

緩傾斜側壁を有する台形断面水路の流速分布とせん断応力分布

山坂昌成

正会員 工博 金沢工業大学助教授 工学部土木工学科
(〒921石川県石川郡野々市町扇が丘7-1)

近年の河川の横断形状は、高親水性や多自然型の配慮から、低水護岸や堤防の緩傾斜化がはかられることが多い。このような断面形を設計するにあたっては、流速分布やせん断応力分布を見積もることも重要となるが、これを解析的に扱った手法は現在のところ見あたらない。本研究では、緩傾斜側岸の河道横断面形状を台形断面で代表させ、側壁領域の渦動粘性係数をその地点の局所水深と関連づけて、渦動粘性係数の横断的な変化まで考慮した流速分布と壁面せん断応力分布の推定式を解析的に得た。これにより、任意の側斜面角に対して、せん断応力分布の変化を容易に知ることが可能となった。また、従来のせん断応力分布の推定法の利点、欠点についても明らかにした。

Key Words : open channel flow, trapezoidal channel, velocity distribution, shear stress distribution

1. 序論

近年の河川の横断面形は多様化し、とりわけ、高親水性や多自然型の立場から堤防や低水護岸の緩傾斜化がはかられる場合も多く見られるようになってきた。さらに、緩傾斜化した護岸上には覆土を施して植生を繁茂させる場合もあり¹⁾、流れに及ぼす側岸の緩傾斜化の定量評価や護岸の安全度の評価のためには、任意の側岸傾斜角について、流れの計算を可能にすることが望まれる。本研究では、側岸傾斜の河川横断面を対称な台形断面で代表させ、側岸の傾斜が緩やかな場合について、断面内の流速分布と底面・側斜面のせん断応力分布の推定法を提案する。このような台形断面水路の流れは、直線部の単断面水路の流ればかりでなく、複断面水路においては平水時の低水路流れ、また、高水時においては低水路から離れた高水敷上の流れと堤防近くの流れに対応するものと考えられる。

台形断面水路に代表されるように、底面（境界面）が横断的に傾いた一様勾配水路の流れでは、鉛直縦断面に作用するせん断力を無視して、底面せん断応力を $\tilde{\tau}_0 = \tilde{\rho} \tilde{g} \tilde{h} i_0 \cos \theta$ ($\tilde{\rho}$: 密度, \tilde{g} : 重力加速度, \tilde{h} : 局所水深, i_0 : 縦断勾配, θ : 底面の横断勾配角) により見積もったり、あるいは鉛直縦断面ではなく底

面に垂直な縦断面に作用するせん断力を無視して $\tilde{\tau}_0 = \tilde{\rho} \tilde{g} \tilde{h} i_0 \{1 - \tilde{h} / (2\tilde{r} \cos \theta)\} / \cos \theta$ (\tilde{r} : 底面の横断曲率半径) が適用されたりする²⁾。これらは、重力と境界面のせん断力の釣り合いを満足しているので、全境界面での平均値としては $\tilde{\tau}_{0m} = \tilde{\rho} \tilde{g} \tilde{R} i_0 \cos \theta$ (\tilde{R} : 径深) を満足する。この他に、二次元流れを準用し、水深を局所水深として $\tilde{\tau}_0 = \tilde{\rho} \tilde{g} \tilde{h} i_0$ とする方法や、水深を法線水深にとり $\tilde{\tau}_0 = \tilde{\rho} \tilde{g} \tilde{h} i_0 / \cos \theta$ とする方法もある²⁾。

Lundgren and Jonsson³⁾ は上記の推定法を改良し、底面に垂直な縦断面に作用するせん断力まで考慮した解析法について示している。この解析法では、上記の方法より精度は向上しているものの、底面に垂直な方向への対数流速分布を仮定し、渦動粘性係数の複雑な分布形を与えるため、境界せん断応力 $\tilde{\tau}_0$ の横断分布を求めるためには複雑な数値計算を行う必要があるばかりでなく、台形断面水路のように横断境界面の曲率が不連続になったり、曲率が大きくて底面に垂直な縦断面が水面下で交差するような場合については、この計算手法はもはや適用できなくなるなどの欠点を有する。

台形断面水路の流速分布や壁面せん断応力分布については実験的研究が主として行われ、境界せん断応力の直接測定が行われた例は、Gohsh and Roy⁴⁾

によるものが唯一と思われる。彼らの実験では、台形水路の横断境界面を中心軸に対して対称となるように3つのパートに切り離して上部の2つの対称面に作用する流下方向の力を測定し、この3つのパートへの分割のしかたを種々変化させることにより、各地点のせん断応力を求めるといった煩雑な方法がとられている。他の手法による壁面せん断応力の測定精度を調べる目的のためには精度のある有効な方法と思われるが、種々の形状についてせん断応力分布の特性を定量評価するには、手法があまりに煩雑すぎるようである。なお、この実験では長方形断面と台形断面について測定されており、長方形断面では人工粗度と滑面の2種が用いられているが、台形断面については配置が密な人工粗面のみが用いられている。

近年では、流速測定器の進歩により壁面近くの流速分布が精度良く測定できることから、流速分布に対数則を適用して壁面せん断応力を求めることが多い。富永・江崎・禰津⁵⁾は、ホットフィルム流速計を用いて、台形断面水路内の主流、二次流の詳細な測定を行い、壁面せん断応力の分布をこの手法より求め、二次流分布との関連などを明らかにしているが、任意の台形断面形についてのせん断応力分布の定量評価を行う方法を見出すには至っていない。台形断面に限らず、任意の横断面形状の開水路流れに対する流速分布や境界面のせん断応力分布を算定する有効な手法としては、近年さかんに用いられるK-εモデルなどの数値解析法があり、福岡・西村ら⁶⁾は、これを適用して外側壁が緩やかに傾斜した湾曲水路の流れと平衡底面形状についての解析を行っている。この解析法は、もちろん直線の台形断面水路への適用も可能である⁷⁾が、だれでもがすぐに解を得られるというほど計算はたやすいものではない。

本研究では解析結果が応用しやすいように、近似的な解ではあるが、取り扱いが容易な解析解を得ることとする。ただし、適用条件は台形断面の底面幅および側斜面の水平横断距離が中央水深に比べて十分に大きい場合に限定される。

2. 台形断面水路内の流れの解析

(1) 基礎方程式の導出

水路内に横断面内の二次流が生じると、これにより主流の運動量が横断方向に輸送されることになり、壁面のせん断応力の分布はこの影響を受けて変化する⁵⁾。直線水路において法線方向のレイノルズ応力の不均衡によって生じる二次流⁸⁾まで

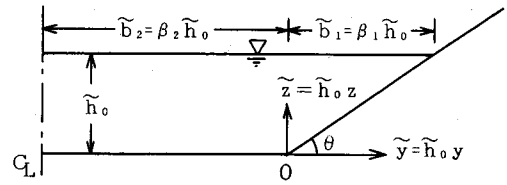


図-1 記号の定義

考慮した解析解を得ることは不可能に近いので、本研究では二次流を無視し、渦動粘性係数を用いたモデルによる解析を行う。

図-1に示すように水平横断座標軸を \tilde{y} 、鉛直上向き軸を \tilde{z} とすると、縦断勾配が i_0 の等流の重力とせん断力の釣り合い式(二次流を無視した運動方程式)は

$$\tilde{\rho} \tilde{g} i_0 + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) = 0 \quad (1)$$

となる。ここに、 $\tilde{\rho}$ は水の密度、 \tilde{g} は重力加速度、 \tilde{u} は流速、 $\tilde{\varepsilon}$ は渦動粘性係数である。上部に $\tilde{\varepsilon}$ の付いた量は次元量を表し、後に現れる無次元量と区別する。渦動粘性係数 $\tilde{\varepsilon}$ は、側壁の傾斜角が大きく長方形断面からの変化が小さい台形断面の場合には、断面の平均値を用いていた⁹⁾が、本研究で扱うような緩傾斜側壁の台形断面の場合には、横断方向に $\tilde{\varepsilon}$ が大きく変化すると思われるので、 $\tilde{\varepsilon}$ の鉛直分布については考慮しないが、 \tilde{y} 方向には分布をもたせることにする。 $\tilde{\varepsilon}$ は本来テンソル量であり、これと同等の拡散係数については水平方向の値が鉛直方向の値の約2~3倍にもなるとの報告¹⁰⁾もあるが、 $\tilde{\varepsilon}$ そのものについては、その定量化が十分ではないので、とりあえず鉛直方向と水平方向で等しい値をとるものとし、流速分布の計算結果が実測値をうまく表現できないようであれば、 $\tilde{\varepsilon}$ の水平・鉛直比を考慮することにする。横断勾配が緩やかであると仮定しているの、第一近似として、 $\tilde{\varepsilon}$ は水深が \tilde{h} の二次元流れの鉛直平均値で与えることにすると、

$$\tilde{\varepsilon} \approx \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{h}}{15} \approx \frac{\sqrt{\tilde{g} \tilde{h}^3 i_0}}{15} \quad (2)$$

となる。ここに、 \tilde{h} は局所水深、 \tilde{u} は摩擦速度である。上式では、 $\tilde{u} = \sqrt{\tilde{g} \tilde{h} i_0}$ が仮定されているが、このような仮定が最終結果として得られる \tilde{u} に及ぼす影響はきわめて小さいので、このような近似式を用いる。

式(1)の境界条件は、水面、底面、側斜面でそれぞれ必要となるが、自由表面では空気と水の間のせん断力を無視して、水面でせん断応力がゼロとする。固体表面での境界条件を $\tilde{u}=0$ とすると、渦動粘性係数を鉛直方向に一定としている解析では、流速の鉛直分布が層流の場合と同一になってしまうので、便宜的に固体表面でのスリップを許容し、固体表面で流速とせん断応力が比例すると仮定する。これらを定式化すると、

$$\text{水面で} : \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\text{底面で} : \tilde{u} = \tilde{\chi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \quad (4)$$

$$\text{側斜面で} : \tilde{u} = \tilde{\chi} \cos\theta \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \tan\theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \quad (5)$$

となる。ここで示した側斜面での境界条件は、水路中心に対して右岸側のもののみを示しているが、対岸については、水路中心に対する流速分布の対称性を考慮すれば自動的に満足される。式(4)、(5)の $\tilde{\chi}$ はスリップ速度とせん断応力の比例関係を間接的に表す係数であり、渦動粘性係数 $\tilde{\epsilon}$ を与えた方法と同様に、水深 \tilde{h} の二次元水路の場合のものを近似的に用いると、

$$\tilde{\chi} = \tilde{h} \left[\frac{1}{15\sqrt{C_f}} - \frac{1}{3} \right] \quad (6)$$

となる¹¹⁾。ここに、 C_f は境界面の摩擦係数である。水深が横断方向に変化する流れにおいては、平面二次元流解析では、摩擦係数の横断分布が平均流速の横断分布を大きく支配することになるが、本解析のように流速の鉛直分布まで扱う場合には各地点で摩擦係数を定義することはなじまないし、式(6)が示すように C_f の変化が $\tilde{\chi}$ に及ぼす影響は小さいので、本研究では C_f を一定とする。

解析の容易さのために、上式群を無次元化する。代表流速に、水深が水平域の水深 \tilde{h}_0 に等しい二次元流れの平均流速 \tilde{u}_∞ 、鉛直方向の代表長さに \tilde{h}_0 、水平方向の代表長さに片側斜面の水平横断距離 \tilde{b}_1 をとり、以下の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}/\tilde{u}_\infty, \quad h = \tilde{h}/\tilde{h}_0, \quad y = \tilde{y}/\tilde{b}_1, \quad z = \tilde{z}/\tilde{h}_0 \\ \beta_1 &= \tilde{b}_1/\tilde{h}_0, \quad \gamma = \tilde{b}_2/\tilde{b}_1, \quad \beta_2 = \tilde{b}_2/\tilde{h}_0 = \beta_1\gamma \end{aligned} \quad (7)$$

このとき、運動方程式と境界条件は、それぞれ、以下ようになる。

[運動方程式]

$$h^{3/2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(h^{3/2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -K \quad (8)$$

ここに、

$$K = 15 \frac{\tilde{u}_\infty}{u_\infty} = 15\sqrt{C_f} \quad (9)$$

であり、 \tilde{u}_∞ は水深 \tilde{h}_0 の二次元水路の摩擦速度 $(\sqrt{\rho g \tilde{h}_0 i_0})$ である。

[境界条件]

$y \leq 0$ の領域について

$$z=1 \text{ で: } \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$z=0 \text{ で: } u = \chi \frac{\partial u}{\partial z} \quad (11)$$

$y \geq 0$ の領域について

$$z=1 \text{ で: } \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$z=y \text{ で: } u = h\chi \cos\theta \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (13)$$

ここに、

$$\chi = \tilde{\chi}/\tilde{h} = \left(\frac{1}{15\sqrt{C_f}} - \frac{1}{3} \right) \quad (14)$$

である。

$y \leq 0$ の水平域では $h=1$ であるので、式(8)の解の関数形は長方形断面水路の場合¹¹⁾と同一となるが、 $y \geq 0$ の斜面域では $h=1-y$ であるので、水平域と同一の関数形で表すことはできない。そこで、未知係数を含んだ形で水平域と斜面域の解を別々に求め、水平域と斜面域の接合部($y=0$)での連続条件からこの未知数を決定し、これにより全体の解を得るという方法をとることにする。

(2) 水平域の解析

水平域についての運動方程式、境界条件は、それぞれ以下となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -K \quad (15)$$

$$z=1 \text{ で: } \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

$$z=0 \text{ で: } u = \chi \frac{\partial u}{\partial z} \quad (17)$$

これらの式の適用領域は $-y \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1$ であり、式(15)の左辺第二項のオーダーは $1/(\beta_1\gamma)^2 = 1/\beta_2^2 \ll 1$ であると仮定する。このとき、主要解は

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} = -K \quad (18)$$

から得られると考えられるが、これだけでは横断方向の境界条件（この領域については $y=0$ での連続条件）を満足できないので、同次方程式

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \quad (19)$$

も加え、

$$u = u_1 + u_2 \quad (20)$$

にて解を表す。水面と底面の境界条件をそれぞれ独立に満足するように u_1, u_2 を求めると

$$u_1 = K \left(-\frac{z^2}{2} + z + \chi \right) \quad (21)$$

$$u_2 = K \sum_{j=1}^{\infty} \{ A_j \exp(\beta_j \delta_j y) + B_j \exp(-\beta_j \delta_j y) \} \cos \delta_j (1-z) \quad (22)$$

となる。ここに、 δ_j は

$$\tan \delta_j = \frac{1}{\chi \delta_j} \quad (23)$$

を満足する正の実数とし、小さいものから順に、 $\delta_1, \delta_2, \dots$ としている。

式(22)で、流路中心($y=-\gamma$)に対する対称性を考慮すると、

$$B_j = A_j \exp(-2\beta_j \gamma \delta_j) \quad (24)$$

となるが、 $\beta_j \gamma$ ($=\beta_1 \gamma$) が大きいとき B_j は極めて小さくなるので、 $y=0$ での流速の連続条件を満足するのが容易となるよう、この項は無視することにする。すなわち、

$$u = K \left(-\frac{z^2}{2} + z + \chi \right) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \exp(\beta_j \delta_j y) \cos \delta_j (1-z) \quad (25)$$

を採用する。このようにすると、 $y=-\gamma$ での流速の横断勾配がゼロとはならないが、 $\beta_1 \gamma$ が十分大きければこれによる誤差は微小である。未知係数 A_j は $y=0$ での流速の連続条件から決定される。

(3) 斜面域の解析

斜面域については、式の扱いが容易なように、図-2に示すような新たな座標軸 Y, Z を用いて解析を行う。すなわち

$$\begin{aligned} Y &= 1-y \\ Z &= 1-z \end{aligned} \quad (26)$$

とすると、斜面域の無次元水深は $h=Y$ となるので、式(8), (12), (13)は、それぞれ、

$$Y^{3/2} \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y^{3/2} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = -K \quad (27)$$

$$Z=0 \text{ で: } \frac{\partial u}{\partial Z} = 0 \quad (28)$$

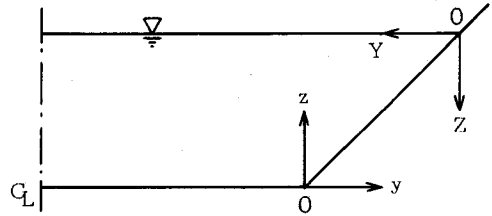


図-2 座標の変換

$$Z=Y \text{ で: } u = Y \chi_1 \left(-\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \quad (29)$$

となる。ここに、

$$\chi_1 = \chi \cos \theta = \chi \sqrt{\frac{1}{1+1/\beta_1^2}} \quad (30)$$

である。式(27)の解は、式(27)の右边をゼロとした同次方程式の解と u_H と式(27)を満足する任意の解 u_N の和として、

$$u = u_N + u_H \quad (31)$$

のように表すことができる。

a) 非同次方程式の解 u_N

式(31)の u_N, u_H はそれぞれ独立に $Z=0$ と $Z=Y$ での境界条件を満足するものとする、 u_N に関する偏微分方程式と境界条件は、それぞれ、

$$Y^{3/2} \frac{\partial^2 u_N}{\partial Z^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y^{3/2} \frac{\partial u_N}{\partial Y} \right) = -K \quad (32)$$

$$Z=0 \text{ で: } \frac{\partial u_N}{\partial Z} = 0 \quad (33)$$

$$Z=Y \text{ で: } u_N = Y \chi_1 \left(-\frac{\partial u_N}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial u_N}{\partial Y} \right) \quad (34)$$

となる。式(32)~(34)を満足する u_N の関数形は容易には思いつかないので、 $\beta_1 \gamma > 1$ を仮定し、

$$u_N = u_{N0} + \frac{1}{\beta_1^2} u_{N1} + \left(\frac{1}{\beta_1^2} \right)^2 u_{N2} + \dots \quad (35)$$

なる摂動展開を行い、 $1/\beta_1^2$ のオーダーまでの解を摂動法により求めることにする。

式(35)を式(32)~(34)に代入すると、 $1/\beta_1^2$ の各オーダーごとの偏微分方程式と境界条件が、それぞれ以下のように得られる。

[0次のオーダー]

$$Y^{3/2} \frac{\partial^2 u_{N0}}{\partial Z^2} = -K \quad (36)$$

$$Z=0 \text{ で: } \frac{\partial u_{N0}}{\partial Z} = 0 \quad (37)$$

$$Z=Y \text{ で: } u_{N0} = -Y \chi \frac{\partial u_{N0}}{\partial Z} \quad (38)$$

[1次のオーダー]

$$Y^{3/2} \frac{\partial^2 u_{N1}}{\partial Z^2} = - \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y^{3/2} \frac{\partial u_{N0}}{\partial Y} \right) \quad (39)$$

$$Z=0 \text{ で: } \frac{\partial u_{N1}}{\partial Z} = 0 \quad (40)$$

$$Z=Y \text{ で: } u_{N1} = Y \chi \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_{N0}}{\partial Z} - \frac{\partial u_{N1}}{\partial Z} + \frac{\partial u_{N0}}{\partial Y} \right) \quad (41)$$

これらの式より u_{N0} , u_{N1} を求め, 式(35)に代入すると,

$$u_N = KY^{1/2} \left[\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{Z}{Y} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \chi \right) \right\} + \frac{1}{\beta_1^2} \left\{ \frac{1}{16} \left(\frac{Z}{Y} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \chi \right) \left(\frac{Z}{Y} \right)^2 + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4} \chi + \chi^2 \right) \right\} \right] \quad (42)$$

が得られる. 式(42)は水面と斜面での境界条件を満足しているが, 斜面が無限に広がっている場合の解を表している. 台形のように水路中央に水平域が存在する場合にはこの影響を次の同次方程式の解によって取り入れる必要がある.

b) 同次方程式の解 u_H

u_H に関する偏微分方程式と境界条件は, それぞれ,

$$Y^{3/2} \frac{\partial^2 u_H}{\partial Z^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y^{3/2} \frac{\partial u_H}{\partial Y} \right) = 0 \quad (43)$$

$$Z=0 \text{ で: } \frac{\partial u_H}{\partial Z} = 0 \quad (44)$$

$$Z=Y \text{ で: } u_H = Y \chi_1 \left(-\frac{\partial u_H}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial u_H}{\partial Y} \right) \quad (45)$$

となる.

$$\xi = Y, \quad \eta = Z/Y \quad (46)$$

なる座標変換を行い, 解を

$$u_H = \xi^a E(\eta) \quad (47)$$

のように変数分離形で表すと, 式(43)~(45)は以下ようになる.

$$(\beta_1^2 + \eta^2) \ddot{E} + \left(\frac{1}{2} - 2a \right) \eta \dot{E} + \left(a^2 + \frac{a}{2} \right) E = 0 \quad (48)$$

$$\eta=0 \text{ で: } \dot{E} = 0 \quad (49)$$

$$\eta=1 \text{ で: } \left(1 - \frac{\chi_1}{\beta_1^2} a \right) E + \chi_1 \left(1 + \frac{1}{\beta_1^2} \right) \dot{E} = 0 \quad (50)$$

ここに, $E(\eta)$ は η の関数を表し, $\dot{}$, $\ddot{}$ はそれぞれ, η による1回, 2回の微分演算の記号を示している.

式(48)から, E は η のべき級数で表されることが予想されるので, $\eta=0$ での境界条件を満足するように,

$$E(\eta) = KD (1 + e_2 \eta^2 + e_4 \eta^4 + \dots) \quad (51)$$

なる展開を行う. 式(51)で η の0次の項を KD とし

ているのは, 式(42)で u_N が K に比例する形になっているためである. 式(51)を式(48)に代入し, η^2 の各オーダーごとに釣り合い式を満足すると仮定すると,

$$e_2 = -\frac{1}{2\beta_1^2} \left(a^2 + \frac{a}{2} \right) \quad (52)$$

$$e_4 = \frac{1}{24\beta_1^4} \left(a^2 + \frac{a}{2} \right) \left(a^2 - \frac{7}{2}a + 3 \right) \quad (53)$$

が得られる. これより, a が1以下のオーダーで, $\beta_1 > 1$ であれば式(51)の展開は収束することがわかる. 未知の係数 a は $\eta=1$ での境界条件から得られるが, 式(51)を無限級数のままで扱おうと, a に関する無限次の方程式となり, 解が得られないので, 式(51), (52)を式(50)に代入し, β_1^2 のオーダーまで打ち切ると, a は以下の2次方程式の解で近似される.

$$(1+2\chi_1)a^2 + \frac{1}{2}(1+6\chi_1)a - 2\beta_1^2 = 0 \quad (54)$$

$a < 0$ の解は $Y=0$ (水際) で u_H が発散するので, $a > 0$ のみが物理的に意味のある解となる. すなわち,

$$a = \frac{-\frac{1}{4}(1+6\chi_1) + \sqrt{\left(\frac{1+6\chi_1}{4} \right)^2 + 2\beta_1^2(1+2\chi_1)}}{1+2\chi_1} \quad (55)$$

である.

u_H は Y, Z を用いて,

$$u_H = KD Y^a \left[1 + e_2 \left(\frac{Z}{Y} \right)^2 + e_4 \left(\frac{Z}{Y} \right)^4 + \dots \right] \quad (56)$$

のように表される.

(4) 水平域と斜面域の解の接合

水平域の流れの解析では, 式(25)において A_i が未知係数であり, 斜面域の解析では式(31), (42), (56)において D が未知係数となっている. これらは $y=0$ ($Y=1$) での速度の連続条件と横断速度勾配の連続条件から決定される.

速度の連続条件は,

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(\delta_j Z) = \left(e_4 D + \frac{1}{16\beta_1^2} \right) Z^4 + \left(e_2 D - \frac{1}{4\beta_1^2} \left(\frac{1}{2} + \chi \right) \right) Z^2 + \left[D + \frac{1}{\beta_1^2} \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4} \chi + \chi^2 \right) \right] \quad (57)$$

となる. $\cos(\delta_j Z)$ の直交性を利用すると, 上式より A_j は D を用いて以下のように表される.

$$A_j = \frac{2}{1 + \frac{\sin 2\delta_j}{2\delta_j}} \left[(e_4 I_{4j} + e_2 I_{2j} + I_{0j}) D \right]$$

$$+\frac{1}{\beta_1^2} \left[\frac{1}{16} I_{4j} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \chi \right) I_{2j} + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4} \chi + \chi^2 \right) I_{0j} \right] \quad (58)$$

ここに、

$$I_{4j} = \int_0^1 Z^4 \cos(\delta_j Z) dZ \\ = \frac{\sin \delta_j}{\delta_j} \left(1 - \frac{12}{\delta_j^2} + \frac{24}{\delta_j^4} \right) + \frac{\cos \delta_j}{\delta_j^2} \left(4 - \frac{24}{\delta_j^2} \right) \quad (59)$$

$$I_{2j} = \int_0^1 Z^2 \cos(\delta_j Z) dZ = \frac{\sin \delta_j}{\delta_j} \left(1 - \frac{2}{\delta_j^2} \right) + 2 \frac{\cos \delta_j}{\delta_j^2} \quad (60)$$

$$I_{0j} = \int_0^1 \cos(\delta_j Z) dZ = \frac{\sin \delta_j}{\delta_j} \quad (61)$$

である。

速度の横断勾配の連続条件は、

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \beta_j \delta_j \cos(\delta_j Z) \\ = -D \left\{ a + (a-2) e_2 Z^2 + (a-4) e_4 Z^4 \right\} - \left[\frac{3}{4} Z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \chi \right) \right] \\ + \frac{1}{\beta_1^2} \left[-\frac{7}{32} Z^4 + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2} + \chi \right) Z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4} \chi + \chi^2 \right) \right] \quad (62)$$

であるが、 u_H を η の4乗までの有限項で打ち切り、さらに a の値を1つに限定していることから、どのような D を選んでも任意の Z に対して式(62)を満足することはできない。そこで、上式を Z が0~1の範囲で積分し、鉛直縦断面に作用するせん断力の総和が接合部で連続するように D を決めることにすると、

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \beta_j \sin \delta_j = -D \left\{ a + \frac{a-2}{3} e_2 + \frac{a-4}{5} e_4 \right\} \\ - \left[\frac{1}{2} (1+\chi) + \frac{1}{\beta_1^2} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2} \chi + \frac{1}{2} \chi^2 \right) \right] \quad (63)$$

となる。

式(58)を式(63)に代入すると、 D は、

$$D = \frac{S_2}{S_1} \quad (64)$$

のように容易に得られる。ここに、

$$S_1 = \frac{1}{\beta_1} \left[a + \frac{a-2}{3} e_2 + \frac{a-4}{5} e_4 \right] \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \sin \delta_j}{1 + \frac{\sin 2 \delta_j}{2 \delta_j}} (e_4 I_{4j} + e_2 I_{2j} + I_{0j}) \quad (65)$$

$$S_2 = -\frac{1}{2 \beta_1} (1+\chi) - \frac{1}{\beta_1^3} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2} \chi + \frac{1}{2} \chi^2 \right) \\ - \frac{1}{\beta_1^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \sin \delta_j}{1 + \frac{\sin 2 \delta_j}{2 \delta_j}} \left[\frac{1}{16} I_{4j} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \chi \right) I_{2j} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4} \chi + \chi^2 \right) I_{0j} \right] \quad (66)$$

である。

(5) 鉛直平均流速と底面、側斜面のせん断応力分布

鉛直平均流速は、前項までに得られた流速分布を積分することにより、以下ようになる。

[水平域 ($y \leq 0$)]

$$u_m = K \left[\left(\frac{1}{3} + \chi \right) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \exp(\beta_j \delta_j y) \frac{\sin \delta_j}{\delta_j} \right] \quad (67)$$

[斜面域 ($y \geq 0$)]

$$u_m = u_{Nm} + u_{Hm} \quad (68)$$

ここに、

$$u_{Nm} = K Y^{1/2} \left[\left(\frac{1}{3} + \chi \right) + \frac{1}{\beta_1^2} \left(\frac{1}{30} + \frac{2}{3} \chi + \chi^2 \right) \right] \quad (69)$$

$$u_{Hm} = K D Y^a \left[1 + \frac{e_2}{3} + \frac{e_4}{5} + \dots \right] \quad (70)$$

である。

また底面と側斜面のせん断応力 $\tilde{\tau}_b$ 、 $\tilde{\tau}_s$ は水深 \tilde{h}_0 の二次元流れの底面せん断応力 $\tilde{\tau}_{b\infty}$ で無次元化され、以下のように表される。

$$\frac{\tilde{\tau}_b}{\tilde{\tau}_{b\infty}} = \frac{\tilde{u}_b}{\tilde{u}_{b\infty}} = 1 + \frac{1}{\chi} \sum_{j=1}^{\infty} A_j \exp(\beta_j \delta_j y) \cos \delta_j \quad (71)$$

$$\frac{\tilde{\tau}_s}{\tilde{\tau}_{s\infty}} = h^{3/2} \frac{u_s}{u_{b\infty} h} \\ = Y \left[1 + \frac{1}{\beta_1^2} \left(\frac{1}{2} + \chi \right) \right] + \frac{D}{\chi} Y^{a+1/2} (1 + e_2 + e_4) \quad (72)$$

ただし、 τ_b については、近似的に満足されている側斜面での境界条件式を用いて導かれている。式(72)は第1項(Y に比例する項)が非同次解(斜面が無限に続く場合の解)を、第2項が同次解による項を表している。

ここで、 β_1 が大きい場合を例にとり、平均流速の横断分布の計算結果を図-3に、底面・側斜面のせん断応力分布の計算結果を図-4に示す。図-3に実線で示す鉛直平均流速の横断分布は $y=0$ で横断勾配が不連続となり、この付近における流速の変化は斜面域の方が緩やかとなっている。流速の横断勾配がこの地点で連続するように係数 D を決定しているの、この不連続性は一見奇異に感じられるが、これは主として、斜面域の平均流速が水面に近くて流速の速い部分の平均化から得られていることに起因している。このことを明確にするために、 $z=0.5$ における流速 $u_{0.5}$ の横断分布を同図に破線で示す。この破線は接合部で勾配が連続し、 $y=0.5$ では側斜面の固定境界での流速まで減少する。平均流速 u_m を生じる高

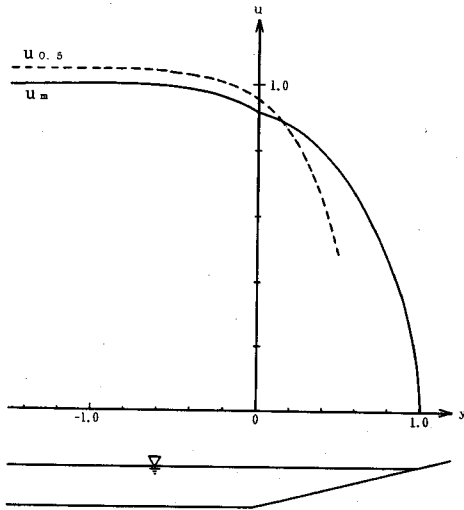


図-3 鉛直平均された流速の横断分布の計算例
($B_1=4, C_f=0.005$)

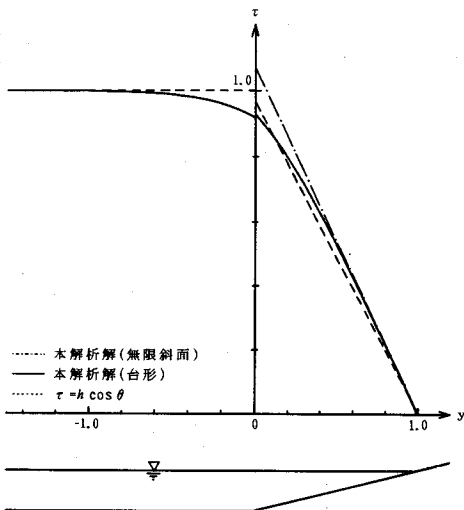


図-4 境界せん断応力分布の計算例
($B_1=4, C_f=0.005$)

さは一定ではなく、水際に近づくに従って z が高い位置に生じるようになるので、斜面域での平均流速の低減は $u_{0.5}$ が示すほど急激にはならず、もっと緩やかとなる。このため、平均流速の横断勾配は接合部で不連続となる。水深平均された流速のみを扱う平面二次元流解析では、このような横断速度勾配の不連続性は生じない。

せん断応力分布を示す図-4では、実線が本解析から得られたせん断応力分布を、一点鎖線が式(72)の第1項を、破線は鉛直縦断面に作用するせん断力を

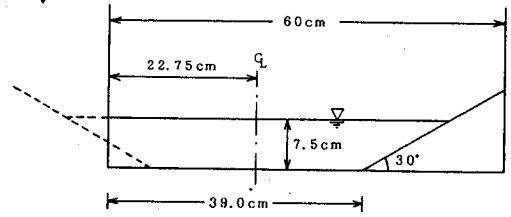


図-5 実験水路の横断図

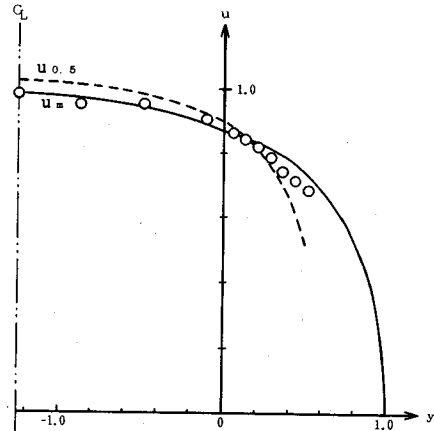


図-6 鉛直平均された流速の横断分布

無視して計算される $\tau=h\cos\theta$ を示している。混乱を避けるため、同図中には示されていないが、斜面上に垂直な縦断面に作用するせん断力を無視して計算される底面せん断応力 $\tau=h/\cos\theta$ は一点鎖線より値が3.6%小さな直線となる。実線の変化についてみると、水際($y=1$)付近では一点鎖線が示す式(72)の第1項が支配的であり、接合部に近づくに従って、水平床の影響を受けて一点鎖線より徐々に低下するようになる。また水平部では $y=0$ に近づくに従って、側斜面の影響を受けて底面せん断応力は指数関数的に減少する。重力と境界せん断力の釣り合い関係式より、破線が示す $\tau=h\cos\theta$ を上回るせん断力の総和とこれを下回るせん断力の総和は等しくなる必要があるが、本解析結果はこれをほぼ満足していることが読みとれる。ただし、式(72)は側斜面での境界条件式を用いて導かれているので、導かれた流速解が側斜面での境界条件を厳密には満足していない分の誤差と流路中心での対称性を厳密には満足していない分の誤差(幅がせまいとき大)は含まれている。

3. 実験結果との比較

実験には長さ8m、幅60cmの長方形断面水路を用い、計算条件を満足するよう水路幅をできるだけ広

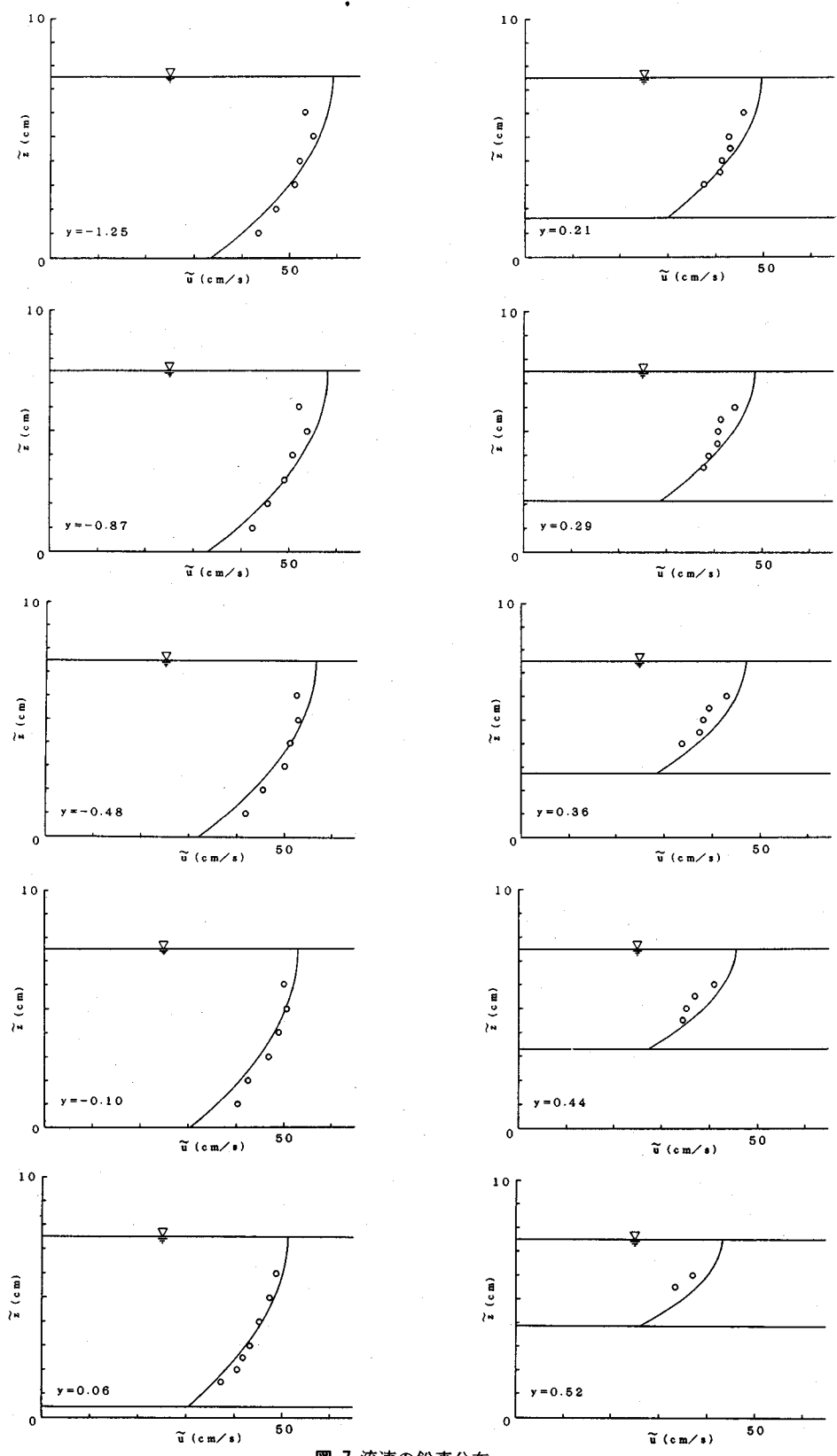


図-7 流速の鉛直分布

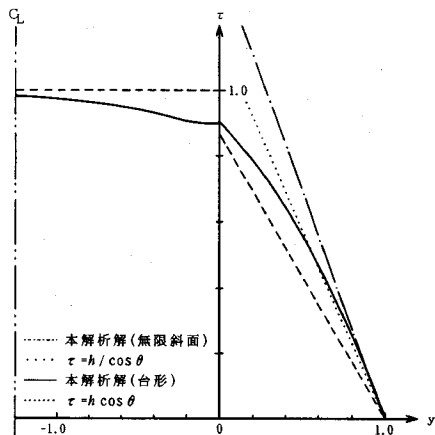


図-8 境界せん断応力の分布

くとりたいため、図-5に示すように片岸のみに水平角 30° の傾斜側壁を設置して台形水路を作成した。水路の構成材料は、底面、側斜面とも耐水性ベニヤ板である。計算値との対応においては、図-5の破線で示すように、対岸の鉛直壁の位置に実在の傾斜側壁と対称な仮想側壁の半水深位置がくるような対称断面形を想定する。このような仮想対称台形断面の中心位置から実在傾斜側壁側の流速分布を電磁流速計で測定した。計測はサンプリング周波数 5hz で行い、500 個のデータから平均流速を求めた。水理条件は、縦断勾配 $=1/600$ 、中央水深 $\tilde{h}_0=7.5\text{cm}$ 、傾斜側壁片幅 $\tilde{b}_1=13.0\text{cm}$ 、底面半幅 $\tilde{b}_2=16.3\text{cm}$ 、全幅流量 15.1 l/s (流速測定から得られた半幅流量を 2 倍した仮想断面に対する流量) であった。なお、計算される流量が実測流量に一致するよう、 C_f を繰り返し計算で求めると、 $C_f=4.42 \times 10^{-3}$ となる。

図-6に鉛直平均された流速の横断分布についての実験値と計算値の比較を示す。図中の○印は実験値を表し、実線が鉛直平均流速の計算値を、破線は図-3と同様に $z=0.5$ の高さにおける流速の計算値を示す。図-3と同様に、 $z=0.5$ の高さの流速 $u_{0.5}$ は接合部でもなめらかに変化し、斜面域で急激な低下を示すのに対して、鉛直平均流速の横断勾配は接合部で不連続となり、斜面側で緩やかとなる。実験値は測定機器の大きさの制限から水際のごく近くまでは得られていないが、測定された範囲内では、計算値との対応は良好である。

各横断位置における流速の鉛直分布についての実験値と計算値の比較を図-7に示す。水平域では、計算値の方が流速の鉛直勾配が実測値よりやや急であるものの平均値はほぼ一致している。斜面域では、

計算値の方が全体的にやや大きい傾向が見られるが、分布形はほぼ一致している。以上より、鉛直平均流速の横断分布、流速の鉛直分布ともに、本解析解は実測値との対応が全体的に良いことがうかがえる。

壁面せん断応力の分布については、実験による測定がなされていないので計算値のみを示すと、図-8のようになる。実線が本解析から得られる結果を示し、破線は鉛直縦断面に作用するせん断力を無視した場合に重力との釣り合い式から計算される $\tau=h\cos\theta$ を、点線は斜面に垂直な縦断面に作用するせん断力を無視して得られる $\tau=h/\cos\theta$ を表す。また一点鎖線は斜面域での非同次解 (斜面が無限に広がっていると仮定した場合の解に相当) を表している。水際近くでは水平域の影響を受けず非同次解にほぼ一致するが、接合部に近づくに従って、水平域の影響を受けて、一点鎖線が示す非同次解よりかなり小さくなっていく。水平域では、斜面域の影響を受けて、同様に非同次解 (二次元水路の場合の解) より小さな値となり、接合部に近づくに従って底面せん断応力は減少する。

一樣斜面が無限に広がっている場合を想定し、せん断応力の推定法について図中の 3 つの直線を比較すると、鉛直縦断面に作用するせん断力を無視した場合がもっとも小さく (本解析から得られる一点鎖線の 62%)、精度が悪いことがうかがえる。本解析のように粘性の効果を取り入れ、斜面に垂直な縦断面に作用するせん断力も考慮した解析では、水深の深い領域の速い流れが、水深の浅い領域の遅い流れを引っ張る効果により、壁面せん断応力は、斜面に垂直な縦断面に作用するせん断力を無視して得られる結果 (点線) より大きくなる。従って、無限に広い斜面では、境界に垂直な縦断面に作用するせん断力を無視した場合、鉛直縦断面に作用するせん断力を無視した場合のどちらも壁面せん断応力を過小評価することになり、特に、後者についてはこの誤差は顕著である。

有限長の斜面ではいろいろな要因が影響し合っており、たまたま、簡便法での精度が比較的高いこともあると考えられるが (たとえば、図-8では斜面全体にわたっての適合度は 3 つの直線のうち破線がもっとも良い)、基本的な考え方 (破線では、鉛直縦断面にせん断力が作用しない) に大きな誤差が含まれるので、他の境界形状の水路に対して簡便法を適用するには注意が必要である。

4. 結論

本研究では、緩傾斜の側斜面を有する台形断面水

路の流れについて、側斜面上で渦動粘性係数とその水深に応じて変化することを仮定して、流速分布と壁面せん断応力分布の解析解を得た。ここから得られた主要な結論を列挙すると以下のようである。

- 1) 台形断面水路では境界の横断勾配の不連続性に呼応して、鉛直平均流速の横断勾配も接合部において不連続に変化する。
- 2) 本解析から得られる流速分布の計算値は、実測値との対応が比較的良い。
- 3) 上記 2) は水平方向、鉛直方向の渦動粘性係数を一致させての結果であり、本研究の範囲では、水平方向と鉛直方向の渦動粘性係数は、ほぼ等しいと考えられる。
- 4) 側斜面のせん断応力は、水際で無限斜面の解に接し、接合部に近づくと、水平域の流れの影響を受けて、この解より小さくなる。
- 5) 無限に広がる側斜面におけるせん断応力分布の推定値は、鉛直縦断面に作用するせん断力を無視した場合、斜面に垂直な縦断面に作用するせん断力を無視した場合、これらをすべて考慮した場合の順に大きくなり、精度もこの順に高くなる。

最後に、本研究では渦動粘性モデルの限界から、断面内の二次流については考慮することができなかつたが、より精度の高いせん断応力分布を得るためには、この影響を考慮する必要があると思われる。

謝辞：本研究は、文部省科学研究費補助金、試験研究B（代表：村本嘉雄 京大教授）の補助を受けて行った。ここに記して、感謝の意を表す。

参考文献

- 1) リバーフロント整備センター：町と水辺に豊かな自然をⅡ，山海堂，pp.138-147, 1992.
- 2) 江頭進治，黒木幹男，澤井健二，山坂昌成：開水における河床せん断力の推定法，水理講演会論文集，第32回，pp.503-521, 1988.
- 3) Lundgren, H. and Jonsson, G.: Shear and velocity distribution in shallow channels, *Proc. ASCE*, Vol.90, HY1, pp.1-21, 1964.
- 4) Gohsh, S. N. and Roy, N.: Boundary shear distribution in open channel flow, *Proc. ASCE*, Vol.96, HY4, pp. 967-994, 1970.
- 5) 富永晃宏，江崎一博，禰津家久：台形断面開水路の三次元乱流構造に関する実験的研究，土木学会論文集，No.381/Ⅱ-7, pp.55-63, 1987.
- 6) 福岡捷二，西村達也，三宮 武，藤原 剛：緩傾斜河岸を設置した河道彎曲部の流れと河床形状，土木学会論文集，No.509/Ⅱ-30, pp.155-167, 1995.
- 7) 杉山 均，秋山光庸，亀澤正之：台形断面を有する三次元開水路流れの乱流構造解析，土木学会論文集，No.527/Ⅱ-33, pp.27-36, 1995.
- 8) Ikeda, S. and Kikkawa, H.: Secondary circulation in straight canals, *Report of Depart. Found. Engrg., Saitama Univ.*, Vol.6, pp.1-13, 1976.
- 9) 山坂昌成：台形断面水路における壁面せん断応力分布，土木学会年次学術講演会講演概要集，第48回，第Ⅱ部，pp.674-675, 1993.
- 10) 池田駿介，泉 典洋：浮遊砂の横断方向拡散係数について，土木学会論文集，No.434/Ⅱ-16, pp.47-55, 1991.
- 11) 山坂昌成，池田駿介，酒寄建之：一様湾曲流路の流れの三次元解析，土木学会論文集，No.411/Ⅱ-12, pp.99-108, 1989.

(1996. 2. 8 受付)

VELOCITY AND BOUNDARY SHEAR STRESS DISTRIBUTION IN TRAPEZOIDAL UNIFORM CHANNELS WITH MILD SIDE WALLS

Masashige YAMASAKA

Recently, a variety of plane forms and cross-sectional forms are applied to river designing in order to introduce a lot of naturalization to river environments. One of them is milder lateral slopes of side banks. In the present study, velocity and boundary shear stress distribution in trapezoidal uniform channels with mild side walls are derived analytically, with the eddy viscosity which depend on local water depth and shear velocity. Calculated velocity distribution is compared with observed data of laboratory experiment. Calculated boundary shear stress distributions are compared with simple methods, which are called vertical depth method and normal depth method.