論のずれがあるものの、大きさにはよい一致が見られる。

i) 繰返し振り負荷 (中空振り試験装置)

Fig. 16に、等方応力状態 $\sigma = -500$ kPaから、 α および σ_θ は一定に保ちつつ、軸応力を変化させて $\alpha_z = -1020$ kPaとした後、振幅 $\tau_{\theta z} = \pm 135$ kPaで行った繰返しせん断負荷(5サイクル)における $\gamma_{\theta z}$ に対する $\tau_{\theta z}$ の関係を示す。その後、 $\gamma_{\theta z}$ を単調に増大させた場合の $\gamma_{\theta z}$ に対する $\tau_{\theta z}$ の関係をFig. 17に示す。

実測値に比べて速やかなシェイク・ダウン(shake down)が見られるが、ひずみの振幅は実測値とほぼよい一致を示している。

(1) 非排水試験

三軸試験器による砂の非排水試験データとの比較により本構成式の非排水挙動への適用性を実証する。

a) 単調負荷

非排水状態の軸対称圧縮の単調負荷における(p, q)面上の応力経路および軸ひずみ ε_a に対する軸差応力 q の関係をFig. 18に示す。供試土は、初期圧力 p_0 において相対密度 $D_r = 0.27, 0.44, 0.47, 0.64$ を有するBanding砂である。計算における材料定数お

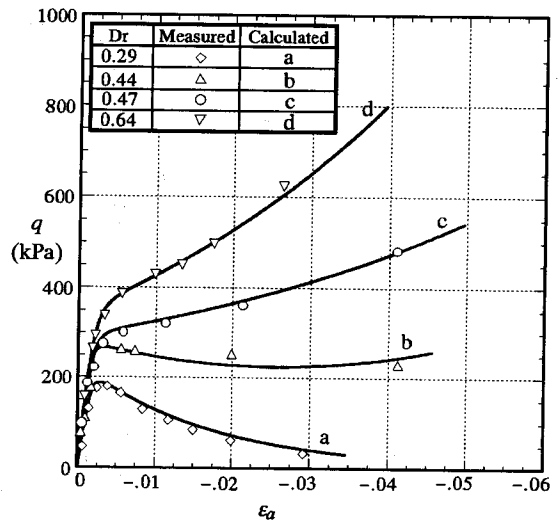
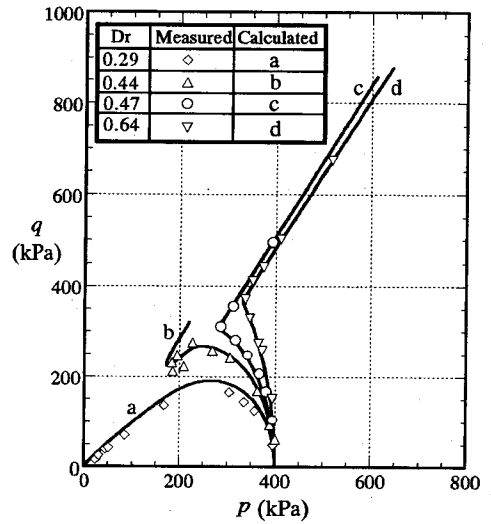


Fig. 18 Undrained monotonic loading behavior of Banding sand (data from Castro⁵⁰). Calculated results are shown by solid lines.

および初期値は以下の通りである。

材料定数:

降伏面(楕円体面)形状 $\phi = 26, 30, 31, 32^\circ$

硬/軟化 $\left\{ \begin{array}{l} \text{体積 } \rho = 0.025, 0.018, \\ \quad \quad \quad 0.014, 0.010 \\ \text{等方} \\ \text{偏差 } \mu = 1.0, 0.7, 0.2, 0.1 \\ \quad \quad \quad \phi_d = 40, 33, 30, 21^\circ \\ \text{回転 } b_r = 10, \phi_b = 20^\circ \end{array} \right.$

R の発展 $u_1 = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0,$
 $m_1 = 0.1, 0.4, 0.5, 0.7$
 相似中心の移動 $c_1 = 20, 18, 14, 8$
 $c_2 = 3, c_3 = 1$
 弾性定数 $\gamma = 0.0067, 0.0065,$
 $0.0060, 0.0058,$
 $G = 18,000, 23,000,$
 $25,000, 35,000 \text{ kPa}$
 初期値 :

$F_0 = 410, 450, 550, 580 \text{ kPa},$
 $\beta_0 = 0,$
 $s_0 = -200, -110, -100, -80 \text{ I kPa},$
 $\sigma_0 = -400 \text{ I kPa},$

単一の量に対する4個の数字は、同順に相対密度 $D_r = 0.27, 0.44, 0.47, 0.64$ に対するものを示す。
 応力経路、軸ひずみとともに実測値と理論値の極めてよい一致がみられる。

b) 繰返し負荷

軸対称応力状態における砂の繰返し非排水試験で得られたサイクリック・モビリティ(cyclic mobility)の実測結果^{42),43)} (供試材料:新潟砂, $e_0 = 0.737,$ $p_0 = 2.1 \text{ kgf/cm}^2,$ 応力振幅 $q = \pm 0.71 \text{ kgf/cm}^2$) および予測結果をそれぞれFig.19およびFig.20に示す。なお、計算においては、材料定数および初期値として次の値を用いている。

材料定数 :

降伏面(楕円体面)形状 $\phi = 30^\circ$
 硬/軟化 $\left\{ \begin{array}{l} \text{等方} \left\{ \begin{array}{l} \text{体積 } \rho = 0.01 \\ \text{偏差 } \mu = 1.1, \phi_d = 26^\circ \end{array} \right. \\ \text{回転 } b_r = 55, \phi_b = 35^\circ \end{array} \right.$
 R の発展 $u_1 = 2.5, m_1 = 1.3$
 相似中心の移動 $c_1 = 18, c_2 = 3, c_3 = 1$
 弾性定数 $\gamma = 0.0065, G = 18,000 \text{ kgf/cm}^2$

初期値 :

$F_0 = 5.5 \text{ kgf/cm}^2,$
 $\beta_0 = 0, s_0 = -0.2 \text{ I kgf/cm}^2,$
 $\sigma_0 = -2.1 \text{ I kgf/cm}^2$

応力経路、軸ひずみとともに実測値と計算値のよい一致がみられる。

6. 提案式の特長

本文で提案した下荷面モデル、回転硬化に基づく土の弾塑性構成式の主な特徴は以下の通りである。

1) 古典塑性論においては降伏面の内部を塑性変形

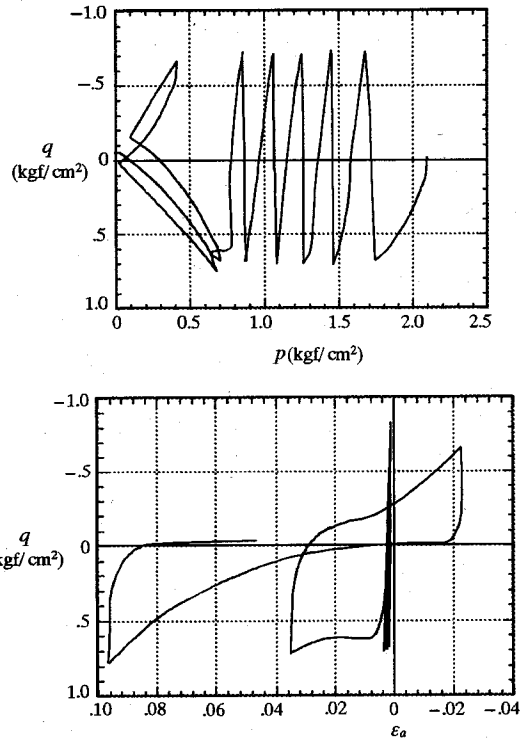


Fig. 19 Measured cyclic mobility of loose Niigata sand (after Tatsuoka⁴²⁾ or Ishihara et al.⁴³⁾).

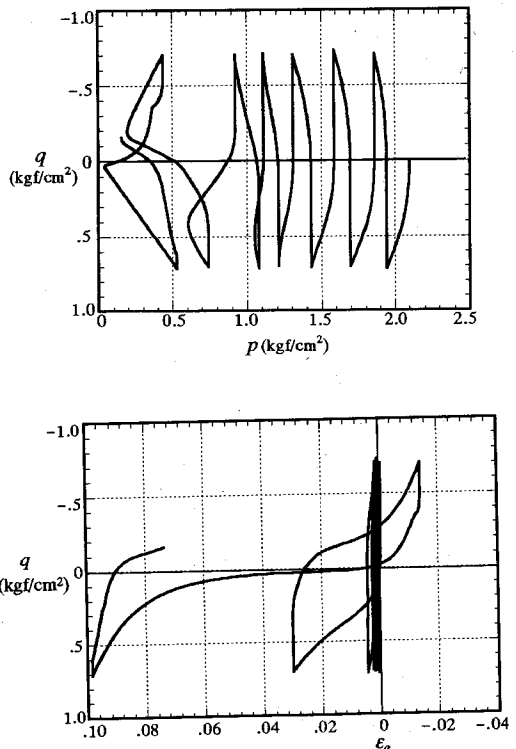


Fig.20 Predicted cyclic mobility of loose Niigata sand.

は生じない弾性域とみなす。一方、下負荷面モデルは、滑らか条件(63)を満たし、負荷基準において降伏判定は必要でなく、また、そのための計算プログラム (Euler法, radial return法, return mapping法等)を用いる必要はない。なお、過大な応力増分の入力により応力が正規降伏面から飛び出しても、応力を自動的に正規降伏面に引き戻す制御機能を有している。

2) 古典塑性論は、降伏応力以下の応力振幅の繰返し負荷に対しては、弾性変形の繰返しを表現するだけである。一方、下負荷面モデルは、降伏面の内部に下負荷面を導入し、また、その正規降伏面に対する相似中心が移動するので、ヒステリシス・ループ、塑性変形の集積を柔軟に表現し得る。

3) 土を対象とする大部分の構成式においては、力学的に不合理な面^{17),38),39)}を有する非関連流動則が用いられている。その背景に、関連流動則によれば体積膨張が過大に表現されると思い込まれていることがある。なお、これらにおいては、限界状態より密(denser than critical) (粘性土ならば過圧密)な側に対して、Drucker-Prager降伏面⁵¹⁾に代表されるように、拡張Mises型の錐面あるいはそれに近い降伏面が仮定されており、それに関連流動則を用いれば過大な塑性膨張がもたらされる。一方、下負荷面モデルにおいては、Fig. 21(a)に示すように、相似中心を原点に固定する初期モデルによっても塑性膨張は抑さえられる。さらに、相似中心の移動により、Fig. 21(b)に示すように、正規降伏面からみれば限界状態より密な側でも、下負荷面上の応力点における外向き法線は平均応力軸の負方向の成分 (関連流動則で塑性的圧縮)をも持ち得る。なお、一般にこの側では、応力は正規降伏面に達し得ない (下負荷面は正規降伏面に達し得ない) まま、途中で折り返して (軟化して) 限界状態に至る^{6),7)}。つまり、下負荷面モデルは、関連流動則によっても体積膨張を過大に表現することはない。ゆえに、力学的に不合理で、加えて構成式を複雑にする非関連流動則は用いる必要はないといえよう。

4) 初期・誘導異方性を表現するため、降伏面の回転つまり回転硬化の概念を導入し、その発展則が与えられている。なお、本場合に対して、塑性スピンの概念に基づく新たな共回転速度を提案した。これは、従来、移動硬化に対してのみ用いられてきた塑性スピンの概念に新たな適用の道を拓くものと期待されよう。

7. 結 言

応力状態にわたって繰返しを含む種々の負荷状態

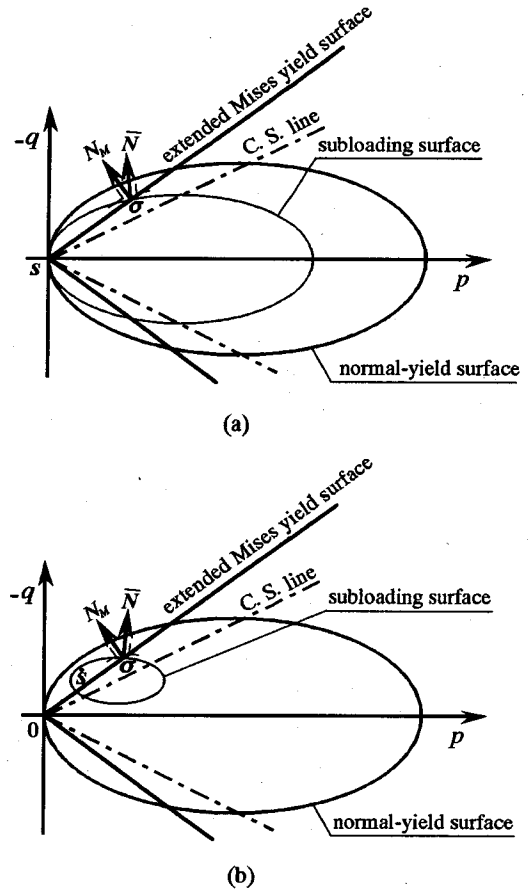


Fig. 21 The outward-normal N_M and \bar{N} of the extended von Mises yield surface and (a) the initial or (b) (extended) subloading surface.

における実測データのシミュレーションを行ったが、広範囲の負荷に対して、その適用性が実証されたといえよう。なお、粘土に対しては、回転硬化を考慮した従前の下負荷面モデルでもその適用性が実証されているが²¹⁾、本文の構成式の等方硬軟化則(71)において $\mu = 0$ とおくことにより、初期・誘導異方性が考慮され、さらにより予測が可能であろう。今後、本構成式に含まれる材料関数、定数の物理的意味、その選択等について考察を重ねて、さらに改善を進めることが望まれよう。

謝辞：実測値との比較にさいして、計算プログラムの作成、材料定数の選択などについて、九州大学大学院農学研究科修士課程・吉丸哲司氏 (現在、基礎地盤コンサルタンツ (株) 技術本部) の多大な協力を得た。ここに、記して厚く謝意を表する。

付 録

1. R の表現式

式(28)と(64)₁により下負荷面式(18)を具体化し、式(29)を代入して、次式を得る。

$$\bar{\alpha}_m^2(\bar{m}^2 + \beta_{ij}\beta_{ij}) + 2\bar{\alpha}_{ij}^*\beta_{ij}\bar{\alpha}_m + \bar{\alpha}_{ij}^*\bar{\alpha}_{ij}^* = -\bar{\alpha}_m\bar{m}^2RF \quad (A1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_m &\equiv \tilde{\alpha}_m + R s_m, \\ \bar{\alpha}_{ij}^* &\equiv \tilde{\alpha}_{ij}^* + R s_{ij}^*. \end{aligned} \right\} \quad (A2)$$

式(A1), (A2)から R は次式で与えられる。

$$R = (-B \pm \sqrt{B^2 - AC})/A \quad (A3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A &\equiv s_m^2\bar{m}^2 + s_m^2\beta_{ij}\beta_{ij} + 2s_m s_{ij}^*\beta_{ij} + s_{ij}^*s_{ij}^* + s_m\bar{m}^2F, \\ B &\equiv s_m\tilde{\alpha}_m\bar{m}^2 + s_m\tilde{\alpha}_m\beta_{ij}\beta_{ij} + \tilde{\alpha}_m s_{ij}^*\beta_{ij} + s_m\tilde{\alpha}_{ij}^*\beta_{ij} + s_{ij}^*\tilde{\alpha}_{ij}^* + \frac{1}{2}\bar{m}^2F\tilde{\alpha}_m, \\ C &\equiv \tilde{\alpha}_m^2\bar{m}^2 + \tilde{\alpha}_m^2\beta_{ij}\beta_{ij} + 2\tilde{\alpha}_m\tilde{\alpha}_{ij}^*\beta_{ij} + \tilde{\alpha}_{ij}^*\tilde{\alpha}_{ij}^*. \end{aligned} \right\} \quad (A4)$$

2. 諸物質関数の偏微分

本モデルに導入された材料関数の偏微分結果の主なものを以下に示す。

$$\frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha_{ij}} g(\bar{\chi}) + \bar{p} \frac{\partial g(\bar{\chi})}{\partial \bar{\chi}} \left(\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta_{rs}} + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{m}} \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sin 3\bar{\theta}_\sigma} \frac{\partial \sin 3\bar{\theta}_\sigma}{\partial \eta_{rs}} \right) \frac{\partial \bar{\eta}_{rs}}{\partial \alpha_{ij}} \quad (A5)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{1}{3} \delta_{ij},$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{m}}, \quad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{m}} = -\frac{\bar{r}}{\bar{m}^2},$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta_{rs}} = \bar{r}_{rs}, \quad \frac{\partial \sin 3\bar{\theta}_\sigma}{\partial \eta_{rs}} = -\frac{3}{\bar{r}} (\sqrt{6} \bar{r}_{rp} \bar{r}_{ps} + \sin 3\bar{\theta}_\sigma \bar{r}_{rs}),$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}_{rs}}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{1}{3\bar{p}} (3\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{ij}\delta_{rs} + \bar{Q}_{rs}\delta_{ij}),$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{1}{3\bar{p}} (3\bar{r}_{ij} + \bar{r}_{rs}\bar{Q}_{rs}\delta_{ij}),$$

$$\frac{\partial \sin 3\bar{\theta}_\sigma}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{1}{\bar{p}\bar{r}} \{ (\sin 3\bar{\theta}_\sigma \bar{r}_{rs} \bar{Q}_{rs} - \sqrt{6} \bar{r}_{rs} \bar{r}_{rs} + \sqrt{6} \bar{r}_{rs} \bar{r}_{st} \bar{Q}_{tr}) \delta_{ij} + 3\sin 3\bar{\theta}_\sigma \bar{r}_{ij} + 3\sqrt{6} \bar{r}_{ir} \bar{r}_{rj} \}$$

により次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{3} g(\bar{\chi}) I + \frac{1}{\bar{m}^2} \frac{\partial g(\bar{\chi})}{\partial \bar{\chi}} \left[\bar{m} \{ \bar{r} + \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{r}\bar{Q}) I \} \right. \\ &\quad \left. + \{ (\sin 3\bar{\theta}_\sigma \text{tr}(\bar{r}\bar{Q}) - \sqrt{6} \text{tr} \bar{r}^2 + \sqrt{6} \text{tr}(\bar{r}^2\bar{Q})) I + 3\sin 3\bar{\theta}_\sigma \bar{r} + 3\sqrt{6} \bar{r}^2 \} \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sin 3\bar{\theta}_\sigma} \right] \quad (A7) \end{aligned}$$

以上において、

$$\bar{r} \equiv |\bar{\eta}| \quad (A8)$$

また,

$$\frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \beta_{ij}} = \bar{p} \frac{\partial g(\bar{\chi})}{\partial \bar{\chi}} \left(\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta_{rs}} + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{m}} \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sin 3 \bar{\theta}_\sigma} \frac{\partial \sin 3 \bar{\theta}_\sigma}{\partial \eta_{rs}} \right) \frac{\partial \eta_{rs}}{\partial \beta_{ij}} \quad (\text{A9})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta_{rs}}{\partial \beta_{ij}} &= -\delta_{ir} \delta_{js}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta_{ij}} = -\bar{t}_{ij}, \\ \frac{\partial \sin 3 \bar{\theta}_\sigma}{\partial \beta_{ij}} &= \frac{3}{\bar{r}} (\sqrt{6} \bar{t}_i \bar{p} \bar{t}_{pj} + \sin 3 \bar{\theta}_\sigma \bar{t}_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A10})$$

により次式が成り立つ.

$$\frac{\partial f(\bar{p}, \bar{\chi})}{\partial \beta} = -\frac{\bar{p}}{m^2} \frac{\partial g(\bar{\chi})}{\partial \bar{\chi}} \left\{ \bar{m} \bar{t} + 3(\sin 3 \bar{\theta}_\sigma \bar{t} + \sqrt{6} \bar{t}^2) \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sin 3 \bar{\theta}_\sigma} \right\} \quad (\text{A11})$$

同様に, 次式が導かれる.

$$\frac{\partial f(p_s, \chi_s)}{\partial \beta} = -\frac{p_s}{m_s^2} \frac{\partial g(\chi_s)}{\partial \chi_s} \left\{ m_s t_s + 3(\sin 3 \theta_s t_s + \sqrt{6} t_s^2) \frac{\partial m_s}{\partial \sin 3 \theta_s} \right\} \quad (\text{A12})$$

ここに,

$$t_s \equiv \frac{\eta_s}{\|\eta_s\|} \quad (\text{A13})$$

式(64), (65)に対して次式が成り立つ.

$$\frac{\partial g(\bar{\chi})}{\partial \bar{\chi}} = 2 \bar{\chi}, \quad \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sin 3 \bar{\theta}_\sigma} = \frac{0.6 \sin 3 \bar{\theta}_\sigma + \sin \phi}{2\sqrt{6} \sin \phi} \bar{m}^2 \quad (\text{A14})$$

$$\frac{\partial g(\chi_s)}{\partial \chi_s} = 2 \chi_s, \quad \frac{\partial m_s}{\partial \sin 3 \theta_s} = \frac{0.6 \sin 3 \theta_s + \sin \phi}{2\sqrt{6} \sin \phi} m_s^2 \quad (\text{A15})$$

参考文献

- 1) Mroz, Z.: On the description of anisotropic hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.163-175, 1967.
- 2) Iwan, W.D.: On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems, *J. Appl. Mech.* (ASME), Vol.34, pp.612-617, 1967.
- 3) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P.: A model of nonlinearly hardening materials for Complex loading, *Acta Mech.*, Vol.23, pp.173-192, 1975.
- 4) Krieg, R.D.: A practical two surface plasticity theory, *J. Appl. Mech.* (ASME), Vol.42, pp.641-646, 1975.
- 5) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P.: Cyclic loading for materials with a vanishing elastic domain, *Nucl. Eng. Design*, Vol.41, pp.293-302, 1977.
- 6) Hashiguchi, K. and Ueno, M.: Elastoplastic constitutive laws of granular materials, *Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session 9)*, edited by S. Murayama and A.N. Schofield, Tokyo, JSSMFE, Tokyo, pp.73-82, 1977.
- 7) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *J. Appl. Mech.* (ASME), Vol.47, pp.266-272, 1980.
- 8) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C.: An anisotropic, critical state model for soils subjected to cyclic loading, *Geotechnique*, Vol.31, pp.451-469, 1981.
- 9) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.25, pp.917-945, 1989.
- 10) Armstrong, P.J. and Frederick, C.O.: A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, *C.E.G.B. Report RD/B/N731*, Central Electricity Generating Board, 1966.
- 11) Chaboche, J.L.: Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behavior of metals, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech.*, Vol.25, 1977.
- 12) Marquis, D.: Modelisation et identification de l'ecrouissage anisotrope des metaux, *These Paris VI*, 1979.
- 13) Chaboche, J.L. and Rousselier, G.: On the plastic and viscoplastic constitutive equations, *J. Pressure Vessel Tech.* (ASME), Vol.105, pp.153-164, 1983.
- 14) Ohno, T. and Wang, J.-D.: Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions, *Int. J. Plasticity*, Vol.7, pp.879-892, 1993.
- 15) Dafalias, Y.F. and Herrmann, L.R.: A bounding surface soil plasticity model, *Proc. Int. Symp. Soils under Cyclic Trans. Load.*, edited by G.N. Pande and O.C. Zienkiewicz, Swansea, A.A. Balkema Publ., Rotterdam,

- pp.335-345, 1980.
- 16) Hashiguchi, K.: Macroscopic approaches -static-intrinsically time-independent, *Constitutive Laws of Soils (Proc. 11th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session 9)*, edited by S. Murayama, Tokyo, JSSMFE, Tokyo, pp.25-65, 1985.
 - 17) Hashiguchi, K.: Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity, *Int. J. Plasticity*, Vol.9, pp.525-549, 1993.
 - 18) Hashiguchi, K.: Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models, *Int. J. Plasticity*, Vol.9, pp.721-748, 1993.
 - 19) Hashiguchi, K. and Yoshimaru, T.: A generalized formulation of the concept of nonhardening region, *Int. J. Plasticity*, pp.347-365, 1995.
 - 20) Hashiguchi, K., Ueno, M. and Imamura, T.: Prediction of deformation behavior of sands by the subloading surface model, *Proc. Int. Workshop on Constitutive Equations for Granular Noncohesive Soils*, edited by A.S. Saada and G. Bianchini, Cleveland, A.A. Balkema Publ., Rotterdam, pp.293-306, 1989.
 - 21) Topolnicki, M.: An elasto-plastic subloading surface model for clay with isotropic and kinematic mixed hardening parameters, *Soils and Foundations*, Vol.30, pp.103-113, 1990.
 - 22) Zienkiewicz, O.C. and Mroz, Z.: Generalized plasticity formulation and application to geomechanics, *Mech. Eng. Materials*, edited by C.S. Desai and R.H. Gallagher, John Wiley & Sons, pp.655-679, 1984.
 - 23) Zienkiewicz, O.C., Leung, K.H. and Pastor, M.: Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. I. Basic model and its application, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol.9, pp.453-476, 1985.
 - 24) Pastor, M., Zienkiewicz, O.C. and Leung, K.H.: Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. II. Non-associative models for sands, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol.9, pp.477-498, 1985.
 - 25) Hirai, H.: An elastoplastic constitutive model for cyclic behaviour of sands, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol.11, pp.503-520, 1987.
 - 26) Ghaboussi, J. and Momen, H.: Modelling and analysis of cyclic behaviour of sand, *Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads*, edited by G.N. Pande and Zienkiewicz, O.C., John Wiley & Sons, New York, pp.313-342, 1982.
 - 27) Banerjee, P.K. and Yousif, N.B.: A plasticity for the mechanical behaviour of anisotropically consolidated clay, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol.10, pp.521-541, 1986.
 - 28) Pietruszczak, S. and Stolle, D.E.F.: Modelling of sand behaviour under earthquake excitation, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol.11, pp.221-240, 1987.
 - 29) Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session 9)*, edited by S. Murayama and A.N. Schofield, Tokyo, JSSMFE, Tokyo, pp.229-238, 1977.
 - 30) Hashiguchi, K.: An expression of anisotropy in a plastic constitutive equation of soils, *idem*, pp.302-305, 1977.
 - 31) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of granular media with an anisotropic hardening, *Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Meth. Geomech.*, edited by W. Wittke, Aachen, A.A. Balkema Publ., Rotterdam, pp.435-439, 1979.
 - 32) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.6, pp.236-249, 1958.
 - 33) Hill, R.: On the classical constitutive relations for elastic/plastic solids, *Recent Progress in Appl. Mech. (The Folke Odqvist Volume)*, John Wiley & Sons, pp.241-249, 1967.
 - 34) Hashiguchi, K.: On the loading criterion, *Int. J. Plasticity*, Vol.10, pp.871-878, 1994.
 - 35) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.10, pp.343-354, 1968.
 - 36) Krieg, R.D. and Krieg, D.B.: Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic models, *J. Pressure Vessel Tech. (ASME)*, Vol.99, pp.510-515, 1977.
 - 37) Pillinger, I., Hartley, P., Sturgess, C.E.N. and Rowe, G.W.: Use of a mean-normal large-strain elastic-plastic finite-element solutions, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.28, pp.23-29, 1986.
 - 38) Runesson, K. and Mroz, Z.: A note on nonassociated flow rules, *Int. J. Plasticity*, Vol.5, pp.639-658, 1989.
 - 39) Hashiguchi, K.: Inexpedience of the non-associated flow rule, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 15, pp.752-756, 1991.
 - 40) 橋口公一：粒状体に関する等方硬化理論，土木学会論文集，227集，pp.45-60, 1974.
 - 41) Hashiguchi, K.: On the linear relations of $V\text{-ln}p$ and $\ln v\text{-ln}p$ for isotropic consolidation of soils, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.19, pp.367-376, 1995.
 - 42) 龍岡文夫：三軸せん断装置による砂の変形特性に関する基礎的研究，学位論文（工学），東京大学，1972.
 - 43) Ishihara, K., Tatsuoka, F. and Yasuda, S.: Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stresses, *Soils and Foundations*, Vol.15, pp.29-44, 1975.
 - 44) Kratochvil, J.: Finite strain theory of crystalline elastic-inelastic materials, *J. Appl. Phys.*, Vol.42, pp.1104-1108, 1971.
 - 45) Mandel, J.: Plasticite classique et viscoplasticite. *Course and Lectures, No.97, Int. Centre for Mech. Sciences*, Udine, Springer, 1971.
 - 46) Dafalias, Y.F.: Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.50, pp.561-565, 1983.
 - 47) Loret, B.: On the effect of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials, *Mech. Materials*, Vol.2, pp.287-304, 1983.
 - 48) Dafalias, Y.F.: The plastic spin, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.52, pp.865-871, 1985.
 - 49) Saada, A.S. and Bianchini, G. (ed.): *Proc. Int. Workshop on Constitutive Equations for Granular Non-cohesive Soils*, Cleveland, Balkema Publ., Rotterdam, 1989.
 - 50) Castro, G.: Liquefaction of sands, *Ph.D. Thesis*, Harvard Soil Mech. Series, No.81, 1969.
 - 51) Drucker, D.C. and Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quart. Appl. Math.*, Vol.10, pp.157-175, 1952.

(1995.10.23受付)

ELASTOPLASTIC CONSTITUTIVE EQUATION OF SOILS BASED ON THE CONCEPTS OF SUBLOADING SURFACE AND ROTATIONAL HARDENING

Koichi HASHIGUCHI, Masami UENO and Zhong-Ping CHEN

Various cyclic plasticity models have been proposed in the past. Among them only the subloading surface model fulfills the continuity condition, the smoothness condition and the work rate stiffness relaxation, obeying the associated flow rule, and describes the Masing effect pertinently so that it would be applicable to the prediction of the cyclic loading behavior of materials. The constitutive equation of soils is formulated by introducing the subloading surface model and formulating the rotational hardening rule for the description of the induced anisotropy. Its applicability is verified by predicting monotonic and cyclic loading behavior of sands under drained and undrained conditions and comparing them with test data.