

投稿論文 (和文)
PAPERS

不連続性岩盤の変形挙動予測のための計測変位を用いた一逆解析法

清水則一¹・垣原 裕²・寺戸秀和³・中川浩二⁴

¹正会員 博(工) 山口大学助教授 工学部社会建設工学科 (〒755 宇部市常盤台2557)

²修(工) 山口大学大学院工学研究科(現 (株)オオバ広島支店)

³学生会員 山口大学大学院工学研究科社会建設工学専攻

⁴正会員 工博 山口大学教授 工学部社会建設工学科

本論文では岩盤を不連続体として直接捉え、岩盤のブロックとしての挙動を把握することを目的とした計測変位を用いた逆解析手法を提案する。この方法は、Shi らの Backward DDA (Discontinuous Deformation Analysis) を利用して、時々刻々計測される変位から現状のみならず、将来の岩盤ブロックの変形挙動をも推定しようとするものである。そのために本方法では、適応フィルタリングの手法を用いる。ここで提案する手法は不連続面の位置と方向(幾何学的境界条件)は解析条件として必要であるが、岩盤基質部および不連続面の力学定数ならびに外力(力学的境界条件)は必要とせず、また、岩盤ブロックの経時的変化を支配するパラメータをも同時に得られる特徴がある。本論文では、数値シミュレーションにより本逆解析法の妥当性を検討する。

Key Words : *discontinuous rock, displacement measurements, back analysis, DDA, adaptive filtering*

1. 序論

岩盤には節理や断層などの大小様々な不連続面が存在し、そのモデル化が大きな課題であり、これまでも多くの解析手法が提案されている¹⁾。それらの方法は、不連続面を直接解析において取り扱う不連続体解析と、疑似的に連続体として取り扱う等価連続体解析に分類される。いずれにしても解析に当たり、岩盤基質部と不連続面の力学定数および力学的・幾何学的境界条件を与える必要がある。それらの条件が適切に与えられる場合、信頼の高い解析結果を得ることができるが、そのような条件をあらかじめ原位置の岩盤に対して、すべてにわたり精度良く求めることは一般には困難である。そのため、現実の挙動と解析によって予測した挙動がしばしば一致しないことはよく知られている。

そのような背景から、岩盤構造物の施工において現場計測を行うことが一般的となっている。それは前述のように、岩盤の力学的挙動を十分な精度で施工前に予測することが難しいため、工事中にその挙動を監視して、構造物の安定性や施工の妥当性などを評価するためである。そのような現場計測結果の評価を目的として、数々の逆解析法が提案されている。それらは主に岩盤(地盤)構造物の巨視的な挙動を把握・評価することを目的としているため、岩盤を等価連続体として仮定しているものが多い。等価連続体による逆解析は、取扱いが比較的容易で現場における適用性も示されているが、不連続面で囲まれた岩盤ブロックの局所的な

挙動や安定性の評価には十分な適用性を示さないこともある。

そこで、本論文では岩盤を不連続体として直接捉え、岩盤のブロックとしての挙動を把握するための、計測変位を用いた逆解析手法を提案する。この方法では、Shi & Goodman の提案した Backward DDA (Discontinuous Deformation Analysis)^{2),3)}を用いている。オリジナルの Backward DDA は、ある時点で計測した変位を用いてその時点における岩盤ブロックの変位挙動を逆算して推定するものである。本方法では、時々刻々計測される変位から現状のみならず、将来の岩盤ブロックの変形挙動をも推定しようとするものである。そのために本論文では、適応フィルタリング⁴⁾を用いる。また、この方法は不連続面の位置と方向(幾何学的境界条件)は解析条件として必要であるが、岩盤基質部および不連続面の力学定数ならびに外力(力学的境界条件)は必要としないという、Backward DDA の長所を受け継ぐと共に、岩盤ブロックの経時的変化を支配するパラメータをも同時に得られる特徴がある。

2. 本研究の目的と仮定

現在、数多くの現場計測機器が開発され利用されているが、現場においては比較的容易に精度の高い計測が実現できることから変位計測が行われることが多い。また、岩盤の不連続面の調査も盛んに行われており、計測変位とあわせて岩盤に関する幾何学的な情報を多く

集めることが可能である。一方、岩盤の応力や作用する外力、また、不連続面を含む岩盤の力学定数などに関係する情報を得ることは、幾何学的な情報を得ることより困難な場合が多いようである。このような背景から、幾何学的な情報をより積極的に活用して、実測が困難な量を用いしないで、不連続性岩盤の変形挙動を推定しようとするのが本研究の目的である。

このような目的を達成するための第一ステップとして、本論文では、不連続面で囲まれた岩盤ブロックの初期の幾何学配置が与えられる前提のもと、不連続性岩盤の変形挙動を計測変位のみから経時的に推定し、さらに最終的な変形状態を予測する方法を提案する。

本論文における仮定を以下に示す。

- ① 岩盤は不連続面で囲まれたブロックの集合体と考える、
- ② 岩盤ブロック内は連続体であり、生じるひずみは微小とする、
- ③ 岩盤ブロックの剛体運動および岩盤ブロック内のひずみは、時間の経過とともに単調に増加するクリープ挙動を示すものとする。

上記の最初の2つの仮定は、Backward DDAと同じものである。3番目は岩盤の経時的な変形挙動を取り扱うための仮定で、本論文では経時的に収束するクリープ挙動に限定する(3.(2)参照)。したがって、加速的なクリープ挙動や時間的に増減を繰り返す変形挙動は本方法の適用外とする。

3. 提案手法の定式化とその解法

ここでは本論文で提案する手法の定式化とその解法について述べる。この方法は、岩盤の剛体運動と岩盤ブロック内のひずみの経時的な挙動を記述する状態方程式、および、岩盤の変形挙動を記述する観測方程式をフィルタリングの手法を用いて解いていくものである。まず、最初に観測方程式の基礎となるShiらのBackward DDA^{2),3)}の概要を述べる。次に、変形挙動の状態方程式および観測方程式を誘導し、最後にその解法を示す。

(1) Backward DDA の概要

不連続面に囲まれた岩盤ブロック内の任意の点 (x, y) の変位は、二次元問題の場合、微小ひずみ(前章の2番目の仮定)およびブロック内でひずみを一定と仮定すると、次のように表すことができる^{2),3)}。

$$\mathbf{u}^i(\mathbf{p}) = \mathbf{a}^i(\mathbf{p}) \mathbf{d}^i \quad (1)$$

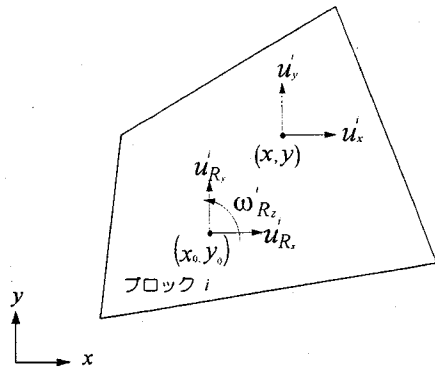


図-1 岩盤ブロックの変形パラメータ

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^i(\mathbf{p}) &= \begin{Bmatrix} u_x^i(x, y) \\ u_y^i(x, y) \end{Bmatrix} \\ \mathbf{d}^i &= \{u_{Rx}^i, u_{Ry}^i, \omega_{Rz}^i, \varepsilon_x^i, \varepsilon_y^i, \gamma_{xy}^i\}^T \\ \mathbf{a}^i(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(y-y_0) \\ 0 & 1 & x-x_0 \\ x-x_0 & 0 & y-y_0 \\ 0 & y-y_0 & x-x_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。ここで、 u_x^i, u_y^i はブロック i の任意点 (x, y) の x, y 方向の変位、 u_{Rx}^i, u_{Ry}^i はブロック i の x, y 方向の剛体平行移動である。 ω_{Rz}^i はブロック i の z 軸回りの剛体回転で、その中心点は (x_0, y_0) である。さらに、 $\varepsilon_x^i, \varepsilon_y^i, \gamma_{xy}^i$ はブロック i ($i=1, 2, \dots, N; N$: 岩盤ブロック総数) のひずみの成分である(図-1参照)。なお、 \mathbf{p} は点 (x, y) を表す。また、 \mathbf{d}^i をブロック i の変形パラメータと呼ぶことにする。

次に、ブロック内の任意の点 \mathbf{p} において変位を計測するものとし、式(1)で計算される変位と計測変位との残差の自乗和 R を最小とするような岩盤ブロックの変形パラメータを求める。すなわち、

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{d}^i} = 0 \quad (3)$$

となるような \mathbf{d}^i を求める。ただし、

$$R = (\overline{\mathbf{U}}^i - \mathbf{U}^i)^T (\overline{\mathbf{U}}^i - \mathbf{U}^i) \quad (4)$$

である。ここで、 \mathbf{U}^i は計測変位 $\overline{\mathbf{U}}^i$ に対応する計算変位で、式(1)から次のように与えられる。

$$\mathbf{U}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{d}^i \quad (5)$$

ただし、

$$\mathbf{U}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^i(\mathbf{p}_1) \\ \mathbf{u}^i(\mathbf{p}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^i(\mathbf{p}_{M_i}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^i(\mathbf{p}_1) \\ \mathbf{a}^i(\mathbf{p}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^i(\mathbf{p}_{M_i}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

である。ここで、 p_m は計測点($m = 1, 2, \dots, M_i$)、 M_i はブロック*i*における計測点数である。

式(3)から次式を得る。

$$((A^i)^T A^i) d^i = \bar{f}^i \quad (7)$$

ただし、

$$\bar{f}^i = (A^i)^T U^i \quad (8)$$

である。式(7)を全ブロック($i = 1, 2, \dots, N$)に対してひとまとめにすると次のようになる。

$$\bar{K} D = \bar{F} \quad (9)$$

式(9)がDDAの基礎式である。ただし、

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$D = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^N \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \\ \vdots \\ \bar{f}^N \end{pmatrix}$$

ここで、式(10)において、 $K_{ii} = (A^i)^T A^i$ および $K_{ij} = 0$ ($i \neq j$)であるが、たとえば、岩盤ブロック*i*および*j*間の相対変位を計測する場合は、該当する K_{ij} ($i \neq j$)には数値が入る。そのような場合に対する \bar{K} の構成の詳細はShi^{2),3)}を参照されたい。

計測位置と剛体回転の中心位置の座標を与えると A^i が、また、計測変位を得ると \bar{U}^i が既知となるので、式(8)から \bar{F} もまた既知となる。そこで、各ブロックの変形パラメータは式(9)から次のように求められる

$$D = (\bar{K})^{-1} \bar{F} \quad (11)$$

ここで、 $(\bar{K})^{-1}$ が存在するために、Shiは各ブロックにおいて少なくとも一直線上に並ばない3点における変位ベクトルが計測されることを条件としており²⁾、本論文でもそれにしたがうものとする。すなわち、式(5)において、 $M_i \geq 3$ ($i = 1, 2, \dots, N$)とし、変位は x, y 方向の2成分を計測するものと仮定する。

また、式(11)において得られた変形パラメータをもとに、式(1)を用いて岩盤ブロックの動きを再現すると、ブロック間の重なりが生じることがある(図-2(a))。そこで、ブロック間の重なりをチェックし、重なりが生じないように調整する必要がある。Shiらは、重なりが生じたブロックの発見方法を示し、そのブロックに対応して、マトリックス \bar{K} に次のマトリックスを加えてい

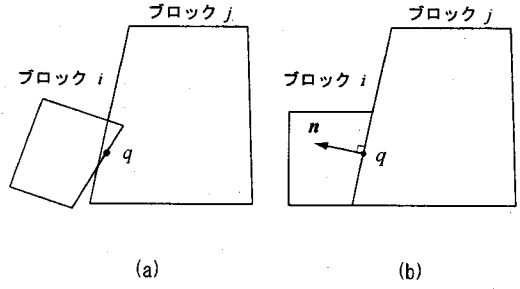


図-2 岩盤ブロックの重なりと共通線の内向法線ベクトル

る²⁾。

$$\left. \begin{aligned} K_{ii} &= (a^i(q))^T n n^T a^i(q) \cdot P \\ K_{ij} &= -(a^i(q))^T n n^T a^j(q) \cdot P \\ K_{ji} &= -(a^j(q))^T n n^T a^i(q) \cdot P \\ K_{jj} &= (a^j(q))^T n n^T a^j(q) \cdot P \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし、式(12)は、ブロック*i, j*の共通点 q でブロックの重なりが生じた場合に、式(10)のマトリックス \bar{K} に加算されるマトリックスである。なお、 P は重なりを生じさせないためのペナルティで、十分大きな正の値を与える。また、 $n^T = \{n_x(q), n_y(q)\}$ はブロック*i*の点 q の位置する辺に対する内側向きの単位法線ベクトルである(図-2(b)参照)。なお、 $a^i(q)$ および $a^j(q)$ は式(2)で定義されるマトリックスである。そして、ブロックの重なりがなくなるまで式(12)を導入して式(9)を繰り返し解くのがBackward DDAである。本論文においても、ブロックの重なりを判断するために文献2)の方法を用いる。

以上の計算過程では岩盤の力学的な性質や外力の条件についてはなんら触れておらず、計測変位と岩盤ブロックの幾何学的な条件のみで構成されている点に大きな特徴がある。

(2) 変形パラメータの状態方程式

2.に示した3番目の仮定より、岩盤ブロック*i*の剛体運動とひずみは経時的に収束するクリープ挙動を示すと考えると、変形パラメータ d_j^i は次の線形微分方程式を満足する⁵⁾。

$$c_{j0}^i d_j^i(t) + c_{j1}^i \dot{d}_j^i(t) + \dots + c_{jn}^i \overset{(n)}{d}_j^i(t) = g_j^i(t) \quad (13)$$

ただし、添字*i, j*に対しては総和規約は適用しない。また、 d_j^i は、式(2)に示した変形パラメータ d^i の成分で次のように定める。

$$\begin{aligned} d_1^i(t) &= u_{Rx}^i(t), \quad d_2^i(t) = u_{Ry}^i(t), \quad d_3^i(t) = \omega_{Rx}^i(t) \\ d_4^i(t) &= \varepsilon_x^i(t), \quad d_5^i(t) = \varepsilon_y^i(t), \quad d_6^i(t) = \gamma_{xy}^i(t) \end{aligned}$$

また、 c_{jk}^i は d_j^i の経時的挙動の特性をあらわす係数である。さらに、 $\dot{}$ は時間微分を表す。

$$\frac{d^{(n)}}{dt^n}(t) = \frac{d^n d(t)}{dt^n}$$

なお、 $g_j^i(t)$ は掘削や載荷などの影響による外部擾乱項である。

以下には、簡単のため $n=1$ のモデルについて式の展開を行うが、一般的な場合も同様な式の展開が可能である⁶⁾。

まず、式(13)において、時間間隔 Δt (一定)として

$$d_j^i(t) \simeq \frac{d_j^i(t+\Delta t) - d_j^i(t)}{\Delta t}$$

のように離散化し、若干の式の変形を行うと次式を得る。

$$x_{j,\tau+1}^i = \theta_j^i x_{j,\tau}^i \quad (14)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} x_{j,\tau}^i &= d_{j,\tau}^i - d_{j,\tau-1}^i \\ d_{j,\tau}^i &= d_j^i(t), \quad t = \tau \cdot \Delta t \\ \theta_j^i &= \frac{c_{j0}^i}{\Delta t c_{j0}^i + c_{j1}^i} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

である。ここで、 θ_j^i は c_{j0}^i と c_{j1}^i に代わって変形パラメータ d_j^i の挙動を特徴づけるパラメータとなり、ここではクリープパラメータと呼ぶ。 τ は計測のステップ数を表すもので、式(15)の第3式で定義される。なお、式(14)の誘導においては $g_j^i(t)$ を一定とした。これは、掘削や載荷などの外部からのインパクトが岩盤ブロックに与えられ、岩盤変形挙動が生じた後、新たにインパクトが作用しないことを意味する。具体的には、空洞や斜面が掘削された後、次の掘削が行われるまで岩盤の変位挙動、あるいは重力場における地滑り、上載荷重が作用した後の基礎岩盤の挙動を対象としている。

式(14)は、ある時刻 t における変形パラメータ d_j^i の増分 $x_{j,\tau}^i$ と、 $t+\Delta t$ における増分 $x_{j,\tau+1}^i$ の関係を表す式である。これは、 $x_{j,\tau}^i$ を変数とした方程式で状態方程式と呼ばれる。 $x_{j,\tau}^i$ ($j=1,2,\dots,6$)を x_τ^i のようにベクトル表示すると、式(14)は次のように書ける。

$$x_{\tau+1}^i = B^i(\theta_j^i) x_\tau^i \quad (16)$$

ただし、

$$B^i(\theta_j^i) = \left(\begin{array}{cccc} d_\tau^i - d_{\tau-1}^i & & & \\ \theta_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2^i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_6^i \end{array} \right) \quad (17)$$

である。

さらに、すべての岩盤ブロックに対する状態方程式(16)をとりまとめると次のように表せる。

$$X_{\tau+1} = B(\theta) X_\tau \quad (18)$$

ただし、

$$X_\tau = D_\tau - D_{\tau-1}$$

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} B^1(\theta_1^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B^2(\theta_2^2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B^N(\theta_6^N) \end{pmatrix} \quad (19)$$

である(D_τ は式(10)を参照)。また、 θ は、クリープパラメータ θ_j^i をベクトル表示したもので、 $\theta = \{\theta_1^1, \theta_2^1, \dots, \theta_6^1, \theta_1^2, \dots, \theta_6^2, \dots, \theta_1^N, \dots, \theta_6^N\}^T$ ($j=1,2,\dots,6; i=1,2,\dots,N$)である。

(3) 計測変位に対する観測方程式

ある時刻 t (τ ステップ目)における岩盤ブロックの挙動に対して、Backward DDAの基礎式(9)を適用する。

$$\bar{F}_\tau = \bar{K}_\tau D_\tau \quad (20)$$

上式と時刻 $t-\Delta t$ における式 $\bar{F}_{\tau-1} = \bar{K}_{\tau-1} D_{\tau-1}$ との差をとり、観測誤差を考慮すると次式を得る。

$$\bar{Y}_\tau = C_\tau X_\tau + V_\tau \quad (21)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_\tau &= \bar{F}_\tau - \bar{F}_{\tau-1} \\ C_\tau &= \bar{K}_{\tau-1} (\simeq \bar{K}_\tau) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

である。また、 V_τ は観測誤差である。

式(21)は時刻 t における変形パラメータの増分(状態変数) X_τ と、計測変位から式(8)および式(10)、ならびに式(22)を用いて得られる \bar{Y}_τ (観測ベクトル)との関係を表すものである。したがって式(21)は、岩盤ブロックの計測変位に対する観測方程式と解釈できる。

なお、式(20)において岩盤ブロックの重なりを調整した場合、厳密には $\bar{K}_{\tau-1} \neq \bar{K}_\tau$ である。しかし、ここでは、式(21)を誘導する際、式(22)の第2式に示したように、 $\bar{K}_{\tau-1} \simeq \bar{K}_\tau$ と仮定した。その仮定の妥当性については4章における数値シミュレーションによって検討する。

(4) システム方程式とその解法

ここで、岩盤ブロック内の計測点において一定の時間間隔 Δt ごとに計測される変位から、各岩盤ブロックの変形パラメータとクリープパラメータを逆解析によって推定することを考える。それには、状態方程式(18)と観測方程式(21)を次のように連立させて解けばよい。

$$\left\{ \begin{aligned} X_{\tau+1} &= B(\theta) X_\tau \\ \bar{Y}_\tau &= C_\tau X_\tau + V_\tau \end{aligned} \right. \quad (23)$$

実際、式(23)は、時刻 t における観測量 \bar{Y}_τ (計測変位と式(8)および式(22)の第1式から得られる)から、変形パラメータの増分 X_τ およびクリープパラメータ θ を

推定する連立方程式となっている。これは、式の形から \mathbf{X}_τ だけでなく、係数マトリックス $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ に含まれる $\boldsymbol{\theta}$ を同時に推定する問題となっており、適応フィルタリング⁴⁾と呼ばれる式の形となっている。これを解くにあたって拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを適用すれば⁴⁾、以下のようにして \mathbf{X}_τ および $\boldsymbol{\theta}$ を求めることができる。

まず、新たなパラメータを $\mathbf{Z}_\tau = \{\mathbf{X}_\tau^T \boldsymbol{\theta}_\tau^T\}^T$ と定義する。そして、 $\boldsymbol{\theta}_\tau$ の時間的変化はないものとして条件 $\boldsymbol{\theta}_{\tau+1} = \boldsymbol{\theta}_\tau$ を考慮し、式(23)を書き換えると次のようになる。

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{\tau+1} = \mathbf{B}'_\tau(\boldsymbol{\theta}_\tau) \mathbf{Z}_\tau \\ \bar{\mathbf{Y}}_\tau = \mathbf{C}'_\tau \mathbf{Z}_\tau + \mathbf{V}_\tau \end{cases} \quad (24)$$

ただし、

$$\mathbf{B}'_\tau(\boldsymbol{\theta}_\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_\tau) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}'_\tau = (\mathbf{C}_\tau \ \mathbf{0}) \quad (25)$$

である。 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_\tau)$ および \mathbf{C}_τ は式(19)および式(22)のそれぞれ第2式に示されるマトリックスである。

式(24)に対して拡張カルマンフィルタ⁴⁾を適用すると、パラメータ \mathbf{Z}_τ の推定値 $\hat{\mathbf{Z}}_{\tau/\tau}$ は次の式で求められる。

$$\hat{\mathbf{Z}}_{\tau/\tau} = \hat{\mathbf{Z}}_{\tau/\tau-1} + \mathbf{K}_\tau [\bar{\mathbf{Y}}_\tau - \mathbf{C}'_\tau \hat{\mathbf{Z}}_{\tau/\tau-1}] \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{1/0} = \bar{\mathbf{Z}}_0 \quad (\text{初期条件})$$

ここで、 \mathbf{K}_τ は次に示すカルマンゲインと呼ばれるマトリックスである。

$$\mathbf{K}_\tau = \mathbf{P}_{\tau/\tau-1} \mathbf{H}_\tau^T (\mathbf{H}_\tau \mathbf{P}_{\tau/\tau-1} \mathbf{H}_\tau^T + \mathbf{R}_\tau)^{-1} \quad (27)$$

ただし、

$$\mathbf{H}_\tau = (\mathbf{C}_\tau \ \mathbf{0}) \quad (28)$$

および、

$$\mathbf{R}_\tau = \mathbf{V}_\tau^T \mathbf{V}_\tau \quad (\text{観測誤差}) \quad (29)$$

である。また、 $\mathbf{P}_{\tau/\tau-1}$ は $\hat{\mathbf{Z}}_{\tau/\tau-1}$ の推定誤差共分散行列で、次式によって求められる。

$$\mathbf{P}_{\tau+1/\tau} = \mathbf{E}_\tau \mathbf{P}_{\tau/\tau} \mathbf{E}_\tau^T \quad (30)$$

ただし、

$$\mathbf{P}_{\tau/\tau} = \mathbf{P}_{\tau/\tau-1} - \mathbf{K}_\tau \mathbf{H}_\tau \mathbf{P}_{\tau/\tau-1} \quad (31)$$

$$\mathbf{P}_{1/0} = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_0 \quad (\text{初期条件})$$

である。また、式(30)における \mathbf{E}_τ は、本論文の場合、次に示すマトリックスとなる。

$$\mathbf{E}_\tau = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tau/\tau}) & \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right) \quad (32)$$

さらに、マトリックス \mathbf{E}_τ に含まれる $\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i)$ は次のとおりである。

$$\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^1(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}^2(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i) & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{L}^N(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i) \end{pmatrix} \quad (33)$$

ここで、上式において $\mathbf{L}^i(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i)$ は $\boldsymbol{\theta}_\tau$ の独立性によって違った形をとる。たとえば、もっとも一般的な場合として、すべての θ_j^i が独立とすると $\mathbf{L}^i(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i)$ は次のようになる。

$$\mathbf{L}^i(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i) = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,\tau/\tau}^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{x}_{2,\tau/\tau}^i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{x}_{6,\tau/\tau}^i \end{pmatrix} \quad (34)$$

また、別の例では、岩盤ブロック*i*において剛体平行移動 u_{Rx}^i , u_{Ry}^i に対する θ_j^i は等しく($\theta_1^i = \theta_2^i$)、剛体回転 ω_{Rz}^i に対しては独立で(θ_3^i)、かつ、ひずみ ε_x^i , ε_y^i , γ_{xy}^i に対してはすべて等しい($\theta_4^i = \theta_5^i = \theta_6^i$)場合、 $\mathbf{L}^i(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i)$ は次のようになる。

$$\mathbf{L}^i(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau/\tau}^i) = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,\tau/\tau}^i & 0 & 0 \\ \hat{x}_{2,\tau/\tau}^i & 0 & 0 \\ 0 & \hat{x}_{3,\tau/\tau}^i & 0 \\ 0 & 0 & \hat{x}_{4,\tau/\tau}^i \\ 0 & 0 & \hat{x}_{5,\tau/\tau}^i \\ 0 & 0 & \hat{x}_{6,\tau/\tau}^i \end{pmatrix} \quad (35)$$

式(26)~式(31)によって、推定値 $\hat{\mathbf{Z}}_{\tau/\tau}$ が求められると、 $\mathbf{Z}_\tau = \{\mathbf{X}_\tau^T \boldsymbol{\theta}_\tau^T\}^T$ から $\hat{\mathbf{X}}_{\tau/\tau}$ が得られ、さらに次式によって、時刻*t*における変形パラメータ $\hat{\mathbf{d}}_{\tau/\tau}^i$ が計算される。

$$\hat{\mathbf{d}}_{\tau/\tau}^i = \mathbf{d}_0^i + \sum_{k=1}^{\tau} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k/\tau}^i \quad (36)$$

次に、式(36)の推定値 $\hat{\mathbf{d}}_{\tau/\tau}^i$ と式(1)から、各岩盤ブロックの変位が求められ、ブロック相互間に重なりが生じていないかチェックする。重なりが生じている場合、実際には岩盤が重なることはないので、式(12)を用いて、マトリックス \mathbf{C}_τ ($= \bar{\mathbf{K}}_{\tau-1}$)を修正する。修正した \mathbf{C}_τ を用いて再度、式(26)および式(36)から変形パラメータを推定し、さらに式(1)からブロックの変位を求め、ブロックの重なりがなくなるまで上記の手順を繰り返す。最終的な \mathbf{C}_τ を $\bar{\mathbf{K}}_\tau$ とおき、次の時間ステップへ進む。

さらに、時刻*t*において推定された $\hat{\mathbf{X}}_{\tau/\tau}$ および $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\tau/\tau}$ を用いて、以下の式によれば岩盤ブロックの変位の最終値 $u_\infty^i(\mathbf{p})$ を予測できる。

$$u_\infty^i(\mathbf{p}) = \mathbf{a}^i(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{d}}_\infty^i \quad (37)$$

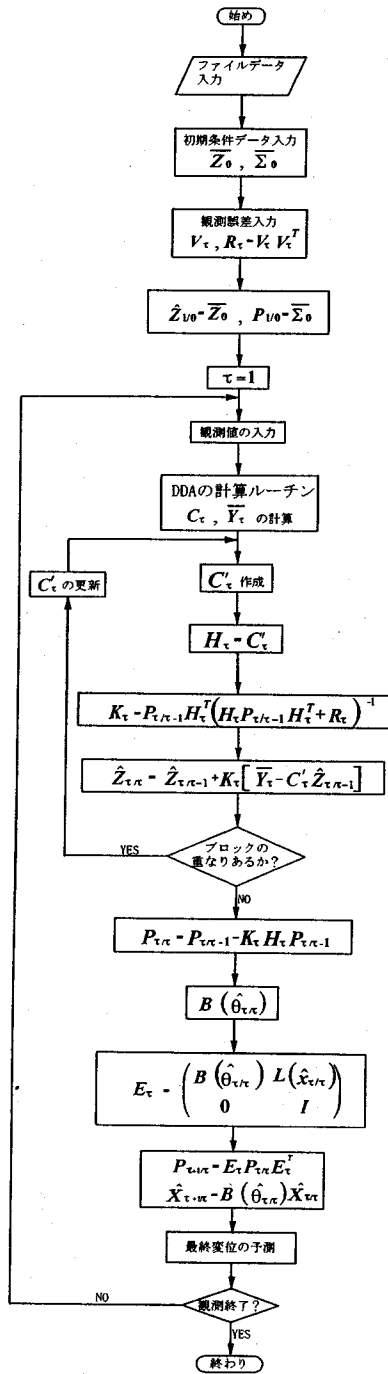


図-3 提案手法のフローチャート

ただし、

$$\hat{d}_\infty^i = d_0^i + \sum_{k=1}^{\tau} \hat{x}_{k/k}^i + M(\hat{\theta}_{j,\tau/\tau}^i) \hat{x}_{\tau/\tau}^i \quad (38)$$

である。また、 $M(\hat{\theta}_{j,\tau/\tau}^i)$ は、

$$M(\hat{\theta}_{j,\tau/\tau}^i) = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\theta}_{1,\tau/\tau}^i}{1-\hat{\theta}_{1,\tau/\tau}^i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\theta}_{2,\tau/\tau}^i}{1-\hat{\theta}_{2,\tau/\tau}^i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\hat{\theta}_{6,\tau/\tau}^i}{1-\hat{\theta}_{6,\tau/\tau}^i} \end{pmatrix} \quad (39)$$

となる。

以上のようにして、時刻 t において得られた計測変位から、岩盤ブロックの変形パラメータとクリープパラメータを推定し(式(26)～(36))、さらにそれらを用いてその時刻における岩盤ブロックの変形状態の推定(式(1))、および最終変形状態の予測(式(37)～(39))を行うことができる。これを計測変位が得られるごとに繰り返し適用し、現状の推定とともにパラメータと最終予測値を更新して行くのが、提案する手法である。

以上の手順をフローチャートにして、図-3に示す。

4. 数値シミュレーション

前章で提案した逆解析手法によって、変形パラメータおよびクリープパラメータが正しく推定され、さらに最終変形状態も予測できるかを検討するために数値シミュレーションを行う。

(1) ケース1

まず最初に、図-4に示す2つの長方形ブロックについて、ブロック1は不動で、他方のブロック2がクリープ的な変位を生じるケースを解析する。ここでは、式(35)に示したように、ブロックの2つの剛体平行移動の成分、剛体回転、3つのひずみ成分のクリープパラメータがそれぞれ独立であると仮定する($\theta_1^i = \theta_2^i$, θ_3^i , $\theta_4^i = \theta_5^i = \theta_6^i$)。また、数値シミュレーションに用いる“計測変位”は以下の手順で求める。

1. “真”の変形パラメータの収束値 $d_j^i(\infty)$ とクリープパラメータ θ_j^i を設定する。式(13)において $n=1$ の場合、変形パラメータの厳密解は次のように表される。

$$d_j^i(t) = d_j^i(\infty)(1 - e^{-t/T_j^i}) \quad (40)$$

ただし、 T_j^i は遅延時間で、 $T_j^i = \theta_j^i \Delta t / (1 - \theta_j^i)$ である。

2. 式(40)を式(1)に代入するとブロック内の点 p の“真”の変位 $u_0^i(p, t)$ が与えられる。
3. 計測変位は、“真”の変位 $u_0^i(p, t)$ を平均値とし、計測誤差 σ_u を標準偏差とする正規分布に従うものとして、正規乱数を発生させて求める。

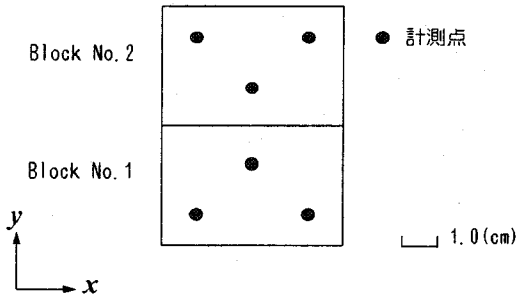


図-4 ケース1

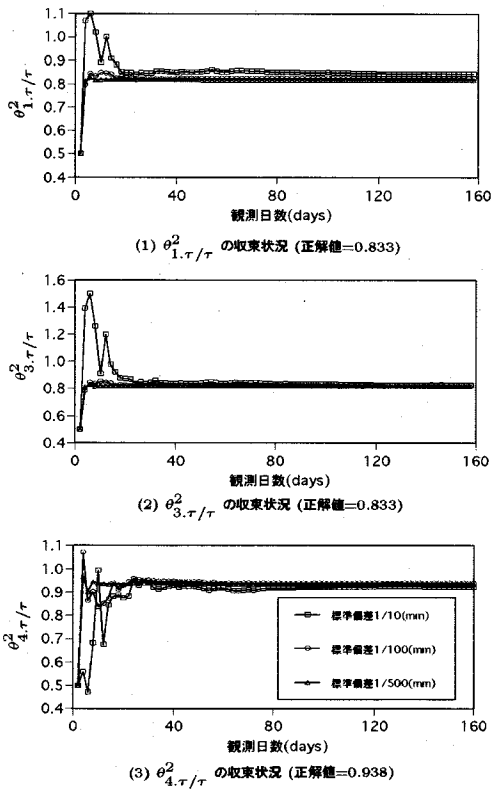


図-5 クリープパラメータの同定(ケース1)

このようにして得た“計測変位”から“真”と設定したブロックの変形パラメータとクリープパラメータを、本手法によって精度よく求められるか(逆算されるか)を調べるのがここでの目的である。

以下に、真の変形パラメータの収束値を $u_{Rx}^2(\infty) = 1.0$ cm, $u_{Ry}^2(\infty) = 0.5$ cm, $\omega_{Rz}^2(\infty) = 0.1$ rad, $\varepsilon_x^2(\infty) = \varepsilon_y^2(\infty) = \gamma_{xy}^2(\infty) = 0.1$, 真のクリープパラメータを $\theta_1^2 = \theta_2^2 = \theta_3^2 = 0.833$, $\theta_4^2 = \theta_5^2 = \theta_6^2 = 0.938$ とし、計測誤差が $\sigma_u = 1/10, 1/100, 1/500$ mm の各ケー

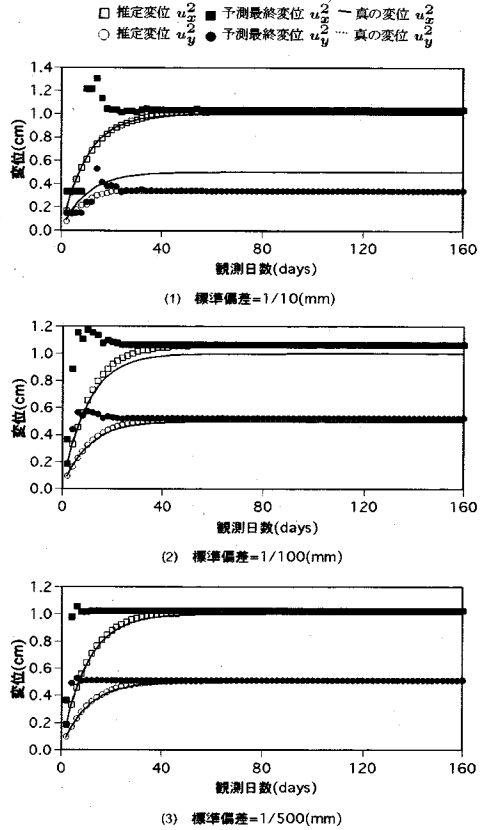
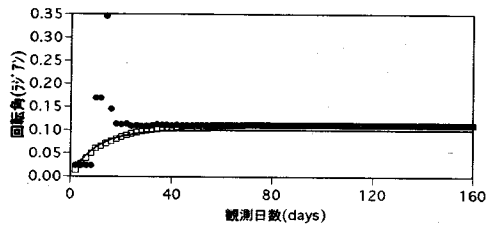


図-6 剛体平行移動の推定とその収束値の予測状況(ケース1; $\theta_j^2_{1/0} = 0.5$)

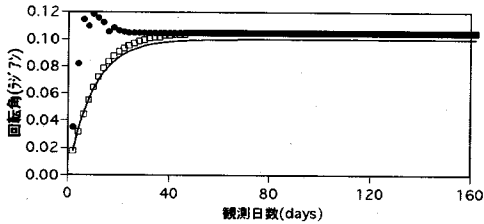
スについて行ったシミュレーション結果を示す。

本方法を適用する際に必要な条件として、ここでは、観測間隔を $\Delta t = 2$ 日、初期値を $P_{1/0} = \bar{\Sigma}_0 = 1.0I$, $R_\tau = \sigma^2 I$ とした。また、変形パラメータの初期値については、第一回の観測で得た変位の計測値を通常のDDAによって解析し、その結果得た変形パラメータを初期値とした。なお、逆解析においては、先にも述べたように、各ブロックの6個の変形パラメータおよび3個のクリープパラメータを独立した未知パラメータとしている(式(35)を用いる)。したがって、ブロック数が2個の本ケースでは、全体として求めるべき未知パラメータは18個となる。

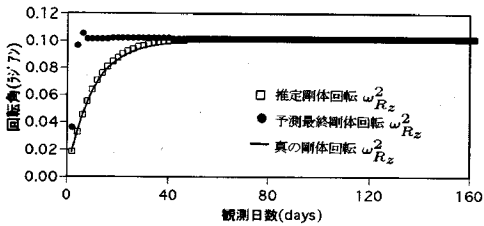
図-5はクリープパラメータの初期値 $\theta_{j,1/0}^2$ を0.5とした場合に対して、ブロック2のクリープパラメータの収束状況を示すものである。図に示される値は、計測値を得るごとに式(26)から求められる。計測精度が $\sigma_u = 1/100, 1/500$ mm の場合、観測後10~20日頃(5~10回目の観測)にはほぼ収束し、真の値に対して数%の誤差で求められている。一方、 $\sigma_u = 1/10$ mm の場合、観測開始直後から大きな変動を示し、収束値の精度も劣っ



(1) 標準偏差=1/10(mm)

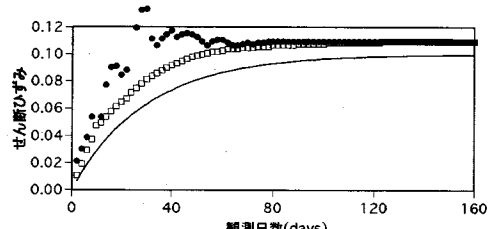


(2) 標準偏差=1/100(mm)

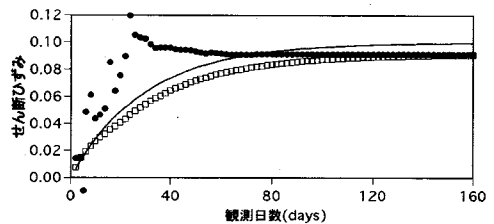


(3) 標準偏差=1/500(mm)

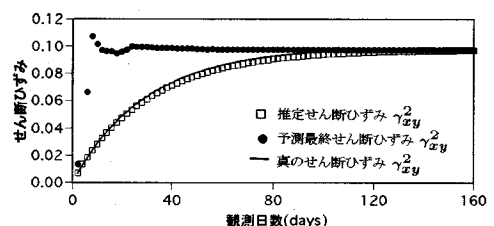
図-7 剛体回転の推定とその収束値の予測状況(ケース1; $\theta_{j,1/0}^i = 0.5$)



(1) 標準偏差=1/10(mm)



(2) 標準偏差=1/100(mm)



(3) 標準偏差=1/500(mm)

図-8 せん断ひずみ γ_{xy} の推定とその収束値の予測状況(ケース1; $\theta_{j,1/0}^i = 0.5$)

ている。

図-6～図-8は、各計測誤差に対するブロック2の変形パラメータの推定値とその収束値の予測状況を示すものである。図-6には、計測値を得る毎に、式(26)および式(36)から推定される剛体平行移動と、式(38)によって求められるその予測収束値を示している。図-7および図-8は、それぞれ剛体回転および、せん断ひずみの推定状況である。計測精度が $\sigma_u = 1/10$ mmの場合(図-6～図-8の各(1))は、いずれの変形パラメータも、推定値および予測収束値とも真の値に対して20～30%の誤差があり、よい精度で求められていない。しかし、計測精度が高くなるとともに推定値と予測収束値とも“真”の値に対して精度よく求められることがわかる(図-6～図-8の(2),(3))。特に、 $\sigma_u = 1/500$ mmの場合(図-6～図-8の(3))、各変形パラメータの収束予測値は観測開始10～20日頃(5～10回目の観測)までにはほぼ正しい値が得られている。このような結果は、他のひずみの成分に対しても同様である。もちろん誤差のない計測値を与えると、クリープパラメータおよび変形パラメータとも観測開始直後から、“真”の値を得ることができる。

図-9は $\sigma_u = 1/100$ mmの場合について、各計測時刻において推定した変形パラメータとその予測収束値を用いて、式(1)および(37)からブロックの変形状態を求めたものである。図において左の欄はブロックの初期形状に観測日までに生じた変位を棒線で示したもので、中央の欄は観測日において推定した変形状態、右の欄はその観測日に予測したブロックの最終変形状態(実線)と“真”の最終変形状態(点線)を比較したものである。この図から、観測初期では最終変形状態が十分に予測されていないが、40日においては最終状態がほぼ正しく予測されているのがわかる(実線が点線とほぼ一致している)。

以上のことから、本ケースにおいては計測精度を適切に取れば、計測変位から変形パラメータとクリープパラメータがよい精度で推定され、さらにブロックの最終変形状態も観測後、比較的早い段階で予測できることが示された。

なお、本手法においても他の逆解析手法と同様に、計測精度が解の精度に影響を及ぼすことが分かった。その影響の程度は、解析するブロックと変形パラメータの大きさ、計測する変位増分の大きさ、計測位置などに関係すると思われるが、それらを詳細に検討するこ

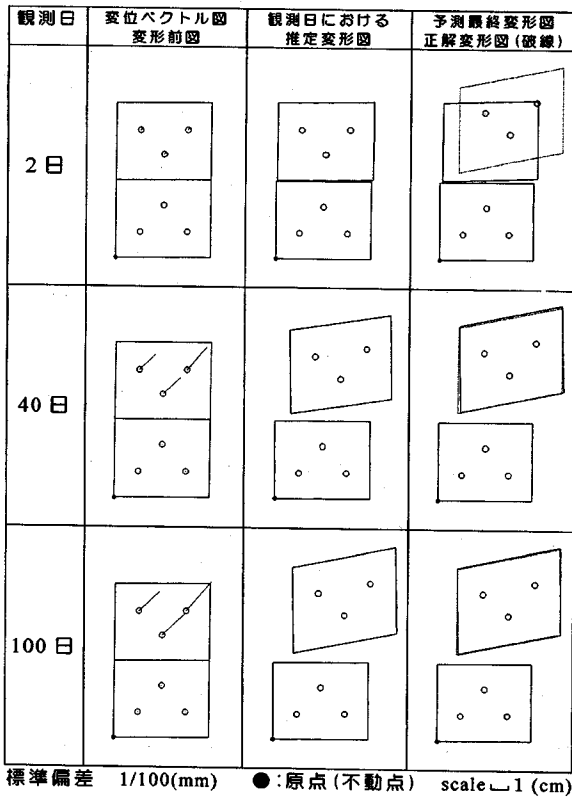


図-9 ブロックの変形状態の推定と予測(ケース1; $\theta_{j,1/0}^i = 0.5$)

とは今後の課題である。

(2) ケース2

次に、空洞壁面の岩盤ブロック(数m規模)の変形状態を推定することを想定して図-10に示すような問題を解析する。このシミュレーションにおいて、ブロック1は不動、ブロック2および3は剛体平行移動のみ生じるとして、“真”の変形パラメータの収束値をブロック2では $u_{Rx}^2(\infty) = 3.0 \text{ cm}$, $u_{Ry}^2(\infty) = -2.5 \text{ cm}$, ブロック3では、 $u_{Ry}^3(\infty) = -3.5 \text{ cm}$ と設定した。これは、ブロック2がブロック1の上面に沿って空洞内空へ押し出す変形を想定したものである。なお、他の変形パラメータの“真”の値は0としている。一方、“真”のクリープパラメータは $\theta_1^i = \theta_2^i = \theta_3^i = 0.938$ とした。計測変位の与え方、初期値についてはケース1と同様である。また、ケース1ではブロック間の重なりは生じなかったが、本ケースでは計算途中で生じるため、式(12)のペナルティ値として $P = 1000$ を与えた。なお、本ケース

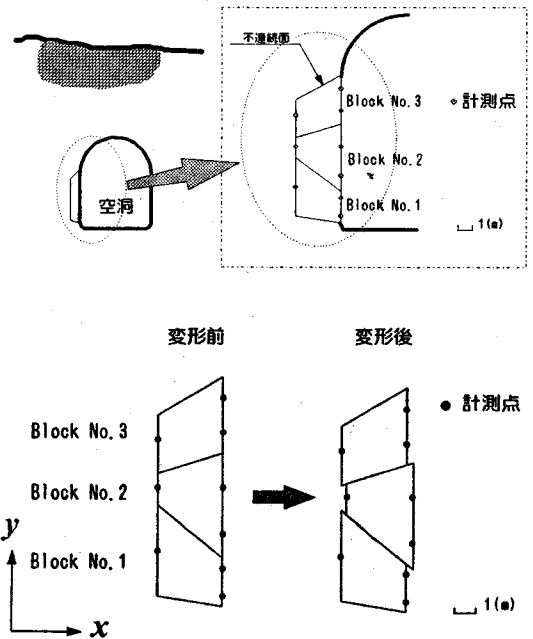
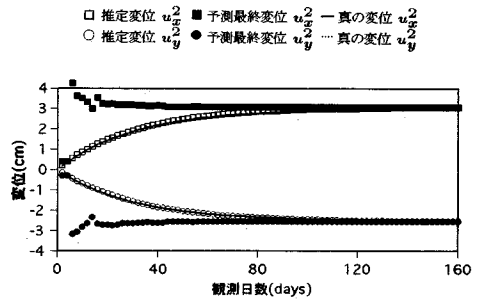
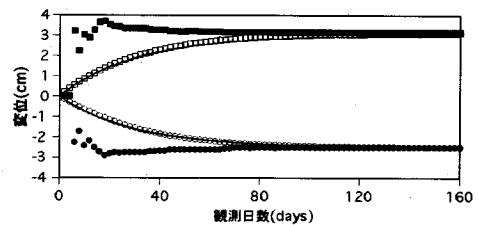


図-10 ケース2:空洞壁面のシミュレーション



(1) 標準偏差 = 1/10 mm ($\theta_{j,1/0}^i = 0.5$)



(2) 標準偏差 = 1/10 mm ($\theta_{j,1/0}^i = 2.0$)

図-11 剛体平行移動の推定とその収束値の予測状況(ケース2)

においても、各ブロックにおいて、6個の変形パラメータおよび3個のクリープパラメータを独立した未知パラメータとしており、したがって、3個のブロックで構成される本ケースにおいて、全体として求めるべき未知パラメータは27個となる。

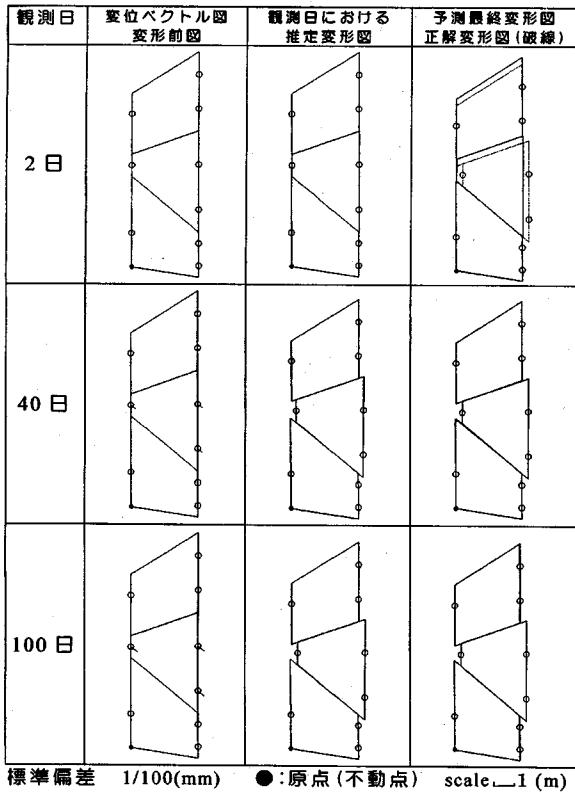


図-12 ブロックの変形状態の推定と予測(ケース2; $\theta_{j,1/0} = 0.5$)

図-11は、計測誤差 $\sigma_u = 1/10$ mmの場合のブロック2の剛体平行移動の推定および収束値の予測状況で、クリープパラメータの初期値を0.5および2.0とした場合に対する結果である。いずれの初期値に対しても、観測日における変形パラメータの推定値は観測開始直後からよい推定値を与えており、最終収束値の予測値は観測開始から20~30日頃には、真の収束値を数%の誤差で求められている。クリープパラメータについても、早い段階で収束する結果を得ている。一方、計測精度を $\sigma_u = 1$ mmとした場合、推定値も最終収束値の予測値も数10%の誤差があり、よい精度では推定されなかった。このことは、ここで取り上げた岩盤のスケールおよび変位の大きさに対しては、計測精度は1/10 mm程度は必要であることを示している。しかし、実際の地下空洞における現場計測で、1/10 mmの精度の計測は実施されており、その程度の精度の要求は本手法を適用する際の大きな障害とはならないと考えられる。

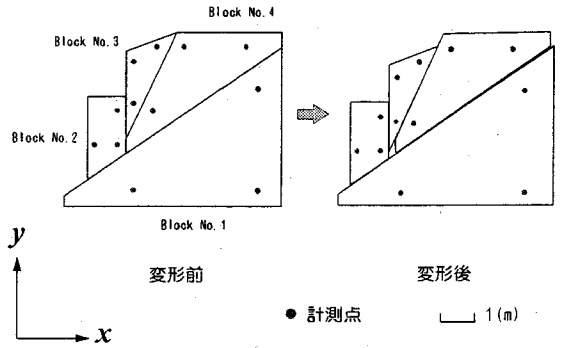


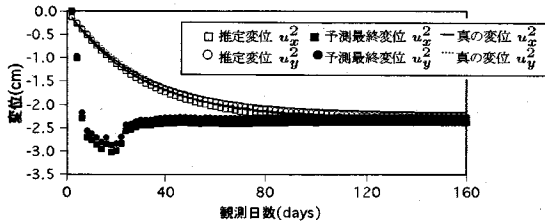
図-13 ケース3:岩盤斜面のブロックすべり

図-12は、本手法によって得られた変形パラメータの推定値を用いて、図-9と同様に観測日における変形状態とその時点で予測される最終変形の状態を比較したものである。本ケースにおいても、観測当初、十分な精度で最終変形状態が予測されていないが、40日目にはほぼ正確に最終状態が予測されているのがわかる(実線が点線にほぼ一致している)。

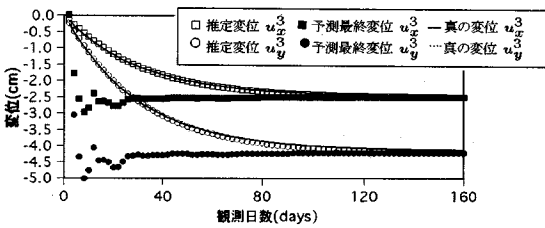
(3) ケース3

ケース3として、図-13に示すようなShiら²⁾の取り上げた斜面のブロックすべり(数m規模)を想定した問題を解析する。このシミュレーションではブロック1は不動とし、ブロック2,3,4は剛体平行移動をするものと仮定する。“真”の変形パラメータの収束値は、ブロック2では $u_{Rx}^2(\infty) = 3.0$ cm, $u_{Ry}^2(\infty) = -2.5$ cm, ブロック3では $u_{Rx}^3(\infty) = 3.0$ cm, $u_{Ry}^3(\infty) = -3.5$ cm, ブロック4では $u_{Rx}^4(\infty) = 3.0$ cm, $u_{Ry}^4(\infty) = -3.5$ cmとする。また、クリープパラメータはいずれのブロックの変形パラメータについても共通の値 $\theta_j^0 = 0.938$ とした。本ケースでも、ブロックの重なる処理のためのペナルティ値は $P = 1000$ とした。なお、本ケースにおいてもケース2および3と同様に、各ブロックの6個の変形パラメータおよび3個のクリープパラメータを独立した未知パラメータとしており、したがって、ブロック数が4個の本ケースでは全体として求めるべき未知パラメータは36個となる。

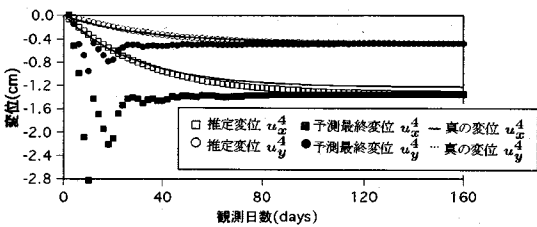
図-14は、計測誤差 $\sigma_u = 1/10$ mmの場合の各ブロックの剛体平行移動の推定とそれぞれの収束値の予測状況である。なお、クリープパラメータの初期値は2.0とした。観測日における剛体平行移動の推定値は観測開始直後からよい推定値を与えており、最終収束値の予測値も観測開始から20~30日頃には、真の収束値を数%の誤差で求められている。クリープパラメータについても、早い段階で収束する結果を得ている。なお、本ケー



(1) 標準偏差 = 1/10 mm (block No. 2)



(2) 標準偏差 = 1/10 mm (block No. 3)



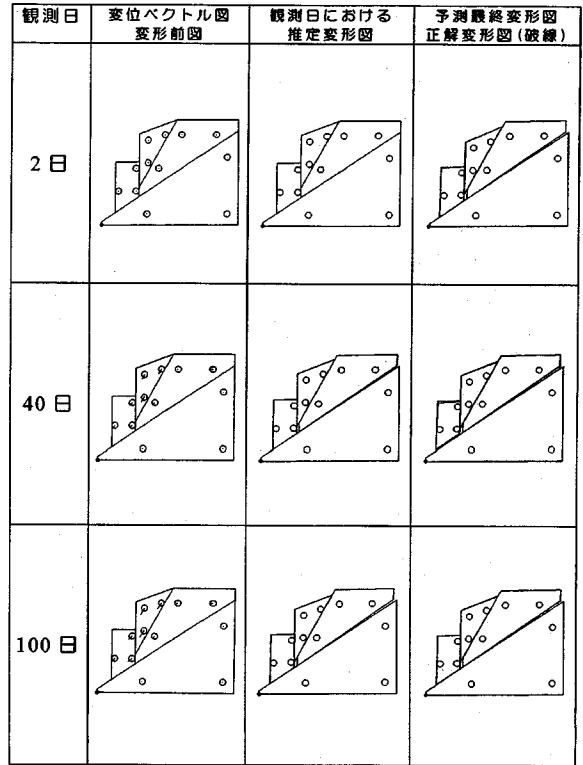
(3) 標準偏差 = 1/10 mm (block No. 4)

図-14 剛体平行移動の推定とその収束値の予測状況(ケース3; $\theta_{j,1/0}^i = 2.0$)

スにおいても、計測誤差を $\sigma_u = 1$ mmとした場合、推定値も最終収束値の予測値も数10%の誤差があり、よい精度では推定されなかった。しかし、ケース2の場合において述べたように、1/10 mmの精度の計測は現在の計測技術では可能であるので、ここで取り上げた程度の大きさの変位が生じる場合には、本手法は適用可能と考えられる。

図-15は、本手法によって得られた変形パラメータの推定値を用いて、図-9と同様に観測日における変形状態とその時点で予測される最終変形の状態を比較したものである。本ケースにおいても、当初、十分な精度で最終変形状態が予測されていないが、40日にはほぼ正確に最終状態が予測されているのがわかる。

以上のように、本論文では、2, 3, 4個のブロックでそれぞれ構成される例題を取り上げて、3章に示した提案方法の妥当性を検討した。限られたケースからではあるが、適切な精度を選べば、クリープパラメータお



標準偏差 1/100(mm) ●:原点(不動点) scale 1(m)

図-15 ブロックの変形状態の推定と予測(ケース3; $\theta_{j,1/0}^i = 2.0$)

よび変形パラメータの推定値、ならびにそれらの収束予測値が得られ、さらに、それらを用いてブロックの変形状態も比較的よい精度で求められることが示された。また、その結果から、ブロック間で重なりがある場合に対する仮定、 $\bar{K}_{r-1} \approx \bar{K}_r$ (式(22)第2式)もおおむね妥当であったと考えられる。

しかし、これによってただちに提案手法の妥当性が完全に検証されたわけではない。ブロックがより多数となった場合に対して、本論文で示した例と同様に精度の良い解が得られるか、また、式(22)第2式の仮定が妥当であるか、などに関する例証は今後の課題である。なお、本数値シミュレーションを行うに当たり、ワークステーション Sun EC (富士通; 主記憶容量 16MB) を利用し、計算時間はケース1, 2, 3に対して、それぞれ約30, 90, 160秒であったことを付記する。

5. 結論

本論文では不連続性岩盤を対象として、経時的に計測される変位から計測時における岩盤ブロックの変形状態の推定および最終的な変形状態の予測を行う方法を提案した。提案手法の特徴と数値シミュレーションによって得られた結果を以下にとりまとめる。

1. 本論文では、(1) 岩盤を不連続面で囲まれたブロックの集合体、(2) 岩盤ブロック内に生じるひずみは連続で微小、(3) 変形は単調増加で最終的には収束する挙動、を仮定した。
2. 提案手法は計測結果の逆解析法の一つであり、計測変位と不連続面の幾何学的な境界条件のみ必要で、岩盤の力学特性や力の条件を必要としない特徴がある。
3. 本手法では、経時的に計測される変位から、観測時における岩盤の変形状態の推定と、それまでに得た計測値から最終的な岩盤の変形状態を予測するために、適応フィルタリングを用いた。
4. 解くべきシステム方程式は、変位の経時変化の支配方程式を状態方程式とし、Shiらの提案したBackward DDAを観測方程式として構成される。その解法には拡張カルマンフィルタの方法を適用した。
5. 提案手法の妥当性を検討するために、空洞壁面や岩盤斜面を対象とした基本的な数値シミュレーションを行った。その結果、岩盤変形挙動の推定および最終状態の予測結果の精度は計測精度に依存するものの、適切な精度の計測変位から精度の良い結果を得ることが示された。

しかしながら、提案手法については、数値計算上および実際問題への適用上解決すべき問題がある。前者

については、本文でも述べたが、岩盤が多数のブロックで構成される場合に対して解が正しく求められるかという点、また、計測精度や計測配置と解析結果の精度の関係、などを明らかにする必要がある。後者については、不連続面の幾何学情報から岩盤ブロックをどのように設定するかという点、また、本論文の仮定の妥当性、などについて検討しなければいけない。これらの点は今後の課題であると同時に現段階における提案手法の限界である。

謝辞: 本論文では、永井哲夫博士(現 青木建設)が神戸大学大学院生当時に作成されたDDAのプログラムを一部利用させていただいた。ここに感謝の意を表す。また、本論文は、第一著者が、Geomechanics Research Centre (Laurentian University, Canada)に滞在中にとりまとめた。その間、数々の配慮をいただいたP. K. Kaiser博士に謝意を表す。

参考文献

- 1) 桜井春輔, 清水則一: 不連続性岩盤の解析手法の現状、土と基礎, 40-11(418), pp.39-44, 1992.
- 2) Shi, G. and R.E. Goodman: Two dimensional discontinuous deformation analysis, *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 9, pp.541-556, 1985.
- 3) Shi, G.: *Block system modeling by discontinuous deformation analysis*, Computational Mechanics Publications, 1993.
- 4) 片山徹: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983.
- 5) W. フリュージェ: 粘弾性学 (堀幸夫訳), 培風館, 1973.
- 6) 清水則一, 江上知幸, 中川浩二, 桜井春輔: GPSによる地盤変位計測結果の適応フィルタリングを用いた一評価法, 土木学会論文集, No.487/III-26, pp.275-278, 1994.

(1995. 6. 7 受付)

A BACK ANALYSIS METHOD USING MEASURED DISPLACEMENTS FOR PREDICTING DEFORMATIONAL BEHAVIOR OF DISCONTINUOUS ROCK MASS

Norikazu SHIMIZU, Hiroshi KAKIHARA, Hidekazu TERATO and Koji NAKAGAWA

This paper proposes a back analysis method of measured displacements for predicting deformational behavior of discontinuous rock mass. The method is formulated by the adaptive filtering combined with the Backward Discontinuous Deformation Analysis formula proposed by Shi. It can estimate the present deformational behavior of discontinuous rock mass and also predict the final behavior of rock mass from measured displacements. Geometrical conditions of discontinuous rock mass, i.e. location and direction of discontinuities, are required in the method, but any mechanical constants of rock mass are not needed. In order to verify the proposed method, numerical simulations are conducted.