

# 流域地形特性を考慮した分布型流出モデルの確率応答に関する研究

早川博<sup>1</sup>・藤田睦博<sup>2</sup>・内島邦秀<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 北見工業大学助手 工学部土木開発工学科 (〒090 北海道北見市公園町165番地)

<sup>2</sup>正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 北海道札幌市北区北13条西8丁目)

<sup>3</sup>正会員 博(工) 北見工業大学助教授 工学部土木開発工学科 (〒090 北海道北見市公園町165番地)

降雨-流出過程は、(a)降雨量の時-空間変動、(b)流出場の地形特性の空間変動、(c)流出場の土壌湿潤度等の初期状態の時-空間変動、の影響を受けるため、確率論的な取り扱いが有用である。本研究は降雨-流出現象を確率微分方程式で記述し、降雨と流域場の初期状態が定常状態で、流域地形量が確率変動する場合の流出量の確率応答を調べ、流量の平均値と分散を求める理論式を誘導した。また、課題とされてきた分布型流出モデルの最適なサブ流域スケールを検討するため、流出量の確率応答と流域の分割数、或いはサブ流域のサイズとの関係について検討した。

**Key Words :** channel network geomorphology, storage function model, stochastic response, basin scale

## 1. はじめに

降雨-流出過程は、降雨を流量に変換する場である流域の特性と、入力である降雨そのものの特性に支配されている。流域は、降雨を直接流量に変換する斜面域と斜面域からの流出量を合成・運搬する河道域に大別できる。流域はまた、一組の斜面と河道からなるサブ流域の集合体であり、その空間的配置を表すのが河道網構造である。図-1の河道網において、水源~合流点、合流点~合流点間の河道をリンクと呼び、水源~合流点間の河道を外部リンク、合流点~合流点の河道を内部リンクと区別することもある。水源を有する外部リンクの個数がマグニチュードとも呼ばれる。流域が小さい場合、地形構造、地質や植生等の流域地形特性はほぼ均質とみなすことができるが、流域が次第に大きくなるに連れて流域の特性量は空間的に変動している。一方、降雨も、レーダー雨量計による観測等から降雨強度が時間的・空間的に変動していることが容易に理解できる。つまり、流出量は、大別すると

- (a) 入力である降雨量の時-空間変動
- (b) 地形・地質・植生などによる流出パラメータの空間変動
- (c) 流域の土壌湿潤度などの場の初期条件の時-空間変動

の影響を受けている。したがって、降雨-流出過程における流出量の変動特性は、決定論的な取り扱いでなく確率論的な取り扱いが必要になる。このような観点から、流出系を記述している微分方程式は確率微分方程

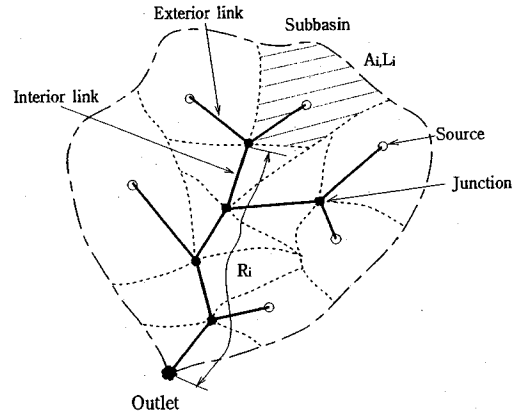


図-1 流域の概要

式として解釈されるべきである<sup>1)</sup>。この確率微分方程式を上記の変動特性と対応させると、

- (a) 強制項が確率過程
- (b) 微分方程式の係数が確率過程
- (c) 初期条件が確率過程

となる。降雨-流出現象の確率応答はこの3つの確率過程が相互に関係しているので、実際問題として、この3項目を同時に考慮した検討はかなり難しい。そのため、最初のアプローチとしては、各々の確率過程と流出特性の関係を評価しておくことが、確率応答の全体像を解明する上で近道である。すでに藤田・工藤ら<sup>2)</sup>は本邦で広く用いられている貯留関数法を用い、上記の(b)と(c)を定常とにおいて、(a)の強制項である降雨の

時・空間変動による流出量の確率応答について検討している。本研究はこの藤田らの手法を (a) の降雨と (c) の初期条件が定常で、(b) の微分方程式の係数が確率過程である場合に拡張し、流出量の確率応答について考察するものである。なお、(c) の流域の場の初期条件が変動することによる流量の確率応答は、(a)、(b) に比べると従属的な要因と考えられるので、最後に検討することになる。

(b) の項目は分布型の流出モデルを想定すると、流出モデルのパラメータが確率変動する場合に相当する。分布型流出モデルは流域を図-1 のように数多くのサブ流域に分割し、サブ流域での降雨から流出への変換モデルと、サブ流域からの流出量  $q_i(t)$  を運搬・合成して流域全体の流出量  $Q_n(t)$  を算定する河道モデルとから成っている。流域が  $n$  個のサブ流域から構成されている場合、 $Q_n(t)$  は一般に次式で表される。

$$Q_n(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t - \tau_i) \quad (1)$$

ここで、 $\tau_i$  は  $i$  番目のサブ流域からの流出の遅れ時間である。式 (1) は河道の流れを線形とする場合のモデルで、 $Q_n(t)$  の第一近似として十分である。これまで提案されている分布型流出モデルも、その基本形は式 (1) に集約できよう。一般に、各サブ流域の面積や勾配、その他地質・植生など流出に関係する要素は各々異なっており、この流出モデルに含まれるパラメータがサブ流域毎に異なることになる。つまり、流出パラメータを記述する確率密度関数が与えられると、サブ流域からの流出量の確率応答が得られることになる。

一方、流出量が各サブ流域から流域末端までの河道を流下する時間を流出の遅れ時間  $\tau_i$  とすると、遅れ時間の変動は図-1 に示すようにサブ流域から流域の出口までの河道長  $R_i$  の確率分布に支配される。この河道長の変動は河道網構造に規定されているので、サブ流域の分割数と同じ流域でも、流出ハイドログラフは河道網のパターンに応じて多種多様な流出形態となる<sup>3)</sup>。したがって、式 (1) の遅れ時間  $\tau_i$  の確率変動が河道網パターンの変動による流出の確率変動を表すことになる。

この河道網構造と流出特性の関係を解明するには河道網の定量化が不可欠である。河道網の定量化に関する研究としては Horton, Strahler の河道位数理論<sup>4)</sup> と Shreve のリンク-マグニチュード方式の河道網理論<sup>5)</sup> を基に、多くの研究者によって流域地形量の確率特性が明らかにされてきた<sup>6~9)</sup>。この流域地形特性量と流出量を結びつけた研究として、河道位数理論の流域地形量を取り入れた Geomorphologic Instantaneous Unit Hydrograph (GIUH) モデル<sup>10)</sup> が良く知られている。また、Gupta and Mesa<sup>11)</sup> は流域幾何形状を確率的に表現する "Width function" と "Concentration function" を提

案し、この関数を用いて流量の平均値を理論的に導いている。しかしながら、まだ流域地形特性量と流出特性の関係が明らかになったとは言い難く、河道網構造の理論的な取扱いの困難さから、シミュレーションによる検討に頼らざるを得ない面もある<sup>12)</sup>。本研究はリンク-マグニチュード方式の河道網理論を用いて河道網の変動特性も理論的に取り扱い、サブ流域の流出量の確率応答と組み合わせて流域全体からの流出量の確率応答を導くものである。尚、今回は流出量の平均値と分散の理論解を示す。

## 2. サブ流域からの流出量の確率応答

流域はサブ流域の集合体であり、サブ流域の空間的な配置が河道網構造を表している。流域末端における流出量  $Q_n(t)$  は式 (1) に示されるように各サブ流域の流出量  $q_i(t)$  を河道網構造に従って集水・合成したものである。流域をサブ流域に分割する方法としては、図-1 のように河道網の構造に従って分割するのが自然であり、その結果、分割されたサブ流域の面積  $A_i$  とそれに付随する河道長  $L_i$  等の地形量は、確率変動している。サブ流域からの流出量  $q_i$  は流出パラメータがこの地形量によって規定されるので、当然、確率変動することになる。本章はサブ流域の流出モデルに本邦で広く用いられている貯留関数法を適用し、貯留係数がサブ流域の流域面積  $A_i$  の関数であると仮定して、流出量の平均値と分散を理論的に導く。

### (1) 基礎理論

流域の貯留量と流量の関係は、一般に2価関数性を示すことが知られている。本研究では流出解析や流出予測で実績のある星の貯留関数法<sup>13)</sup>を採用した。星モデルは貯留-流量関係の2価関数性を表現するために、式 (3) のように流出量の微分項を付加した2価の非線形貯留方程式を提案している。

$$\frac{dS}{dt} + q = r \quad (2)$$

$$S = K_1 q^{P_1} + K_2 \frac{dq^{P_2}}{dt} \quad (3)$$

ここで、 $K_1, K_2$ : 貯留係数、 $P_1, P_2$ : 貯留指数、 $q$ : 流出量 (流出高: mm/hr)、 $S$ : 貯留量 (貯留高: mm) である。本研究ではこの貯留係数  $K_1, K_2$  が流域面積  $A_i$  の関数であると仮定しているが、ここではまず、貯留係数が一般に不規則関数である場合についての基礎理論を展開する。当然、流出量  $q$  もまた不規則関数となるので、各々の変数を以下の様に平均値と平均値からの偏差に分けて考える。

$$K_1 = \bar{K}_1 + K'_1 \quad E[K'_1] = 0 \quad (4)$$

$$K_2 = \bar{K}_2 + K'_2 \quad E[K'_2] = 0 \quad (5)$$

$$K_2 = \bar{K}_2 + K'_2 \quad E[K'_2] = 0 \quad (5)$$

$$q = \bar{q} + q' \quad E[q'] = 0 \quad (6)$$

貯留係数  $K_1, K_2$  の統計量を次のように与える。

$$E[K_1'^2] = \sigma_{K_1}^2 \quad E[K_2'^2] = \sigma_{K_2}^2 \quad (7)$$

$$E[K_1'^3] = \mu_{3K_1} \quad E[K_2'^3] = \mu_{3K_2} \quad (8)$$

$$E[K_1'^4] = \mu_{4K_1} \quad E[K_2'^4] = \mu_{4K_2} \quad (9)$$

式 (3) の非線形貯留方程式の非線形項であるベキ乗型の確率変数  $q^{P_1}, q^{P_2}$  は藤田ら<sup>2)</sup> の手法と同様に次のように線形近似する。

$$(\bar{q} + q')^{P_1} = \alpha_1 \bar{q} + \beta_1 q' \quad (10)$$

$$(\bar{q} + q')^{P_2} = \alpha_2 \bar{q} + \beta_2 q' \quad (11)$$

係数  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  は, Bras ら<sup>14)</sup> が提案した上式の両辺の誤差の平均値を 0 に, また分散を最小にする条件から, 次のように決定する。

$$\alpha_i = \bar{q}^{P_i-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} P_i (P_i - 1) \frac{E[q'^2]}{\bar{q}^2} + \frac{1}{6} P_i (P_i - 1) (P_i - 2) \frac{E[q'^3]}{\bar{q}^3} + \dots \right\} \quad (12)$$

$$\beta_i = \frac{\bar{q}^{P_i+1}}{E[q'^2]} \left\{ P_i \frac{E[q'^2]}{\bar{q}^2} + \frac{1}{2} P_i (P_i - 1) \frac{E[q'^3]}{\bar{q}^3} + \frac{1}{6} P_i (P_i - 1) (P_i - 2) \frac{E[q'^4]}{\bar{q}^4} + \dots \right\} \quad (13)$$

$$(i = 1, 2)$$

次に, 式 (3)~(6) を用いて, 式 (2) を書き直す。ここで, 今後の式の展開を容易にするため, 次の変数変換を行う。

$$\bar{y} = \alpha_2 \bar{q}, \quad y' = \beta_2 q' \quad (14)$$

その結果, 式 (2) は次式で表される。

$$\frac{d^2}{dt^2} \{ (\bar{K}_2 + K'_2)(\bar{y} + y') \} + \frac{d}{dt} \{ (\bar{K}_1 + K'_1) \times \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{y} + \frac{\beta_1}{\beta_2} y' \right) \} + \frac{\bar{y}}{\alpha_2} + \frac{y'}{\beta_2} = r \quad (15)$$

式 (15) の期待値をとると

$$\frac{d^2}{dt^2} \{ \bar{K}_2 \bar{y} + E[K'_2 y'] \} + \frac{d}{dt} \left\{ \bar{K}_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{y} + \frac{\beta_1}{\beta_2} E[K'_1 y'] \right\} + \frac{\bar{y}}{\alpha_2} = r \quad (16)$$

となる。さらに, 式 (15) から式 (16) を差し引くと

$$\frac{d^2}{dt^2} \{ \bar{K}_2 y' + K'_2 \bar{y} + K'_2 y' - E[K'_2 y'] \} + \frac{d}{dt} \left\{ \bar{K}_1 \frac{\beta_1}{\beta_2} y' + K'_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{y} + K'_1 \frac{\beta_1}{\beta_2} y' - \frac{\beta_1}{\beta_2} E[K'_1 y'] \right\} + \frac{y'}{\beta_2} = 0 \quad (17)$$

となる。式 (16), (17) はさらに変形でき, 以下のようになる。

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} + f_1(t) \frac{d\bar{y}}{dt} + g_1(t) \bar{y} = h_1(t) \quad (18)$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + f_2(t) \frac{dy'}{dt} + g_2(t) y' = h_2(t) \quad (19)$$

ここで,

$$f_1(t) = \frac{\bar{K}_1}{\bar{K}_2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (20)$$

$$g_1(t) = \frac{1}{\bar{K}_2} \left\{ \bar{K}_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \right\} \quad (21)$$

$$h_1(t) = \frac{1}{\bar{K}_2} \left[ r - \frac{d^2}{dt^2} E[K'_2 y'] - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} E[K'_1 y'] \right\} \right] \quad (22)$$

$$f_2(t) = \frac{\bar{K}_1}{\bar{K}_2} \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad (23)$$

$$g_2(t) = \frac{1}{\bar{K}_2} \left\{ \bar{K}_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) + \frac{1}{\beta_2} \right\} \quad (24)$$

$$h_2(t) = \frac{1}{\bar{K}_2} \left[ \frac{d^2}{dt^2} \{ E[K'_2 y'] - K'_2 \bar{y} - K'_2 y' \} + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} E[K'_1 y'] - K'_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{y} - K'_1 \frac{\beta_1}{\beta_2} y' \right\} \right] \quad (25)$$

である。

## (2) 流出量の平均値

式 (16) あるいは式 (18) が流出量の平均値を与える基本式になっている。これを解くためには  $E[K'_1 y']$ ,  $E[K'_2 y']$  の値が必要となる。この値は式 (17) に  $K'_1, K'_2$  を乗じて期待値をとることによって得られる。これらの式を解くためにはさらに高次の相関係数  $E[K'_1{}^i y']$ ,  $E[K'_2{}^j y']$ ,  $E[K'_1{}^i K'_2{}^j y']$  が必要になる。いま, この4次以上の相関係数を無視して流量の平均値を求めよう。数式の表現を簡略化するために以下の式を定義する。

$$X_i = E[K'_1{}^i y'] \quad (26)$$

$$Y_i = E[K'_2{}^i y'] \quad (27)$$

$$Z_{ij} = E[K'_1{}^i K'_2{}^j y'] \quad (28)$$

$$W_{ij} = E[K'_1{}^i K'_2{}^j] \quad (29)$$

式 (17) に  $K'_1, K'_2, K_1'^2, K_2'^2, K_1' K_2', K_1'^3, K_2'^3, K_1'^2 K_2'$  と  $K_1' K_2'^2$  を掛けて整理した結果,  $X_i, Y_i, Z_{ij}$  は以下のようになる。

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + f_2(t) \frac{dX}{dt} + g_2(t) X = \frac{1}{\bar{K}_2} \left[ \frac{d^2}{dt^2} \{ B_1 Y_1 - B_2 \bar{y} - B_3 \} + \frac{d}{dt} \left\{ B_4 \frac{\beta_1}{\beta_2} X_1 - B_5 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{y} - B_6 \frac{\beta_1}{\beta_2} \right\} \right] \quad (30)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_{11} \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_{21} \\ Z_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{K_1}^2 \\ \sigma_{K_2}^2 \\ W_{11} \\ \mu_3 K_1 \\ \mu_3 K_2 \\ W_{21} \\ W_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} W_{11} \\ \sigma_{K_2}^2 \\ W_{21} \\ \mu_3 K_2 \\ W_{12} \\ W_{31} \\ \mu_4 K_2 \\ W_{22} \\ W_{13} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Y_2 \\ Z_{21} \\ Y_3 \\ Z_{12} \\ Z_{31} \\ Y_4 \\ Z_{22} \\ Z_{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} \sigma_{K_1}^2 \\ W_{11} \\ \mu_3 K_1 \\ W_{12} \\ W_{21} \\ \mu_4 K_1 \\ W_{13} \\ W_{31} \\ W_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Z_{11} \\ X_3 \\ Z_{12} \\ Z_{21} \\ X_4 \\ Z_{13} \\ Z_{31} \\ Z_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

である。したがって、流出量の平均値 $\bar{y}(t)$ は式(16)と式(30)の連立微分方程式の解として与えられる。その結果、サブ流域の流出量の平均値 $\bar{q}(t)$ は、式(14)の関係から次式となる。

$$\bar{q}(t) = \frac{\bar{y}(t)}{\alpha_2(t)} \quad (31)$$

### (3) 流出量の分散

式(19)の2階微分方程式は変数 $y'_1$ を導入することによって、以下のような $y'$ と $y'_1$ に関する連立一階微分方程式に書き直すことができる。この式形は $y'_1, y'$ の一般解を導くことが容易である。

$$\frac{dy'_1}{dt} + f_3(t)y'_1 = h_2(t) \quad (32)$$

$$\frac{dy'}{dt} + g_3(t)y' = y'_1 \quad (33)$$

この際に、解の一般性を確保するために上式の係数 $f_3(t), g_3(t)$ は複素数として扱う。

$$f_3(t) = F + iG \quad (34)$$

$$g_3(t) = H + iI \quad (35)$$

$i$ : 虚数単位

式(34), (35)を式(32), (33)に代入し、式(19)の係数と比較することによって、次の関係式を得る。

$$\frac{dH}{dt} + FH - GI = g_2(t) \quad (36)$$

$$\frac{dI}{dt} + GH + FI = 0 \quad (37)$$

$$H + F = f_2(t) \quad (38)$$

$$G + I = 0 \quad (39)$$

式(32), (33)の $y'_1, y'$ も複素数として定義しているの、次の関係がある。

$$y'_1 = \text{Re}\{y'_1\} + i\text{Im}\{y'_1\} \quad (40)$$

$$y' = \text{Re}\{y'\} + i\text{Im}\{y'\} \quad (41)$$

ここに、 $\text{Re}\{ \}; \text{Im}\{ \}$ は、複素数の実部と虚部を示す。式(32), (33)の一般解は容易に得られ、次式となる。

$$y'_1 = \{C(t) + iS(t)\}e^{-\int F d\tau_1} \times \int^t h_2(\tau_2)\{C(\tau_2) - iS(\tau_2)\}e^{\int F d\tau_3} d\tau_2 \quad (42)$$

$$y' = \{C(t) - iS(t)\}e^{-\int H d\tau_1} \int^t [\text{Re}\{y'_1(\tau_2)\} + i\text{Im}\{y'_1(\tau_2)\}]\{C(\tau_2) + iS(\tau_2)\}e^{\int H d\tau_3} d\tau_2 \quad (43)$$

ここで,

$$C(t) = \cos \left\{ \int^t I d\tau \right\} = \cos \left\{ \int^t G d\tau \right\} \quad (44)$$

$$S(t) = \sin \left\{ \int^t I d\tau \right\} = -\sin \left\{ \int^t G d\tau \right\} \quad (45)$$

である。式(42), (43)は実部と虚部に分解することができ、整理して示すと以下ようになる。

$$\text{Re}\{y'_1\} = C(t)W_1(t) + S(t)W_2(t) \quad (46)$$

$$\text{Im}\{y'_1\} = S(t)W_1(t) - C(t)W_2(t) \quad (47)$$

$$\text{Re}\{y'\} = C(t)W_3(t) + S(t)W_4(t) \quad (48)$$

$$\text{Im}\{y'\} = -S(t)W_3(t) + C(t)W_4(t) \quad (49)$$

ここで,

$$W_1(t) = e^{-\int^t F d\tau_1} \int^t h_2(\tau_2)C(\tau_2)e^{\int^{\tau_2} F d\tau_3} d\tau_2 \quad (50)$$

$$W_2(t) = e^{-\int^t F d\tau_1} \int^t h_2(\tau_2)S(\tau_2)e^{\int^{\tau_2} F d\tau_3} d\tau_2 \quad (51)$$

$$W_3(t) = e^{-\int^t H d\tau_1} \int^t [\{C(\tau_2)^2 - S(\tau_2)^2\}W_1(\tau_2) + 2C(\tau_2)S(\tau_2)W_2(\tau_2)]e^{\int^{\tau_2} H d\tau_3} d\tau_2 \quad (52)$$

$$W_4(t) = e^{-\int^t H d\tau_1} \int^t [-\{C(\tau_2)^2 - S(\tau_2)^2\}W_2(\tau_2) + 2C(\tau_2)S(\tau_2)W_1(\tau_2)]e^{\int^{\tau_2} H d\tau_3} d\tau_2 \quad (53)$$

である。したがって、流出量の分散 $\sigma_y^2$ は式(41)を2乗して、その期待値をとることによって得られる。今、式(36)~(39)は、式(33)の $y'$ が実数となる条件式であるので、式(49)の $\text{Im}\{y'\}$ は常に0となる。このことを考慮すると、流出量の分散は

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[y'^2] = E[\text{Re}^2\{y'\}] \\ &= E[W_3(t)^2] + E[W_4(t)^2] \quad (54) \end{aligned}$$

となる。上式の  $E[W_3(t)^2]$  と  $E[W_4(t)^2]$  は式 (50)~(53) から求まり、結果のみを以下に整理して示す。

$$\begin{aligned} E[W_3(t)^2] = & \frac{C(t)^2}{\bar{K}_2^2} [\sigma_{K_2}^2(U_{17} + 2U_{20})^2 \\ & + 2W_{11}(U_{17} + U_{20})(U_{33} + U_{36}) \\ & + \sigma_{K_1}^2(U_{33} + 2U_{36})^2 - (U_{21} + U_{37})^2 \\ & + 2(U_{17} + 2U_{20})(U_{25} + 2U_{28} + U_{45} + 2U_{48}) \\ & + 2(U_{33} + 2U_{36})(U_{29} + 2U_{32} + U_{41} + 2U_{44}) \\ & - 4(U_{24} + U_{40})(U_{21} + U_{24} + U_{37} + U_{40})] \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[W_4(t)^2] = & \frac{S(t)^2}{\bar{K}_2^2} [\sigma_{K_2}^2(U_{19} + 2U_{18})^2 \\ & + 2W_{11}(2U_{18} - U_{19})(2U_{34} - U_{35}) \\ & + \sigma_{K_1}^2(U_{35} - 2U_{34})^2 - (U_{23} + U_{34})^2 \\ & - 2(2U_{18} - U_{19})(2U_{26} - U_{27} + 2U_{46} - U_{47}) \\ & - 2(2U_{34} - U_{35})(2U_{30} - U_{31} + 2U_{42} - U_{43}) \\ & - 4(U_{22} + U_{38})(U_{22} - U_{23} + U_{38} - U_{39})] \quad (56) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{dU_{2i-1}}{dt} + FU_{2i-1} = D_i C(t) \quad (57)$$

$$\frac{dU_{2i}}{dt} + FU_{2i} = D_i S(t) \quad (58)$$

$$\begin{aligned} D_i = & \left[ \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2}, \frac{d^2 Y_1}{dt^2}, \frac{d^2 Y_2}{dt^2}, \frac{d^2 Z_{11}}{dt^2}, \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{y} \right\}, \right. \\ & \left. \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} X_1 \right\}, \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} X_2 \right\}, \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} Z_{11} \right\} \right] \quad (59) \\ & (i = 1 \sim 8) \end{aligned}$$

$$\frac{dU_{15+2j}}{dt} + HU_{15+2j} = U_j \{C(t)^2 - S(t)^2\} \quad (60)$$

$$\frac{dU_{16+2j}}{dt} + HU_{16+2j} = U_j C(t) S(t) \quad (61)$$

$(j = 1 \sim 16)$

したがって、サブ流域からの流出量の分散  $\sigma_q^2(t)$  が、次式で与えられる。

$$\sigma_q^2(t) = \frac{\sigma_y^2(t)}{\beta_2(t)^2} \quad (62)$$

#### (4) サブ流域の地形量と貯留係数

星モデルの貯留係数  $K_1$ ,  $K_2$  と貯留指数  $P_1$ ,  $P_2$  は Kinematic Wave 法とのパラメータを比較することにより以下の関係式が得られる<sup>13)</sup>。

$$K_1 = 2.823(N/\sqrt{s})^{0.6} A^{0.24} \quad (63)$$

$$K_2 = 0.2835 K_1^2 \bar{r}^{-0.2648} \quad (64)$$

$$P_1 = 0.6, \quad P_2 = 0.4648 \quad (65)$$

ここに、 $N$ : 等価粗度係数 (m-sec 単位),  $s$ : 斜面勾配,  $\bar{r}$ : 平均降雨強度 (mm/hr) である。貯留係数を流域面積 ( $\text{km}^2$ ) の関数と仮定して、

$$K_1 = a_1 A_i^{b_1}, \quad K_2 = a_2 A_i^{b_2} \quad (66)$$

とおくと、係数は式 (63), (64) から以下ようになる。

$$a_1 = 2.823(N/\sqrt{i})^{0.6}, \quad b_1 = 0.24 \quad (67)$$

$$a_2 = 0.2835 \bar{r}^{-0.2648}, \quad b_2 = 0.48 \quad (68)$$

流域のマグニチュードが  $m$  (サブ流域数  $n$  は  $2m - 1$ ) である場合のサブ流域面積を  $A_i(m)$  とおき、その平均値  $\bar{A}(m)$  と平均値からの偏差  $A'(m)$  に分けて考える。式 (10) と同様に線形近似すると、このときの貯留係数  $K_1(m)$ ,  $K_2(m)$  は、次式となる。

$$K_1(m) = a_1 \{ \nu_1 \bar{A}(m) + \xi_1 A'(m) \} \quad (69)$$

$$K_2(m) = a_2 \{ \nu_2 \bar{A}(m) + \xi_2 A'(m) \} \quad (70)$$

ここで、係数  $a_1$  の等価粗度係数と斜面勾配はマグニチュード、即ち流域のスケールによって若干変化すると考えられるが、本論文では一定値として扱う。また、係数  $\nu_1$ ,  $\xi_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\xi_2$  は式 (12), (13) において、 $\bar{y} \rightarrow \bar{A}(m)$ ,  $q' \rightarrow A'(m)$ ,  $P_1 \rightarrow b_1$ ,  $P_2 \rightarrow b_2$  とおいたときの  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  に各々相当する。したがって、 $K_1(m)$ ,  $K_2(m)$  の 1~4 次モーメントは以下ようになる。

$$\bar{K}_i(m) = a_i \nu_i \bar{A}(m) \quad (71)$$

$$\sigma_{K_i}^2(m) = (a_i \xi_i)^2 \sigma_A^2(m) \quad (72)$$

$$\mu_{3K_i}(m) = (a_i \xi_i)^3 \mu_{3A}(m) \quad (73)$$

$$\mu_{4K_i}(m) = (a_i \xi_i)^4 \mu_{4A}(m) \quad (74)$$

$(i = 1, 2)$

ここで、 $\bar{A}(m)$ ,  $\sigma_A^2(m)$ ,  $\mu_{3A}(m)$  と  $\mu_{4A}(m)$  はサブ流域面積の 1~4 次モーメントで、この統計量を与えることによってサブ流域からの流出量の平均値と分散が計算できる。

また、サブ流域の面積  $A_i$  の確率分布はガンマ分布あるいは対数正規分布に従うことが知られている<sup>15)</sup> ので、本研究ではガンマ分布を採用した。マグニチュードが  $m$  である流域において、サブ流域の面積  $A_i$  の平均値  $\bar{A}(m)$  と分散  $\sigma_A^2(m)$  は次式で表される<sup>16)</sup>。

$$\bar{A}(m) = \frac{A_t}{2m-1} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \sigma_A^2(m) = & \sigma_A^2(m) \left\{ \frac{2m-1}{2m_1-1} \right\} \\ & \times \left\{ 1 + \left( \frac{2m-1}{2m_1-1} - 1 \right) \gamma_A \right\}, m > m_1 \quad (76) \end{aligned}$$

ここで、 $A_t (\text{km}^2)$  は全流域面積である。式 (76) はこの流域のマグニチュードが  $m$  あるいは  $m_1$  であるときに、サブ流域面積の分散が  $\sigma_A^2(m)$  あるいは  $\sigma_A^2(m_1)$  である場合の分散の関係式で、 $\gamma_A$  がサブ流域間の相関係数を表している。 $\gamma_A$  は流域によって値が異なるものの、ほぼ 0.7 程度である<sup>16)</sup>。ガンマ分布は平均値と分散が与えられると、分布形の形状パラメータ  $\lambda_A(m)$  と縮尺パラメータ  $\kappa_A(m)$  が決まり、 $A_i$  の 3, 4 次モーメントが以下ようになる。

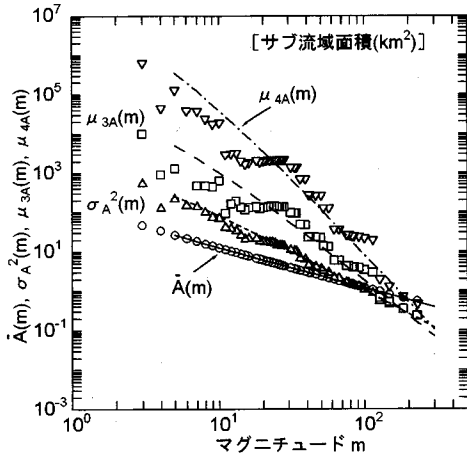


図-2 マグニチュードとサブ流域面積の統計量

$$\lambda_A(m) = \frac{\bar{A}(m)}{\sigma_A^2(m)}, \quad \kappa_A(m) = \frac{\bar{A}^2(m)}{\sigma_A^2(m)} \quad (77)$$

$$\mu_{3A}(m) = \frac{2\kappa_A(m)}{\lambda_A(m)^3} \quad (78)$$

$$\mu_{4A}(m) = \frac{3\kappa_A(m)(\kappa_A(m) + 2)}{\lambda_A(m)^4} \quad (79)$$

図-2 は国土数値情報の 250mDEM から作成した擬河道網を解析して得た、渚滑川の上流部滝上流量観測所流域 ( $A_t=237.6\text{km}^2$ ) のマグニチュード  $m$  に対する全サブ流域の流域面積  $A_i(m)$  の 1~4 次モーメントの関係を示している。また、図には式 (75)~(79) の 1~4 モーメントの理論値も併記しているが、高次モーメントにおいてマグニチュードが小さい場合に若干違いが認められるもののこの理論式の適合性は高い。したがって、これ以降の検討ではサブ流域の地形量特性としてこの理論式を用いる。

### (5) シミュレーションによる理論解の検証

前節までに誘導したサブ流域の流出量  $q_i(t)$  の平均値と分散の理論解は式 (10),(11) 等で高次モーメントを無視した近似式を用いて誘導されたものである。この近似式の精度によって流量の負の分散が生じてしまう等の不都合が起き、理論解の精度に影響するであろう。したがって、シミュレーション法によってこの理論解の妥当性を吟味する。なお、ここでは理論解の検証を目的としているので、今回は特定の流域を対象とせず仮想的流域を想定したシミュレーションをする。

計算条件は次の通りである。仮想流域は流域面積を  $A_t=200(\text{km}^2)$  において、サブ流域面積の統計量を式 (75)~(79) の理論式から求める。ここで、サブ流域の分散はサブ流域間の相関係数  $\gamma_A$  を 0.7 とおき、マグニ

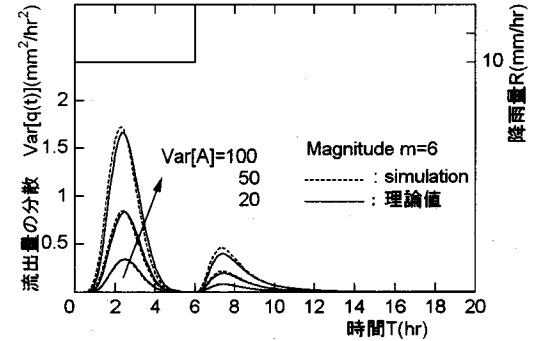
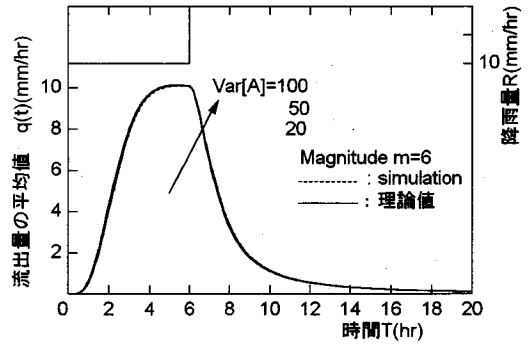


図-3 理論値とシミュレーション値の比較 (流出高表示) (上図:流量の平均値, 下図:流量の分散)

チュードが小さい  $m_1$  の場合の分散  $\sigma_A^2(m_1)$  を既知として、マグニチュード  $m$  を次第に大きくした場合の分散  $\sigma_A^2(m)$  を求めた。今回は  $m_1=6$  のときのサブ流域面積の分散として、 $\sigma_A^2(m_1)=100, 50, 20(\text{km}^4)$  の 3 通りの分散を与えた。また、式 (63) の  $K_1$  に含まれる等価粗度  $N$  と斜面勾配  $s$  の比を  $f_c = N/\sqrt{s}$  とおき、今回は  $f_c = 1.0$  の一定値とした。

検証に用いる降雨量は、降雨強度  $R_p=10(\text{mm/hr})$ 、降雨継続時間  $t_r=6(\text{hr})$  の矩形波降雨である。工藤・藤田<sup>17)</sup>が指摘しているようにこの矩形波降雨は理論解の検証に最適で、かつ厳しい条件である。つまり、本論文で提案した流出量の平均値、分散の理論式は、高次モーメントを無視した一種の近似式であるので、近似の程度によっては実際の降雨波形に近い三角降雨に比して負の分散が容易に得られることになる。一方、シミュレーションは、与えられたサブ流域面積の統計量からガンマ分布関数を定め、この分布に従う 10,000 組のサブ流域面積をランダムに発生させて、流出量の平均値と分散を求めている。なお、サブ流域面積同士は互いに独立の条件で乱数を発生させた。

図-3 はマグニチュードが  $m = 6$  の場合について、サブ流域からの流出量  $q_i$  の平均値、分散を流出高表示で比較したものである。実線が理論解、破線がシミュ

レーション結果を示している。サブ流域面積の分散が大きい場合に流出量の分散はややシミュレーション結果と差があるものの、理論解は十分満足できる範囲にある。ところで、実流域の流出解析結果をみると、 $f_c$ は $f_c > 1.0$ となる場合が多いようである<sup>13)</sup>。 $f_c > 1.0$ の場合には $K_1$ が大きくなるので、一般に流出現象が遅くなることを表している。今回と同じ計算条件で別途 $f_c$ だけを5.0程度まで変化させてみると、流出量の平均値、分散共にシミュレーションと理論解の適合度は概ね同程度であった。

また、サブ流域面積の分散が大きいときにシミュレーション結果と違いが生じているのは、藤田・工藤ら<sup>2)</sup>も指摘しているように、式(69),(70)のべき乗関数を線形近似した際の係数 $\nu_i, \xi_i$  ( $i=1,2$ )の近似式(式(12),(13)に相当)の精度の問題であろう。この線形近似は式(10),(11)の流出量でも行っているが、図-3に示した流出量の平均値は $\alpha$ 、 $\beta$ を第1項までしか考えていないにもかかわらず、シミュレーション結果との対応は良好である。つまり流出量の2次モーメント以上の影響が小さいことを示している。これに対し、式(69),(70)の方はサブ流域面積のべき乗関数の非線形性が強いこともあり、近似式の精度が問題になった。今回はサブ流域面積の $\nu$ を第2項まで、 $\xi$ を第3項まで展開することによって流出量の誤差を最小にしている。理論式の誘導過程で高次の項を省略しているので、今後流出量の3次、4次モーメントを誘導する際には省略した項の再検討が必要になる。

次に、図-3は流出高表示であるので、流出量に対するサブ流域の流域面積の変動の影響が判り難く、流出量を流量( $\text{m}^3/\text{sec}$ )で表示した方が都合が良い。サブ流域からの流出高を $q_i(t)$ ( $\text{mm}/\text{hr}$ )、面積を $A_i$ ( $\text{km}^2$ )とすると、流量 $q_{si}(t)$ ( $\text{m}^3/\text{sec}$ )表示は

$$q_{si}(t) = \frac{1}{3.6} A_i \cdot q_i(t) \quad (80)$$

になる。ここで、サブ流域面積 $A_i$ を平均値と平均値からの偏差に分けて考えると、上式は

$$\bar{q}_s(t) + q'_s(t) = \frac{1}{3.6} (\bar{A} + A') \{ \bar{q}(t) + q'(t) \} \quad (81)$$

となる。上式の期待値をとると、サブ流域からの流量の平均値 $\bar{q}_s(t)$ は次式となる。

$$\bar{q}_s(t) = \frac{1}{3.6} (\bar{A} \bar{q}(t) + E[A'q'(t)]) \quad (82)$$

また、流量の分散 $\sigma_{q_s}^2(t)$ は、式(81)と式(82)の差である $q'_s(t)$ を2乗して期待値をとることによって得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{q_s}^2(t) = & \frac{1}{3.6^2} (\bar{A}^2 \sigma_q^2(t) + \sigma_A^2 \bar{q}(t)^2 + E[A'^2 q'(t)^2] \\ & - E[A'q'(t)]^2 + 2\bar{A} \bar{q}(t) E[A'q'(t)] \\ & + 2\bar{q}(t) E[A'^2 q'(t)] + 2\bar{A} E[A'q'(t)^2]) \quad (83) \end{aligned}$$

式(82)と(83)の $E[A'q'(t)]$ 、 $E[A'^2 q'(t)]$ 、 $E[A'q'(t)^2]$

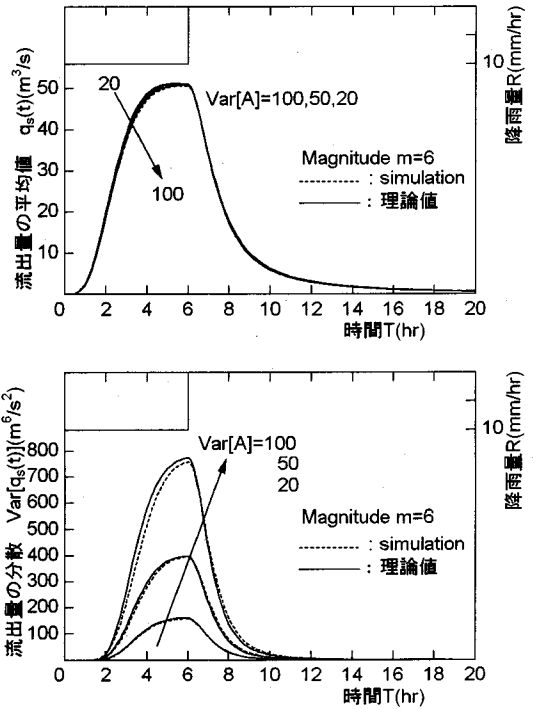


図-4 理論値とシミュレーション値の比較 (流量表示)  
(上図:流量の平均値, 下図:流量の分散)

と $E[A'^2 q'(t)^2]$ の各項は、式(69)と(70)の変動成分である $K'_i(m) = a_i \xi_i A'(m)$  ( $i=1,2$ )の関係をを用いると、以下の関係式が得られる。

$$E[A'(m)q'(t)] = \frac{E[K'_i(m)q'(t)]}{a_i \xi_i}, \quad i=1,2 \quad (84)$$

他の項も同様にして求めるが、本研究では平均値、分散を求める際に $E[K'_i q']$ 等を未知数として解いているので、上式の関係から $E[A'q']$ 等が得られる。また、上式を式(26)等に代入して $E[A'q']$ 等を未知数として解くこともできる。

図-4が流量表示のサブ流域からの流出量 $q_s(t)$ の平均値と分散である。図-3と比較すると、流量の平均値は面積の分散が大きくなるにつれ流量のピーク値がやや低くなるのが判る。また、分散は式(83)の第2項以降の項が付加されるため、図-3と比べるとかなり異なっている。中でも第2項の $\sigma_A^2 \bar{q}(t)^2$ が支配的である。シミュレーション結果と比較すると、面積の分散が大きい場合にやや差が見られるが、これは図-3の $q(t)$ による誤差の影響と考えられる。以上の結果から、サブ流域からの流出量の理論解は十分実用に供するものと判断できる。

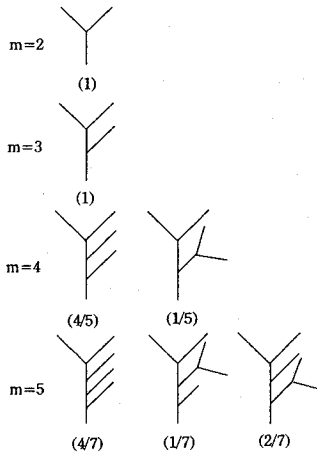


図-5 河道網配列パターンと生起確率

### 3. 河道網を考慮した流出量の確率応答

本章は河道網によるサブ流域からの流出量の集水過程を考え、河道網のパターンが確率変動する場合の流出量の確率応答を導く。

#### (1) 河道網構造の定量化

河道網構造の定量化については既に述べたようにいくつかの研究があるが、本論文では Shreve のリンク-マグニチュード方式の河道網理論<sup>5)</sup>を採用した。図-5の河道網は Ambilateral class と呼称される区分方法<sup>6)</sup>で、流出解析では左右支川の区別がほとんど影響しないため、河道網のパターン数を減らすことにもなる。なお、図中の ( ) の数値は、河道網パターンの生起確率を示している。いま、図-6 に示すように任意のマグニチュード  $m$  の河道網において、最下流の合流点で河道を2つの河道網に分割し、マグニチュードが  $i$  と  $m-i$  の河道網となる確率を  $P(i, m)$  とする。藤田<sup>8)</sup>によると、 $P(i, m)$  は次式で与えられる。

$$\begin{cases} P(i, m) = \frac{2(2i-3)!m!(m-2)!(2m-2i-2)!}{i!(i-2)!(m-i)!(2m-3)!(m-i-1)!} \\ \quad , 2 \leq i \leq [m/2], m \neq 2n, [ ] : \text{ガウス記号} \\ P(n, 2n) = \frac{8n}{(4n-2)!} \left\{ \frac{(2n-1)!(2n-3)!}{n!(n-2)!} \right\}^2 \\ \quad , m = 2n \\ P(1, m) = \frac{m}{(2m-3)} \end{cases} \quad (85)$$

河道網の集水過程を考える場合、河道網末端から等リンク数遡った所に位置するサブ流域の数を定義しておくことと便利である。いま、 $j$ 本のリンクを遡った所のサブ流域数を  $k_j$  とすると、河道網パターンは  $C_{Nm}(k_1, k_2, \dots, k_j, \dots)$  のように  $k_j$  の連で定義できる。

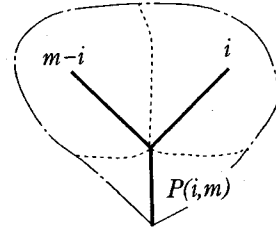


図-6 マグニチュード  $i$  と  $m-i$  からなる河道網パターン

この河道網分類は Path number class と呼称される区分方法<sup>6)</sup>で、本論文ではリンク数の配列パターンと呼ぶことにする。このサブ流域数  $k_j$  は、対象とする河道網のマグニチュード、あるいは河道網パターンによって異なり、確率変動することになる。マグニチュード  $m$  の河道網において、リンク数の配列パターンの生起確率を  $P_c$  とおく。早川・藤田は  $j-1$  番目に位置するリンク数  $M$  と  $j$  番目より上流にあるリンク総数  $S$  が与えられた時に、 $j$  番目のリンク数が  $K$  となる確率分布関数  $F(S, M, K)$  を以下のように定義した<sup>16)</sup>。

$$F(S, M, K) = \frac{(M+S)K}{M \cdot S} \frac{\binom{S}{(S-K)/2} \binom{M}{K/2}}{\binom{M+S}{S/2}} \quad (86)$$

リンク数の配列パターンにこの  $F(S, M, K)$  を適用することによって容易にその生起確率  $P_c$  が得られる。また、この  $k_j$  の期待値  $C(m, j)$  は、先に定義した生起確率  $P(i, m)$  を用いると次式となる。

$$\begin{cases} C(m, j+1) = \sum_{i=1}^{[m/2]} P(i, m) \{C(i, j) + C(m-i, j)\} \\ \quad , 2 \leq j \leq m-1, m \geq 4 \\ C(m, 1) = 1, C(m, 2) = 2, C(m, j) = 0, m < j \end{cases} \quad (87)$$

この式を整理すると、以下の一般式が得られる<sup>16)</sup>。

$$C(m, j) = \frac{2^{j-1} j (m-1)! (2m-j-1)!}{(2m-2)! (m-j)!} \quad (88)$$

この  $C(m, j)$  からなる配列パターンが平均的な河道網パターンということになる(図-7)。マグニチュード  $m$  の河道網は  $(2m-1)$  個のサブ流域から構成されているので、 $C(m, j)$  は次式を満足している。

$$\sum_{i=1}^m C(m, j) = 2m-1 \quad (89)$$

したがって、次式で定義される関数  $G(m, j)$  は、マグニチュード  $m$  の河道網における河道網末端から  $j$  個のリンク数だけ遡った位置にあるサブ流域数の確率密度



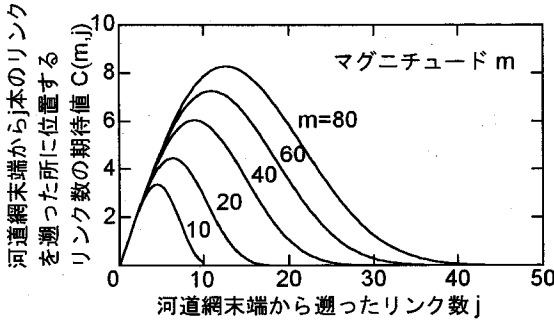


図-7 平均的な河道網パターン  $C(m, j)$

関数と考えることができる。

$$G(m, j) = \frac{C(m, j)}{2m - 1} \quad (90)$$

ここで、 $C(m, j)$  を  $k_j$  に置き換えると、 $G(m, j)$  は各々の河道網パターンに対する確率分布を表すことになる。

次に、式(1)の流出の遅れ時間  $\tau_i$  は、図-1に示すように  $i$  番目のサブ流域から河道網末端にまでに到る河道長を  $R_i$ 、流出波形の伝播速度を  $V$  とおくことによって、次式で定義される。

$$\tau_i = R_i / V \quad (91)$$

伝播速度  $V$  は河道勾配、河道断面や流量等の影響を受けて変動するが、ここでは問題を単純化するために  $V$  は一定速度と仮定した。なお、 $V$  を一定速度とおいた場合<sup>16)</sup>と  $V$  を流量の関数とおいて変動させた場合<sup>12)</sup>の著者らの解析結果を比較すると、 $V$  の影響は流量ハイドログラフの立上り部、あるいは逓減末期の小流量時で見られるものの、全体的に見て両者の流量変動特性の違いは小さい。 $V$  を一定とおいているので、遅れ時間の確率変動は河道網末端までの河道長  $R_i$  の確率変動に置き換えられる。この  $R_i$  は図-1から分かるように、河道網末端から  $i$  番目のサブ流域の出口まで遡ったサブ流域のリンク長の和であるので、サブ流域のリンク長の和の確率分布を考える。図-2と同様にマグニチュードに対するサブ流域のリンク長の統計量は図-8に示されている。リンク長の平均値  $\bar{L}(m)$  の推定式として次式が提案されている<sup>8)</sup>。

$$\bar{L}(m) = \frac{1.273 A_i^{0.6}}{1 + \bar{M}_m} \quad (92)$$

ここで、 $\bar{M}_m$  は本流に合流する支流数の期待値で、次式から計算できる。

$$\bar{M}_m = \sum_{i=1}^{[m/2]} P(i, m) (\bar{M}_{m-i} + 1), \quad m \geq 4 \quad (93)$$

$$\bar{M}_1 = 0, \quad \bar{M}_2 = 1, \quad \bar{M}_3 = 2$$

分散  $\sigma_L^2(m)$  は式(76)において  $\sigma_A^2(m)$  を  $\sigma_L^2(m)$  に置き換えれば良い。いま、リンク長の確率分布を面積と同

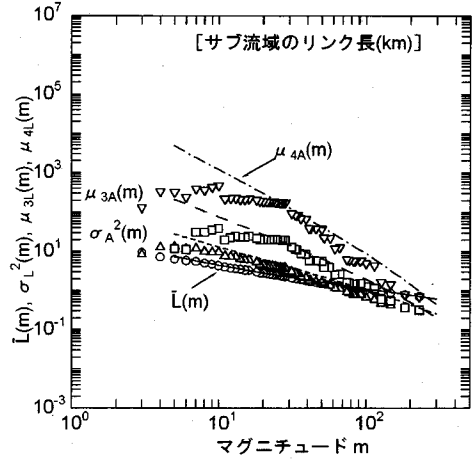


図-8 マグニチュードとサブ流域リンク長の統計量

じくガンマ分布とくと、形状、縮尺パラメータと3,4次モーメントは式(77)~(79)の関係から求めることができる。図中の線群が理論式であるが、ほぼ適合しており、ガンマ分布に近似できることを示している。また、リンク長の分散の推定式(式(76)に相当)の相関係数  $\gamma_L$  が一般の流域ではほぼ0であるので、リンク長は互いに独立な確率分布と考えられる。室田・江藤ら<sup>18)</sup>は互いに独立なガンマ分布の和の分布がガンマ分布で近似できることを示しているので、河道網末端から  $j$  個のリンクを遡った河道長  $R_j$  の確率密度関数  $f_j(R_j)$  は以下のようなになる。

$$f_j(R_j) = \frac{\lambda_{R_j}^{\kappa_{R_j}} R_j^{\kappa_{R_j}-1}}{\Gamma(\kappa_{R_j})} e^{-\lambda_{R_j} R_j} \quad (94)$$

ここで、形状パラメータ  $\lambda_{R_j}$  と縮尺パラメータ  $\kappa_{R_j}$  は、サブ流域のリンク長  $L_i$  の形状パラメータ  $\lambda_L$  と縮尺パラメータ  $\kappa_L$  と以下の関係がある。

$$\lambda_{R_j} = j(j+1)\lambda_L/2, \quad \kappa_{R_j} = \kappa_L \quad (95)$$

したがって、河道長  $R_i$  の確率密度関数  $F_R(R)$  は、式(90)の  $G(m, j)$  と式(94)の  $f_j(R_j)$  を組み合わせることにより次式となる。

$$F_R(R) = G(m, 1)\delta(R) + \sum_{j=2}^m f_{j-1}(R_{j-1})G(m, j) \quad (96)$$

ここで、 $\delta(x)$  はデルタ関数である。結局、遅れ時間  $\tau_i$  の確率密度関数  $G_T(\tau)$  は、式(91)の関係から次式が得られる。

$$G_T(\tau) = V \cdot F_R(V \cdot \tau) \quad (97)$$

## (2) 遅れ時間の確率変動を考慮した流出量

式(1)の右辺は  $q_i(t)$  と  $\tau_i$  の2つが確率変数であるので、 $Q_n(t)$  の期待値は  $q_i$  と  $\tau_i$  の結合確率密度関数  $h(q_i, \tau_i)$

を定義すると次式で表される。

$$E[Q_n(t)] = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} q_i(t - \tau_i) h(q_i, \tau_i) dq_i d\tau_i \quad (98)$$

ここで、いま、 $q_i$ と $\tau_i$ の相関が小さいと考え、互いに独立であると仮定する。まず、 $\tau_i$ を固定して $q_i$ に関して期待値を考えると、上式の右辺の $q_i$ は

$$E[q_i(t - \tau_i)] = E[\bar{q}(t - \tau_i) + q'(t - \tau_i)] \\ = E[\bar{q}(t - \tau_i)] \quad (99)$$

となる。次に、 $\tau_i$ に関して期待値をとると、 $\tau_i$ の確率密度関数は式(97)であるので、上式の右辺は

$$E[\bar{q}(t - \tau_i)] = \int_0^{\infty} \bar{q}(t - \tau) G_T(\tau) d\tau \quad (100)$$

となる。ここで、 $t - \tau = T$ とおくと

$$E[\bar{q}(t - \tau_i)] = \int_{-\infty}^t \bar{q}(T) G_T(t - T) dT \quad (101)$$

となる。したがって、 $Q_n(t)$ の平均値 $\bar{Q}_n(t)$ は

$$\bar{Q}_n(t) = E[Q_n(t)] = n \int_0^t \bar{q}(T) G_T(t - T) dT \quad (102)$$

となる。

次に、 $Q_n(t)$ の平均値からの変動成分 $Q'_n(t)$ を考えると

$$Q'_n(t) = \sum_{i=1}^n \{\bar{q}(t - \tau_i) + q'(t - \tau_i)\} - \bar{Q}_n(t) \quad (103)$$

となる。これを2乗して平均値と同様の期待値操作をすると次式が得られる。

$$\sigma_{Q_n}^2(t) = n \int_0^t \{\bar{q}^2(T) + \sigma_q^2(T)\} G_T(t - T) dT \\ - n \left\{ \int_0^t \bar{q}(T) G_T(t - T) dT \right\}^2 \quad (104)$$

### (3) シミュレーションによる理論解の検証

図-9は2章で導いたサブ流域の流出量と前節で求めた河道網の確率応答を結びつけ、流域全体から流出量の理論解とシミュレーション結果と比較した図である。シミュレーションはサブ流域のリンク長が互いに独立な確率分布であるとして、河道長 $R_j$ 、遅れ時間 $\tau_i$ の確率分布形を計算した。河道網パターンは図-7に示す平均的な河道網パターンである $C(m, j)$ から、式(97)の遅れ時間の確率密度関数 $G_T(\tau)$ を導き、遅れ時間をシミュレートした。流出量は平均値、分散ともシミュレーション結果と良く一致している。流出の遅れ時間の効果も式(102)、(104)の近似式で評価出来ることが判る。したがって、以上の図-3,4,9から総合的に判断すると2章で述べたサブ流域の流出量の確率変動と本章で提案した河道網による遅れ時間の確率変動の両者を結びつけた理論式がほぼ満足できることを示している。

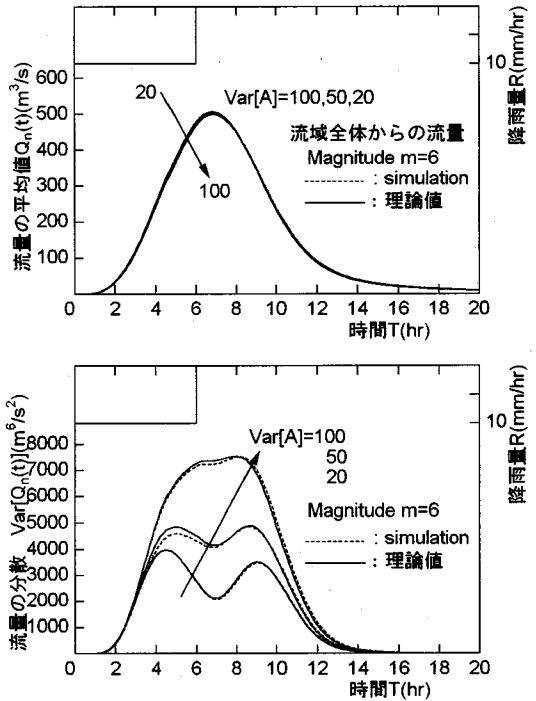


図-9 理論値とシミュレーション値の比較(全流域の流出量)  
(上図:流量の平均値, 下図:流量の分散)

## 4. サブ流域のスケールと流出特性

流出モデルにおける流域スケールと流出特性の定量化は従来から重要課題であり、多くの研究者によって様々な検討がなされてきた。Woodら<sup>19)</sup>はサブ流域の流域面積や透水係数の空間変動をシミュレーションすることによって流出量の変動特性を調べ、流域スケールの基準となるREA (Representative Elementary Area)の概念を提案している。一般に、流域を構成しているサブ流域の大きさは、その流域の河道網の粗密さと相反する関係にある。つまり、サブ流域のサイズが大きくなると河道網構造は粗になり、逆にサイズが小さくなると河道網構造は複雑になる。流出現象と対比させて考えると、サブ流域における降雨から流量への変換過程と河道網による集水~合成過程の釣合がキーポイントになる。また、流域の地質条件や植生等もある流域スケールまで細分化すると均質(homogeneous)と考えられる。流出の入力である降雨も、雨域のスケールが流域スケールを考える上で重要になる。以上のように流域スケールを決定する基準は多種多様考えられる。

本研究で誘導した流出量の平均値、分散は、流域を細分化する際のサブ流域の地形量の変動の影響と河道網構造の変動の影響も含んでいる。そのため、流域のマグニチュードを変化させたときの流出特性の変化を容

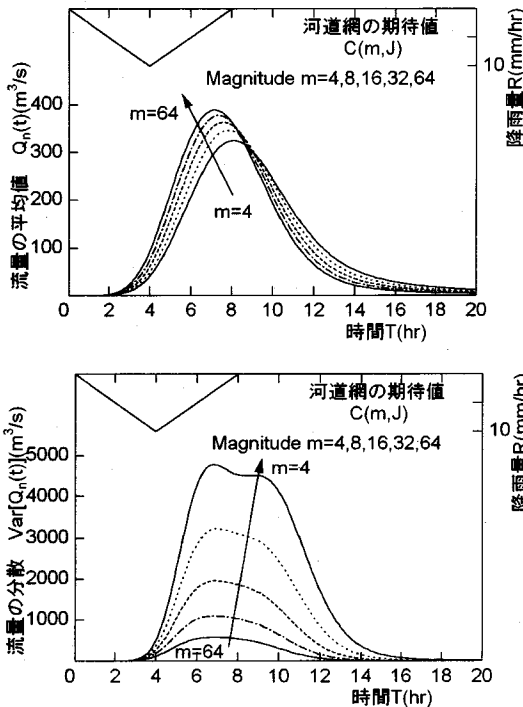


図-10 平均的な河道網パターン  $C(m, J)$  におけるサブ流域スケールの影響 (上図: 流量の平均値, 下図: 流量の分散)

易に知ることが出来る。図-10 は全ての河道網パターンを考慮して得た平均的な河道網パターン  $C(m, J)$  を対象に、マグニチュードが変化した場合の流出特性を示している。降雨波形は実際の降雨に近づけるために三角波形を用いた。マグニチュードが増え、サブ流域スケールが小さくなるに従い、流量の平均値はピーク値が大きくなり、その生起時刻も早くなっている。この現象が一般的な傾向であるか保証がないので、実流域に同じ条件で計算した結果を図-11 に示す。対象流域は図-2 の滝上流域 (流域面積  $237.6 \text{ km}^2$ ) で、図-10 で示した  $C(m, J)$  の河道網パターンの実現値の一つであると考えられる。滝上流域も  $C(m, J)$  の河道網と同じ動きを示している。一方、流量の分散はマグニチュードが増加すると急激に減少している。平均値と分散の結果を照らし合わせて考えると、流域を細分化することによって、定常のハイドログラフに収束することが予想できる。この定常に落ち着く分割数、あるいはサブ流域のサイズが分布型流出モデルの最適なサブ流域スケールの基準の判断材料となる。流量の分散は式 (83) や式 (104) をみると、サブ流域の地形量と流出量の変動成分を互いに組合せた項目から構成されているのが判るであろう。したがって、この項目の中からサブ流域の最適なスケールを決定する新しい基準を見つけ出

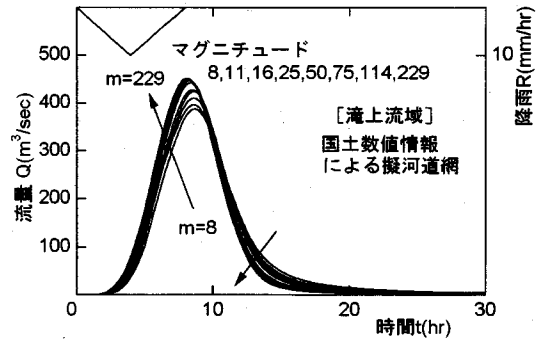


図-11 滝上流域におけるサブ流域スケールの影響

すのが今後の課題である。

## 5. 結論と今後の課題

本研究では、降雨一流出現象を確率微分方程式で記述し、降雨と流域場の初期状態が定常状態で流域地形量が確率変動する場合の流出量の確率応答を調べた。流域はサブ流域の集合体であるので、サブ流域の流出特性とサブ流域を連結している河道網の集水過程の確率応答を定式化して、流域全体からの流出量の平均値と分散の理論解を誘導した。シミュレーションによって理論解を検証した結果、十分実用に供することが判った。但し、ベキ乗型の非線形項を線形近似する Bras の近似式は、非線形性の強いサブ流域面積と貯留係数の場合に、係数を高次まで展開する必要がある。更に、本研究は分布型流出モデルを構築する際の最適な流域スケール、あるいは最適な流域分割の基準を導く有用な方法となる。また、流出量の変動特性を理論的に求めているので、流出量の変動成分を構成している内訳を把握できるのが大きな利点である。この変動成分の中から、流域スケール決定の基準となる因子を見出すのが今後の大きな課題となろう。

## 参考文献

- 1) T.E. Unny: Hydrology Research in North America and in Japan - Problems in Hydrology Described Stochastic Differential Equations -, 水文・水資源学会誌第4巻4号, pp.9-18, 1991.
- 2) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆志, 橋本謙秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究 - 降雨が時間的に独立な確率過程の場合 -, 土木学会論文集, No.515/II-31, pp.1-11, 1995.
- 3) Chow, V. T.: Handbook of applied hydrology, McGraw-Hill, Inc, 1964.
- 4) Horton, R. E.: Erosional development of streams and their drainage basins: Hydrophysical approach to quantitative morphology, Geol. Soc. Amer., Bull.56, 1945.

- 5) Shreve, R. L.: Statistical law of stream numbers, *J. Geology*, Vol.74(1), pp.17-37, 1966.
- 6) Werner, C. and Smart, J. S.: Some new methods of topologic classification of channel networks, *Geographical Analysis*, Vol.5, pp.271-296, 1973.
- 7) 石原藤次郎, 高埴琢馬, 瀬能邦雄: 河道配列の統計則に関する基礎的研究, 京大防災研究所年報, 第12号B, pp.345-365, 1969.
- 8) 藤田睦博: 流域地形構造とその統計則に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第234号, pp.73-82, 1975.
- 9) 岩佐義朗, 小林信久: マグニチュードに基づく流域地形統計則およびその位数理論との関連性, 土木学会論文報告集, 第273号, pp.47-58, 1978.
- 10) Rodriguez-Iturbe, I. and Valdes, J. B. : The Geomorphologic Structure of Hydrologic Response, *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 6, pp.1409-1420, 1979.
- 11) Gupta, V. K. and Mesa, O. J. : Runoff generation and hydrologic response via channel network geomorphology - Recent progress and open problems -, *J. Hydrology*, Vol. 102, pp.3-28, 1988.
- 12) 早川 博: 分布型流出モデルのサブ流域スケールに関する一考察, 水工学論文集, 第36巻, pp.555-560, 1992.
- 13) 星 清, 山岡勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第26回水理講演会論文集, pp.273-278, 1982.
- 14) Bras, R. L. and Georgakakos, K. P.: Real time non-linear filtering techniques in streamflow forecasting - A statistical linearization approach -, *Third International Symposium on Stochastic Hydraulics*, pp.95-105, 1980.
- 15) 友杉邦雄: 河域地形構成要素の平面量の分布特性に関する研究, 京大防災研究所年報, 第19号B, pp.65-80, 1976.
- 16) 早川 博, 藤田睦博: 流域の河道網構造を考慮した流出特性, 水工学論文集, 第35巻, pp.155-160, 1991.
- 17) 工藤睦信, 藤田睦博, 清水康行, 竹本 晃: 分布型流出モデルに関する研究 - 確率微分方程式の導入 -, 水工学論文集, 第39巻, pp. , 1995.
- 18) 室田 明, 江藤剛治, 田中 剛: 水文量の和に関する統計的研究, 土木学会論文報告集, 第223号, pp.23-31, 1974.
- 19) Wood, E. F., Sivapalan, M., Beven, K. J. and Band, L. E.: Effects of spatial variability and scale with implications to hydrologic modelling, *J. Hydrology*, Vol.102, pp.29-47, 1988.

(1995. 12. 4 受付)

## STOCHASTIC RESPONSE OF DISTRIBUTED RUNOFF MODELS BASED ON CHARACTERISTICS OF A DRAINAGE BASIN TOPOGRAPHY

Hiroshi HAYAKAWA, Mutsuhiro FUJITA and Kunihide UCHIJIMA

Recently, the increasing availability of spatial and temporal distributed hydrologic data is encouraging the use of distributed runoff models. This paper assumes that the most general representation of topography and rainfall is a random field, so that the rainfall-runoff system is best described by stochastic differential equation. The main object of this paper is to make clear one universal subbasin scale in the context of distributed runoff model. For this purpose, we pay attention to the variance of discharge at the outlet and propose how to solve the variance theoretically. Finally, we can obtain the relationship between the variance and the subbasin scale theoretically.