

状態方程式表示を用いたガスト応答解析の 定式化の試み

松本泰尚¹・藤野陽三²・木村吉郎³

¹学生会員 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)
(サウザンプトン大学音響振動研究所留学中)

²フェロー Ph.D. 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻

³正会員 Ph.D. 東京大学講師 工学系研究科社会基盤工学専攻

ガスト応答解析の時間領域における定式化の一例として、状態方程式表示を用いた方法について検討を加えた。すなわち、変動風速・空力アドミッタンス・構造物のそれぞれを仮想的なフィルターとして捉え、それらを用いてガスト応答を一つの状態方程式を用いて表現し、また、従来の周波数領域での解析においては扱うことが難しかった非定常空気を、振動数に依存しない有限次数近似モデルを構築することにより、解析に導入することを試みた。その結果、本手法によれば、従来の解析法では扱いにくかった連成空気力や振動モード間の相関などを、システマティックに考慮できることがわかった。

Key Words : *gust response analysis, time domain formulation, state-space equation, self-excited force, finite state model*

1. はじめに

長スパンまたは架設中の吊形式橋梁においては、フレキシブルな構造であることから、自然風に含まれる乱れによる不規則な空気力に起因するガスト応答を予測することが重要である。一般に吊橋など線状構造物のガスト応答の予測には、風の乱れを定常ランダム過程と考え、これにモード展開法を組み合わせた周波数領域の解析法を用いる。この手法に関しては、振動モードの3次元性やモード間の連成空気力などを考慮した、より理論的かつ一般的な形の定式化をScanlanが行っている^{1),2),3)}。しかし、この定式化に従って解析を進めると、非定常空気力が構造物の振動数に依存する形で表されていることや、応答のパワースペクトルを求める際に各モード間で複雑な相関が存在することなどの理由により、非常に計算が繁雑となる。

そこで、非定常空気力の項の大幅な省略、モード間のガスト空気力の相関性の無視、といった多くの簡略化が行われているのが現状である。しかし、例えば空力不安定現象であるフラッター振動の限界風速に及ぼす非定常抗力の影響のように、今までの解析において省略していたものが空力安定性の観点から無視できない役割を果たすことが明らかになって

きている⁴⁾。また、周波数領域の定式化によると、例えば部材降伏後の構造物の挙動などの非線形現象を解析することは不可能である。このような周波数領域の解析の問題点を解決し、より精緻なガスト応答解析を行うための一つの方向として、時間領域での定式化を試みる事が挙げられる。

時間領域のガスト応答解析を行う上での問題は、一つが不規則な風速変動をいかに時間領域で扱うかであり、もう一つが周波数に依存する自励空気力をいかに扱うかである。

前者の問題に対し現在までの研究においては、主に風速変動を何らかの手法により時系列としてシミュレートする方法をとっている。互いに相関を持った多次元の確率変動量としての変動風速場をシミュレートする方法は、Shinozuka and Jan⁵⁾による重み付きの正弦波の重ね合わせによる手法や、岩谷⁶⁾、Iannuzzi and Spinelli⁷⁾による自己回帰(AR)モデル⁸⁾を用いた手法が挙げられる。松本らはこの多次元ARモデルを用いてシミュレートした変動風速を用いてガスト応答の時刻歴解析を行っている⁹⁾。

これに対して、本論では変動風速のシミュレートとは異なる手法を用いた時間領域でのガスト応答解析の定式化の一例について述べる。周波数領域でのガスト応答解析の基本的な概念は、簡単に言えば、

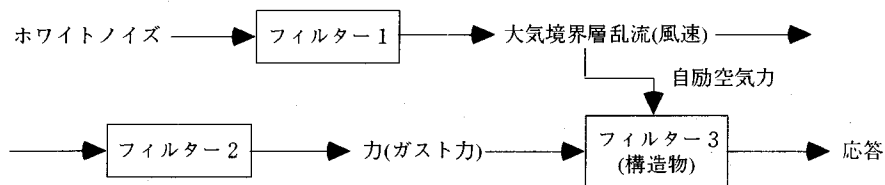


図-1 時間領域でのガスト応答解析の定式化の基本概念

変動風速のスペクトルと構造物に特有の空力アドミッタンスを掛けてガスト変動空気力のスペクトルを求め、さらにこれに構造物の動的応答特性を表すメカニカルアドミッタンスを掛けることにより、応答のパワースペクトルを求めるというものである。ここで、変動風速のスペクトル、空力アドミッタンス、メカニカルアドミッタンスの三つはそれぞれ周波数領域上である特性を持つものであり、一種のフィルターの出力のスペクトルとして捉えることができる。そこで、線形システム理論に基づき、この仮想フィルターを線形の微分方程式である状態方程式でそれぞれ表現し、さらに三つを直列に結合することにより、ガスト応答を一つの状態方程式で表現することを試みた。

2番目の問題である構造物の振動数の関数として表される非定常空気力については、新たな補助変数を導入することにより振動数に依存しない有限次数近似モデル^{10),11)}で表現した。図-1にここで述べる時間領域でのガスト応答解析の定式化の概念図を示す。なお、前出の松本ら⁹⁾においても有限次数近似モデルを導入して時刻歴ガスト応答解析を行っている。

2. 非定常空気力の有限次数近似モデル^{10),11)}

橋梁を多質点系としてモデル化することを考えれば、ガスト応答の運動方程式はマトリックス表示で、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \\ = \mathbf{F}_{ae1}(K)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{F}_{ae2}(K)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_b(t) \quad (1) \end{aligned}$$

の形で与えられる。 $\mathbf{x}(t)$ は質点の変位ベクトルである。右辺第3項 $\mathbf{f}_b(t)$ は、自然風の乱れ、すなわちガストによる変動空気力を表す。右辺第1項、第2項はともに物体の振動に起因する非定常空気力を表し、その係数 \mathbf{F}_{ae1} 、 \mathbf{F}_{ae2} は無次元振動数 $K = B\omega/U$ の関数となる。ただし、 ω は桁の角振動数、 B は桁幅、 U は平均風速を表す。

式(1)の右辺の自励空気力に関わる係数 \mathbf{F}_{ae1} 、 \mathbf{F}_{ae2} が振動数依存となっているのは、本来構造物と流体

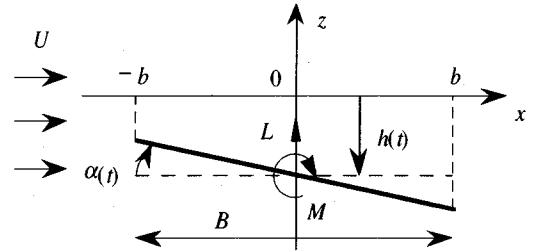


図-2 変位と外力の定義

との相関問題であることから、構造物の振動を考える際にそれにとりまわす周辺流れの変動をモデル化すべきであるところを、式(1)の定式化においては空気力を表現する変数を構造物の速度と変位で代表させているためである。この振動数依存性を解決するには、物体の動きによる周辺流れの変動を厳密にモデル化して定式化することが一つの方法であるが、それは不可能である。数値流体解析はこれを志向するものであるが、自由度の数が莫大となり、実用上問題がある。

本研究では周辺流れの変動を近似的に代表する補助変数を導入し、振動数に依存しない非定常空気力のモデルを構築する方法を用いる。周辺流れは物体の動きに対して動的に応答する。この動的な応答を表わす最も基本的な形が一次おくれ系であり、数学的には一階の微分方程式で表わされる。より一般的な形は一次おくれ系を組み合わせたものとなり、その組み合わせの数がここでいうところの(有限)次数である。このような定式化を行ったのが後述の式(3)であり、これを有限次数近似モデルと呼ぶ。

(1) 橋桁に作用する非定常空気力の有限次数近似モデル及びパラメータ決定法

橋桁に作用する非定常空気力の有限次数近似モデルに関しては、2次元薄翼の非定常空気力に対するモデルにならった定式化を行うこととする。変位、外力については鉛直およびねじれ方向のみを考慮することとし、それぞれ図-2のように定義する。このとき、橋桁の非定常空気力に対する有限次数近似モデルとして次式を考える。なお、式(2)において橋

桁の非定常空気を考える際には、空気による慣性項は橋桁の慣性項に比べて無視できるので、加速度比例項は省略している。

$$\mathbf{C}_f = \left(\frac{B}{U}\right) \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{q} + \sum_{l=1}^{n_L} \mathbf{D}_l x_l \quad (2)$$

$$\left(\frac{B}{U}\right) \dot{x}_l = -\lambda_l x_l + \mathbf{E}_l \mathbf{q} \quad (l=1, 2, \dots, n_L) \quad (3)$$

式(2)において、非定常空気力係数 \mathbf{C}_f は非定常揚力 L および非定常空気力モーメント M を用いて $\mathbf{C}_f = \left[L/\frac{1}{2} \rho U^2 B, M/\frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \right]^T$ と定義し、桁の変位 \mathbf{q} は鉛直変位 h とねじれ変位 α を用いて $\mathbf{q} = [h/B, \alpha]^T$ と定義している。 x_l が周辺流れの変動を近似的に代表する補助変数であり、 n_L はその個数である。また、 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ は 2×2 、 \mathbf{D}_l は 2×1 、 \mathbf{E}_l は 1×2 の実係数行列、 λ_l はスカラーである。

式(2)、(3)のパラメータ λ_l 及び行列 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{D}_l, \mathbf{E}_l$ は、風洞実験から得られる非定常空気力の測定結果もしくは理論値（たとえばTheodorsen関数）から決定することになる^{10,11}。橋桁が振動数 ω で調和振動していると仮定すると、近似モデルの複素振幅は次のような有理多項式の形で書ける。

$$\bar{\mathbf{C}}_f = \tilde{\mathbf{Q}}(iK) \bar{\mathbf{q}} \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}(iK) = \mathbf{A}_0 + (iK) \mathbf{A}_1 + \sum_{l=1}^{n_L} \frac{1}{iK + \lambda_l} \mathbf{D}_l \mathbf{E}_l \quad (5)$$

式(5)の第3項は有理関数の形をしているため、この近似方法は一般に有理多項式近似(Rational Function Approximation)と呼ばれ、特にこれを定式化したRogerの名をとりRoger's RFAと呼ばれる¹²。近似の対象となる風洞実験による非定常空気力の測定結果は、非定常空気力係数 $H_i^*, A_i^* (i=1, \dots, 4)$ を用いて、次式で与えられる。

$$\mathbf{Q}(iK_n) = \begin{bmatrix} -2K_n^2 H_4^* - i2K_n^2 H_1^* & -2K_n^2 H_3^* - i2K_n^2 H_2^* \\ 2K_n^2 A_4^* + i2K_n^2 A_1^* & 2K_n^2 A_3^* + i2K_n^2 A_2^* \end{bmatrix} \quad (6)$$

K_n は測定時の無次元振動数である。従って、この $\mathbf{Q}(iK_n)$ を $\tilde{\mathbf{Q}}(iK)$ で有理多項式近似することにより、橋桁に対する有限次数近似モデルを得る。

近似には、最小二乗法によるパラメータの最適化を行えばよいが、式(5)において未定パラメータ λ_l と $\mathbf{D}_l, \mathbf{E}_l$ が非線形の関係にある。そこで、より少ない次数で近似の精度を上げるために、ここではNelder-Mead Simplex法を用いて、 $\lambda_l > 0$ の拘束条件

を付加した非線形最適化¹³を行った。

この有限次数近似モデルを用いると、翼なら補助変数 x_l を1つあるいは2つ、剥離を伴う橋梁断面の場合は3つの補助変数を導入すれば、十分な精度で非定常空気力のモデル化が可能となる^{10,11}。

(2) 有限次数近似モデルを導入した運動方程式とその状態方程式表示

以上により構築した非定常空気力の有限次数近似モデルである式(2)を橋桁の曲げとねじれを考慮した運動方程式（ガスト空気力による項は省略）

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_h \omega_h m & 0 \\ 0 & 2\xi_\alpha \omega_\alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 m & 0 \\ 0 & \omega_\alpha^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix} \quad (7)$$

に代入すると、

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \gamma \left\{ \left(\frac{B}{U}\right) \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{q} + \sum_{l=1}^{n_L} \mathbf{D}_l x_l \right\} \quad (8)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} mB^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\xi_h \omega_h m B^2 & 0 \\ 0 & 2\xi_\alpha \omega_\alpha I \end{bmatrix} \quad (8a,b)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_h^2 m B^2 & 0 \\ 0 & \omega_\alpha^2 I \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \quad (8c,d)$$

と書ける。このように、非定常空気力の有限次数近似モデルを用いることによって、運動方程式を振動数に依存しない実係数のみの形で表すことができる。

次に、式(8)の右辺を左辺に移項し、式(3)を変形すると次の2式となる。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \left[\mathbf{C} - \gamma \left(\frac{B}{U}\right) \mathbf{A}_1 \right] \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} - \gamma \mathbf{A}_0] \mathbf{q} - \gamma \sum_{l=1}^{n_L} \mathbf{D}_l x_l = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\dot{x}_l = -\lambda_l \left(\frac{U}{B}\right) x_l + \left(\frac{U}{B}\right) \mathbf{E}_l \mathbf{q} \quad (l=1, 2, \dots, n_L) \quad (10)$$

ここで、新たな変数ベクトル

$$\mathbf{y}(t) = \left[\mathbf{q}(t) \quad \dot{\mathbf{q}}(t) \quad x_1 \quad \dots \quad x_{n_L} \right]^T \quad (11)$$

を導入すると、式(9)と(10)をまとめて

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{P} \mathbf{y}(t) \quad (12)$$

のように状態方程式表示できる。ここで、係数行列 \mathbf{P} は

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{C} - \gamma \left(\frac{B}{U} \right) \mathbf{A}_1 \right] & -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K} - \gamma \mathbf{A}_0] \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\frac{U}{B} \right) \mathbf{E}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \left(\frac{U}{B} \right) \mathbf{E}_{n_L} \\ \gamma \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}_1 & \cdots & \gamma \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}_{n_L} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -\left(\frac{U}{B} \right) \lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\left(\frac{U}{B} \right) \lambda_{n_L} \end{bmatrix} \quad (13)$$

である。式(12)に、省略していたガストによる変動空気力 $\mathbf{f}_b(t)$ を加えると、

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}_b(t) \quad (14)$$

を得る。以上の方法を用いて、非定常空気力を含んだ構造物の運動方程式を振動数に依存しない状態方程式として定式化することができる。

3. 状態方程式表示によるガスト応答解析の定式化⁽¹⁴⁾

次に、図-1に示した、仮想フィルターを考えることによる状態方程式表示を用いたガスト応答解析の時間領域での定式化について述べる。

まず、式(1)におけるガストによる変動空気力 $\mathbf{f}_b(t)$ について、鉛直・ねじれ両方向の変動空気力の時間領域での表現は次のようになる⁽¹⁵⁾。

$$L_{bi}(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left\{ C_{Li} \chi_{Li}^u(K) \frac{2u_i(t)}{U} + \left[\frac{dC_{Li}}{d\alpha} + C_{Di} \right] \chi_{Li}^w(K) \frac{w_i(t)}{U} \right\} \quad (15)$$

$$M_{bi}(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left\{ C_{Mi} \chi_{Mi}^u(K) \frac{2u_i(t)}{U} + \frac{dC_{Mi}}{d\alpha} \chi_{Mi}^w(K) \frac{w_i(t)}{U} \right\} \quad (16)$$

ここで、例えば $\chi_{Li}^w(K)$ は変動風速鉛直成分と揚力の間の伝達関数で、 $|\chi_{Li}^w(K)|^2$ がいわゆる空力アドミッタンスである。 $K = B\omega/U$ は換算振動数であり、添字 i はスパン方向にとった座標軸上の点 i での値を示す。

さて、解析の対象とする変動風速場を表すために、

構造物上の各点における変動風速のパワースペクトル $S_{u_i}(\omega), S_{w_i}(\omega)$ 、任意の2点間の変動風速の相関を表すクロススペクトル $S_{u_i u_j}(\omega), S_{w_i w_j}(\omega)$ からスペクトル行列 $\Phi_0(\omega)$ を構成する。ここで、 u_i, w_i はそれぞれ構造物上の任意の点 i における変動風速の水平成分と鉛直成分を表す。また、水平成分と鉛直成分との間の相関は非常に小さいとし、クロススペクトル $S_{u_i w_j}(\omega)$ は無視する。スペクトルの定義より明らかな通り、スペクトル行列 $\Phi_0(\omega)$ は必ず対称行列となる。

ここで、このスペクトル行列を一種のフィルターによる出力と捉え、入力として互いに独立な強さ1のホワイトノイズを考えることにより、変動風速を、入力のスペクトルが単位行列 \mathbf{I} 、出力のスペクトルが $\Phi_0(\omega)$ のフィルターで表すことができる。このとき入出力とフィルターの伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ との間には、

$$\Phi_0(s) = \mathbf{G}(-s) \mathbf{I} \mathbf{G}^T(s) \quad (17)$$

の関係が成立するので、これより伝達関数行列を求める。式(17)では、通常の線形システムの扱いにならって、周波数領域の表現はラプラス変換で表しており、 $s (s = i\omega)$ はラプラス変換の変数である。

(1) フィルターの伝達関数行列

式(17)の関係を用いるには、スペクトル行列 $\Phi_0(\omega)$ の各成分が何らかの周波数 $\omega (\omega = -is)$ の関数で表されている必要がある。変動風速のスペクトルに対しては、例えば Kármán や日野らにより周波数領域上での種々の近似式が提案されているが、線形システムの伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ が通常有理関数で表されることから、ここではスペクトル行列の各成分の有理関数近似を行う。

$$S_{u_i u_j}(\omega) = \frac{\alpha_{ij}(\omega)}{\beta_{ij}(\omega)} \quad (18)$$

ところで、後述するシステムの周波数領域での表現である伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ から時間領域の表現である状態空間表現 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ を求める際には、伝達関数行列の各成分は厳密にプロパー(strictly proper)な有理関数である必要がある^{(16),(17)}。そこで式(18)の近似を行う際には、分母の次数の方が分子の次数より大きい有理関数を用いることとする。

有理関数近似したスペクトル行列 $\Phi_0(\omega)$ に対し、式(17)の関係を用いれば伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ を得る。すなわち、スペクトル行列 $\Phi_0(\omega)$ に一種の因数分解

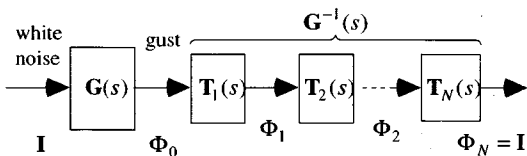


図-3 factorization の概念図

(factorization)¹⁸⁾を施すことにより伝達関数行列 $G(s)$ を求める。このfactorizationの概念図を図-3に示す。この過程では、まず変動風速を表現する仮想的なフィルターの出力のスペクトル行列に対し、入力であるホワイトノイズのスペクトル行列に等しい単位行列を最終的に得るような連続した変換システムを考える。そのとき、この連続した変換システムは、仮想的なフィルターが施す変換 $G(s)$ の逆変換 $G^{-1}(s)$ に相当する。このような逆変換から、システムの伝達関数行列 $G(s)$ を求める。以上が、factorizationの基本的な考え方である。数式で示せば、以下のような

$$T_N(-s) \cdots T_2(-s) T_1(-s) \Phi_0(s) T_1^T(s) T_2^T(s) \cdots T_N^T(s) = I \quad (19)$$

$$\therefore \Phi_0(s) = T_1^{-1}(-s) T_2^{-1}(-s) \cdots T_N^{-1}(-s) [T_1^{-1}(s) T_2^{-1}(s) \cdots T_N^{-1}(s)]^T \quad (20)$$

式(17),(20)より、伝達関数行列 $G(s)$ は、

$$G(s) = T_1^{-1}(s) T_2^{-1}(s) \cdots T_n^{-1}(s) \quad (21)$$

のように、変換行列 $T_k(s)$ の逆行列の積から求めることができる。factorizationのアルゴリズムにおいては、この変換行列 $T_k(s)$ によりスペクトル行列 $\Phi_0(\omega)$ を単位行列 I に変換することが主となる。

実際のfactorizationにおいては、有理関数行列であるスペクトル行列 $\Phi_0(\omega)$ を数値行列の単位行列 I に変換するために、次のようなアルゴリズムで段階的に変換を行う。

- i) すべての極を消去し、有理関数行列を多項式行列に変換する。
- ii) 行列式の次数を落とし、行列式が変数 s に依存しないユニモデュラ(unimodular)行列に変換する。
- iii) 多項式行列のすべての要素から変数 s を消去し、数値行列に変換する。

詳しくは、参考文献18)を参照されたい。

(2) フィルターの状態方程式

次に、以上の方法により得たシステムの伝達関数行列 $G(s)$ から、状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (22)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (23)$$

の係数行列である状態空間表現 (A, B, C) を線形システム理論^{16),17)}に従って求める。この (A, B, C) を伝達関数行列 $G(s)$ の実現(realization)と呼ぶ。一つの伝達関数行列から得られる状態空間表現は一意に定まるものではない。そこで、ここでは伝達関数行列の行列左分解表現から、観測器型実現を求めることを考える。

まず、伝達関数行列 $G(s)$ の行列左分解表現を求める。行列分解表現とは、システム解析に広く応用される伝達関数行列の表現形式である。今、システムの入力の個数を r 、出力の個数を m とすると、伝達関数行列 $G(s)$ に対して、多項式行列 $N_L(s) = m \times r$ 、 $D_L(s) = m \times m$ による

$$G(s) = D_L^{-1}(s) N_L(s) \quad (24)$$

という表現が可能であり、これを左分解表現という。以下、左分解を示す添字 L は簡単のため省略する。

伝達関数行列の分解表現を用いると、入出力の関係は、

$$y(s) = D^{-1}(s) N(s) w(s) \quad (25)$$

と書ける。この両辺に $D(s)$ をかけて、さらに新たなシステム内部で入力 $w(s)$ と出力 $y(s)$ の仲介を果たす状態変数 $\xi(s)$ を導入する。

$$D(s) y(s) = \xi(s) = N(s) w(s) \quad (26)$$

ここで、行列分解表現の分母 $D(s)$ を以下のように分解する。

$$D(s) = S(s) D_{hr} + \Psi(s) D_{lr} \quad (27)$$

$$S(s) = \text{diag}\{s^{l_i}\} \quad (m \times m) \quad (28)$$

$$\Psi(s) = \text{block diag}\left\{ \left[\begin{array}{ccc} s^{l_i-1} & \cdots & 1 \end{array} \right], 1 \times l_i, i=1, \dots, m \right\} \quad (29)$$

$$l_i : D(s) \text{ の第 } i \text{ 行の次数, } \sum_{i=1}^m l_i = \text{deg}(\det D(s))$$

$$D_{hr}, D_{lr} : D(s) \text{ の係数行列}$$

すると、式(27)よりシステムの出力 $y(s)$ と内部の状態変数 $\xi(s)$ に関して次の関係式を得る。

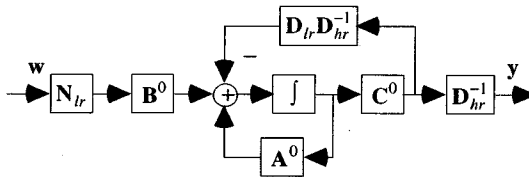


図-4 観測器型実現

$$y(s) = \mathbf{D}_{hr}^{-1} \mathbf{S}^{-1}(s) [\xi(s) - \Psi(s) \mathbf{D}_{lr} y(s)] \quad (30)$$

$$\xi(s) = \mathbf{N}(s) \mathbf{w}(s) = \Psi(s) \mathbf{N}_{lr} \mathbf{w}(s) \quad (31)$$

\mathbf{N}_{lr} : $\mathbf{N}(s)$ の係数行列

この関係から観測器型実現が得られるが、ここで $\mathbf{S}^{-1}(s)\Psi(s)$ の部分の変換に注目する。式(28),(29)からわかるように $\mathbf{S}^{-1}(s)$ と $\Psi(s)$ はどの要素の係数も1または0であり、これは時間領域において単に微分または積分を表す。 $\mathbf{S}^{-1}(s)\Psi(s)$ の実現は core-observer realization と呼ばれ、この部分の状態空間表現 $(\mathbf{A}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{C}^0)$ は、以下の通りである。

$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad l_i \times l_i, i=1, \dots, m \quad (32)$$

$$\mathbf{B}^0 = \mathbf{I}_n \quad (33)$$

$$\mathbf{C}^0 = \text{block diag}\{[1 \ 0 \ \dots \ 0], 1 \times l_i, i=1, \dots, m\} \quad (34)$$

$$n = \sum_{i=1}^m l_i = \text{deg}(\det \mathbf{D}(s)) \quad (35)$$

以上の観測器型実現を図-4に示す。

これより、伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ の観測器型実現 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ に関して、

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^0 - \mathbf{D}_{lr} \mathbf{D}_{hr}^{-1} \mathbf{C}^0 \quad (36)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 \mathbf{N}_{lr} \quad (37)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}_{hr}^{-1} \mathbf{C}^0 \quad (38)$$

が成り立ち、コアの状態空間表現 $(\mathbf{A}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{C}^0)$ と伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ の分解表現による多項式行列 $\mathbf{D}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ の係数行列 \mathbf{D}_{hr} , \mathbf{D}_{lr} , \mathbf{N}_{lr} から観測器型実現 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ を得ることができる。以上の方法で、変動風速を表すフィルターを表現する微分方程式として、状態方程式を得る。これを、

$$\dot{\mathbf{x}}_g(t) = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{B}_g \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}_g(t) = \mathbf{C}_g \mathbf{x}_g(t) \quad (39)$$

と書くことにする。

さらに、構造物上の各点における変動風速と変動空気力との間の伝達関数である空力アドミッタンスについても、変動風速の場合と同様の方法で状態方程式表示が可能であり、次のように書ける。

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{B}_a \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}_a(t) = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(t) \quad (40)$$

(3) ガスト応答の状態方程式表示

以上の式(14),(39),(40)を直列に結合すれば、図-1のようなガスト応答を表現するホワイトノイズを入力とする一つの拡大システムを表現する状態方程式を得ることができる。すなわち、まず変動風速を表す式(39)の出力を空力アドミッタンスを表す式(40)の入力とする。さらにその結果の出力に空気力係数などの適当な係数をかけ、運動方程式である式(14)の入力としてやると、ガスト応答を表現する拡大システムの状態方程式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{w}(t) \quad (41)$$

を得る。式(14),(39),(40)を用いると式(41)の状態変数 \mathbf{x} 及び係数行列 \mathbf{A} , \mathbf{B} は次のように書ける。

$$\mathbf{x} = \{ \mathbf{y}^T \quad \mathbf{x}_a^T \quad \mathbf{x}_g^T \}^T \quad (42)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & a \mathbf{C}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \mathbf{C}_g \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_g \end{bmatrix} \quad (43,44)$$

ただし、 a は式(15),(16)における空気力係数、空気密度などの係数を表す。

4. ガスト応答の二乗平均値の計算法¹⁹⁾

ここでは、式(41)に得られたガスト応答を表現する状態方程式を用いて、状態変数 $\mathbf{x}(t)$ の共分散行列 Σ を計算することにより、ガスト応答の二乗平均値を求める方法について述べる。

共分散行列 Σ を計算する過程は以下の通りである。まず、式(41)の両辺の時刻 t での期待値を考えると、

$$\frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{x}}(t)] = \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \bar{\mathbf{w}}(t) \quad (45)$$

を得る。ただし、 $\bar{\cdot}$ は期待値を表している。この式(45)を式(41)の両辺から引き、後ろから $[\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T$ をかける。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)] [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T \\ &= \mathbf{A} [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)] [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T + \mathbf{B} [\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)] [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T \end{aligned} \quad (46)$$

式(46)の転置をとり、これをもとの式(46)に加えると次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)] [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T \right\} \\ &= \mathbf{A} [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)] [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T + [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)] [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T \mathbf{A}^T \\ &+ \mathbf{B} [\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)] [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T + [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)] [\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)]^T \mathbf{B}^T \end{aligned} \quad (47)$$

さらに両辺の期待値をとると、

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}(t) &= \mathbf{A}\Sigma(t) + \Sigma(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{E}\left\{[\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)] [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]^T\right\} \\ &+ \mathbf{E}\left\{[\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)] [\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)]^T\right\} \mathbf{B}^T \end{aligned} \quad (48)$$

を得る。ただし、 $\mathbf{E}\{\cdot\}$ も $\bar{\cdot}$ と同様に期待値を表す。ここで、線形システム式(41)の状態遷移行列 $\Theta(t, \tau)$ ($\Theta(t, t) = \mathbf{I}$)を用いると、 $\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t) &= \Theta(t, t_0) [\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}(t_0)] \\ &+ \int_{t_0}^t \Theta(t, \tau) \mathbf{B} [\mathbf{w}(\tau) - \bar{\mathbf{w}}(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (49)$$

初期状態 $\mathbf{x}(t_0)$ の平均値からのランダムな偏差が、入力ランダムな変動と無相関であると仮定し、式(49)に後ろから $[\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)]^T$ をかけてその期待値をとると、

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left\{[\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)] [\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)]^T\right\} \\ &= \int_{t_0}^t \Theta(t, \tau) \mathbf{B} \mathbf{E}\left\{[\mathbf{w}(\tau) - \bar{\mathbf{w}}(\tau)] [\mathbf{w}(\tau) - \bar{\mathbf{w}}(\tau)]^T\right\} d\tau \end{aligned} \quad (50)$$

式(48),(50)より、共分散行列 $\Sigma(t)$ を求めるためには式(50)の右辺のホワイトノイズの自己相関関数 $\mathbf{E}\left\{[\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)] [\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)]^T\right\}$ の重み付きの積分を求めればよい。そこで、スペクトル密度 S_0 (一定)のホワイトノイズの自己相関関数 $R_w(\tau)$ はディラックのデルタ関数 $\delta(\tau)$ を用いて、

$$R_w(\tau) = S_0 \delta(\tau) \quad (51)$$

与えられることから、式(50)の積分を計算して式(48)に代入すると、共分散行列 $\Sigma(t)$ に関して

$$\dot{\Sigma}(t) = \mathbf{A}\Sigma(t) + \Sigma(t)\mathbf{A}^T + S_0 \mathbf{B}\mathbf{B}^T \quad (52)$$

が得られる。ここで、もとのシステムについて、入

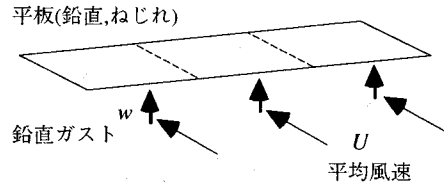


図-5 平板のガスト応答解析の例

力のホワイトノイズは定常ランダム過程であり、さらに式(41)からわかるようにこのシステムは時間不変であるから、時間 t が初期状態の影響を受けないほど十分大きいとき、共分散行列 $\Sigma(t)$ は一定とすることができる。このとき、共分散行列の時間微分は $\dot{\Sigma}(t) = 0$ となるから、結局式(52)は、

$$\mathbf{A}\Sigma + \Sigma\mathbf{A}^T + S_0 \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0 \quad (53)$$

となる。これは、リヤプノフ(Lyapunov)方程式と呼ばれる代数方程式である。式(53)を Σ について解けば、共分散行列を代数計算のみで得ることができる。

構造物のガスト応答に関して、平均風圧による応答を除いた変動成分は平均値を0と考えることができるので、応答の二乗平均値はその分散と一致する。よって、以上の一連の定式化により、構造物のガスト応答の二乗平均値を周波数領域での解析法のように重積分計算を用いることなく、代数的な手法によって比較的容易に解析することが可能となる。

5. 状態方程式によるガスト応答解析の定式化の適用例

本定式化の簡単な適用例として、図-5に示すような2次元の剛な平板の、鉛直ガストによる鉛直方向及びねじれ方向の応答について考える。

(1) 平板に作用する非定常空気力の有限次数モデル

まず、2次元平板に作用する非定常空気力の有限次数モデルを示す。理論的に得られる2次元薄翼の非定常空気力係数をもとに、前述の過程に従って構築した $n_L = 2$ のときの有限次数近似モデルは次のようになった。

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -1.30 & -3.53 \\ 0.335 & 0.874 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -3.38 & -2.36 \\ 0.799 & -0.188 \end{bmatrix} \quad (54a,b)$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -3.47 \\ 0.826 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} -0.0145 & 0.0782 \end{bmatrix} \quad (54c,d)$$

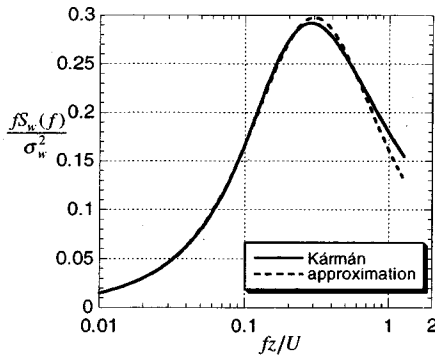


図-6 パワースペクトルの有理関数近似

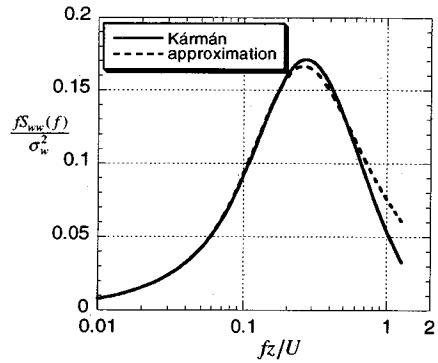


図-7 クロススペクトルの有理関数近似

$$D_2 = \begin{bmatrix} -3.27 \\ 0.864 \end{bmatrix}, E_2 = [-2.30 \quad 0.260] \quad (54e,f)$$

(2) ガストのスペクトル及び空力アドミッタンスの有理関数近似

次に、変動風速のスペクトル及び空力アドミッタンスの有理関数近似を行った例を示す。ここでは、平板の長手方向の長さは30mとし、変動風速場は10mおきの3点で表すこととした。

ここで用いる有理関数は、 $s = i\omega$ の関係から、 ω を s に変換する際に分子、分母の多項式の係数を実数に保つために、角振動数 ω に関する実係数の偶関数とし、また分子の次数は分母の次数より小さいものとする。具体的には、次のような形の有理関数を用いた。

$$S_a(\omega) = \frac{a \prod_{i=1}^{n_n} (\omega^2 + z_i^2)}{\prod_{j=1}^{n_d} (\omega^2 + p_j^2)} \quad (n_n < n_d) \quad (55)$$

この関数の未定パラメータである a, z_i, p_j は非線形の関係にあるので、実際に近似を行う際には非線形最適化手法である、Nelder&Mead Simplex法を用いた。

ここで、近似精度を上げるには、式(55)に示した有理関数の分子と分母の次数を上げる、つまり n_n, n_d の値を増やせばよい。しかし、これらを過度に大きくすると、状態方程式における補助変数の数を増やすこととなり、後の計算が繁雑となる。従って、より低い次数での近似を行うことが望ましい。

鉛直ガストの有理関数近似は、次に示すようなKármánによるパワースペクトルとそれをもとに等方性乱流を仮定して得られるクロススペクトルを対

象として行った。

<パワースペクトル>

$$S_w(f) = \frac{(2\sigma_w^2 L_1 / U) [1 + 188.8 (fL_1 / U)^2]}{[1 + 70.78 (fL_1 / U)^2]^{1/6}} \quad (56)$$

<クロススペクトル>

$$S_{ww}(f, \Delta y) = \frac{2^{5/6} S_w(f)}{\Gamma(5/6)} \left[\eta^{5/6} K_{5/6}(\eta) - \frac{\eta^{11/6} K_{11/6}(\eta)}{1 + \frac{8}{3} (2\pi/B_1)^2 (fL_2 / U)^2} \right] \quad (57)$$

$$\eta = \frac{\Delta y}{L_2} B_1 \sqrt{1 + (2\pi/B_1)^2 (fL_2 / U)^2} \quad (58)$$

$$B_1 = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \quad (59)$$

L_1 : 変動風速鉛直成分の平均流方向の乱れのスケールに対応するパラメータ

σ_w : 変動風速鉛直成分のr.m.s.値

Δy : 平均流直角方向の距離

L_2 : 変動風速鉛直成分の平均流直角方向の乱れのスケールに対応するパラメータ

Γ : ガンマ関数

K : 第2種の変形ベッセル関数

式(56),(57)は個々のパラメータによってその値が変化するが、例として以下の条件

平均風速 : $U=50\text{m/s}$

乱れの強さ : $\sigma_w / U = 0.05$

平均流方向の乱れスケールのパラメータ

: $L_1 = 30\text{m}$

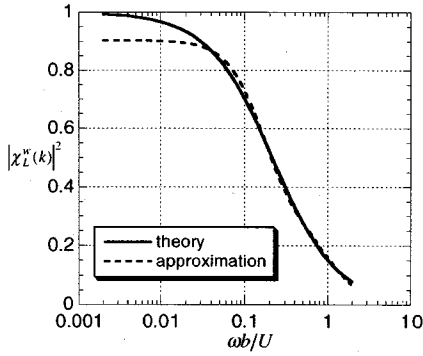


図-8 空力アドミッタンスの有理関数近似

平均流直角方向の乱れスケールのパラメータ
 $L_2=15\text{m}$

の下でのパワースペクトルと Δy が10 mのときのクロススペクトルに対する近似を行った。この際、近似関数の次数については、 $n_n=1, n_d=2$ で誤差数%程度の精度の近似が得られた。近似結果を図-6,7に、近似有理関数を以下に示す。

<パワースペクトル>

$$S_w(\omega) = \frac{53.84(\omega^2 + 0.5222^2)}{(\omega^2 + 2.257^2)(\omega^2 + 0.6235^2)} \quad (60)$$

<クロススペクトル ($\Delta y = 10\text{m}$)>

$$S_{ww}(\omega) = \frac{24.49(\omega^2 + 0.7184^2)}{(\omega^2 + 1.348^2)(\omega^2 + 1.348^2)} \quad (61)$$

空力アドミッタンスについても同様に有理関数近似を行った。近似の対象としては、2次元薄翼の空力アドミッタンスとして理論的に得られる、以下に示すSears関数を用いた。

$$\begin{aligned} |X_L^w(k)|^2 &= |\phi(k)|^2 = |C(k)[J_0(k) - iJ_1(k)] + iJ_1(k)|^2 \\ &= (J_0^2 + J_1^2)(F^2 + G^2) + J_1^2 + 2J_0J_1G - 2J_1^2F \quad (62) \end{aligned}$$

$k = \omega b/U$: 換算振動数, b : 翼の半幅

$C(k)$: Theodorsen関数 (式(4)参照)

$J_n(k)$: 第1種のBessel関数

例として、 $b=10\text{m}$, $U=50\text{m/s}$ のときの近似結果を図-8に示す。近似有理関数は次の通りであり、この場合も $n_n=1, n_d=2$ で誤差数%であった。

$$|X_L^w(\omega)|^2 = \frac{8.640(\omega^2 + 1.540^2)}{(\omega^2 + 0.8338^2)(\omega^2 + 5.713^2)} \quad (63)$$

(3) ガストと空力アドミッタンスの状態空間表現の例

次に、得られた有理関数近似を用いた、ガストと空力アドミッタンスの状態方程式表示の例を示す。

変動風速場は均質であるものとし、変動風速のスペクトルがどの位置においても等しい場合を考える。図-5で示したように、風の平均流直角方向に水平に10 m間隔でとった3点に対し、各点間の相関を考慮した変動風速を表現する状態方程式を導いた例を以下に示す。

はじめに、有理関数近似の結果を用いて構築した3点の変動風速のスペクトル行列は次のようになる。

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\phi_1 = \frac{53.84(-s^2 + 0.5222^2)}{(-s^2 + 2.257^2)(-s^2 + 0.6235^2)} \quad (64a)$$

$$\phi_2 = \frac{24.49(-s^2 + 0.7184^2)}{(-s^2 + 1.348^2)(-s^2 + 1.348^2)} \quad (64b)$$

$$\phi_3 = \frac{10.68(-s^2 + 0.4628^2)}{(-s^2 + 1.312^2)(-s^2 + 1.312^2)} \quad (64c)$$

ただし、 $s (s=i\omega)$ はラプラス変換の変数である。

このスペクトル行列 $\Phi(s)$ に対し3.(1)で述べたfactorizationの手法を用いると、次のような仮想フィルターの伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ を得る。

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_4 & g_5 & g_5 \\ g_1 & g_3 & g_6 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$g_1 = \frac{3.33s^5 + 20.9s^4 + 49.4s^3 + 55.1s^2 + 29.1s + 5.87}{s^6 + 8.20s^5 + 27.3s^4 + 47.5s^3 + 45.2s^2 + 22.3s + 4.40} \quad (65a)$$

$$g_2 = \frac{-0.0775s^5 - 0.843s^4 - 3.01s^3 - 4.82s^2 - 3.60s - 0.991}{s^6 + 8.20s^5 + 27.3s^4 + 47.5s^3 + 45.2s^2 + 22.3s + 4.40} \quad (65b)$$

$$g_3 = \frac{6.53s^5 + 37.4s^4 + 84.8s^3 + 94.6s^2 + 51.1s + 10.4}{s^6 + 8.20s^5 + 27.3s^4 + 47.5s^3 + 45.2s^2 + 22.3s + 4.40} \quad (65c)$$

$$g_4 = \frac{7.34s^3 + 23.5s^2 + 23.6s + 6.95}{s^4 + 5.58s^3 + 11.0s^2 + 9.03s + 2.56} \quad (65d)$$

$$g_5 = \frac{1.67s^2 + 1.02s + 0.241}{s^4 + 5.58s^3 + 11.0s^2 + 9.03s + 2.56} \quad (65e)$$

$$g_6 = \frac{-0.438s^4 - 2.10s^3 - 3.82s^2 - 3.04s - 0.879}{s^6 + 8.20s^5 + 27.3s^4 + 47.5s^3 + 45.2s^2 + 22.3s + 4.40} \quad (65f)$$

このように、スペクトル行列に $n_d=2$ 、つまり分母の次数が4の近似関数を用いると、factorizationの結果得られる伝達関数行列の分母の最大次数は6となる。これは、有理関数行列であるスペクトル行列の各々の要素の分母の多項式に対する最小公倍多項式の次数の半分にあたる。この伝達関数行列の分母の次数は、状態方程式の次数と密接な関係がある。

式(65)の伝達関数行列 $G(s)$ の分子の次数は、分解前のスペクトル行列 $\Phi(s)$ の形からもわかるように必ず分母の次数より小さくなり、伝達関数行列は厳密にプロパーな行列となる。従って、この伝達関数行列からは、それと等価な式(39)に示した状態空間表現 (A_g, B_g, C_g) を得ることができる。

$$A_g = \begin{bmatrix} A_{g1} & \mathbf{0}_{6 \times 4} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{4 \times 6} & A_{g2} & \mathbf{0}_{4 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 4} & A_{g1} \end{bmatrix} \quad (66a)$$

$$A_{g1} = \begin{bmatrix} -8.20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27.3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -47.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -45.2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -22.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66a1)$$

$$A_{g2} = \begin{bmatrix} -5.58 & 1 & 0 & 0 \\ -11.0 & 0 & 1 & 0 \\ -9.03 & 0 & 0 & 1 \\ -2.56 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66a2)$$

$$B_g = \begin{bmatrix} 3.33 & -0.0775 & 6.53 \\ 20.9 & -0.843 & 37.4 \\ 49.4 & -3.01 & 84.8 \\ 55.1 & -4.82 & 94.6 \\ 29.1 & -3.60 & 51.1 \\ 5.87 & -0.991 & 10.4 \\ 7.34 & 0 & 0 \\ 23.5 & 1.67 & 1.67 \\ 23.6 & 1.02 & 1.02 \\ 6.95 & 0.241 & 0.241 \\ 3.33 & 6.53 & 0 \\ 20.9 & 37.4 & -0.438 \\ 49.4 & 84.8 & -2.10 \\ 55.1 & 94.6 & -3.82 \\ 29.1 & 51.1 & -3.04 \\ 5.87 & 10.4 & -0.879 \end{bmatrix} \quad (66b)$$

$$C_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_{3 \times 5} & 1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66c)$$

以上のように、3点における変動風速を表現する状態方程式が得られたが、ここで、この状態空間表現の次数は16となっており、補助変数が13個導入されたことになる。次数の16は、前述のように有理関

数行列である伝達関数行列 $G(s)$ を式(24)のように $G(s) = D^{-1}(s)N(s)$ と分解表現したとき、その分母にあたる行列 $D(s)$ の行列式の次数に等しい。この状態方程式の次数が増えると後の計算が複雑となるため、所要の精度が確保できる範囲でできるだけ小さくした方がよい。その意味で、伝達関数行列ひいては有理関数近似したスペクトル行列の次数は小さい方が望ましい。

次に、空力アドミッタンスについてであるが、これは構造物上の各点において、その場所での変動風速とそこに作用する変動空気力の間のみの伝達関数に当たるものであり、空間的な関連の情報を含むものではない。従って、そのスペクトル行列は必ず対角行列となる。また、橋梁の桁のみを扱う場合、その空力アドミッタンスは構造物の部位によらず一定とすることが多く、その場合スペクトル行列は単位行列と空力アドミッタンスを表す周波数領域上の関数との積の形で表すことができる。このような場合は、前述のfactorizationの過程は不必要であり、単に空力アドミッタンスの近似関数の因数分解によって伝達関数行列を求めることができる。伝達関数行列から状態方程式を求めることは容易に行える。ここでは、式(63)の近似関数を用いた場合の空力アドミッタンスの状態空間表現 (A_a, B_a, C_a) を示す。

$$A_a = \begin{bmatrix} -6.55 & 0 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ -4.76 & 0 & -6.55 & 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & -4.76 & 0 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & -6.55 & 0 \\ & & -4.76 & 0 \end{bmatrix} \quad (67a)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} 2.94 & 0 & 0 \\ 4.53 & 0 & 0 \\ 0 & 2.94 & 0 \\ 0 & 4.53 & 0 \\ 0 & 0 & 2.94 \\ 0 & 0 & 4.53 \end{bmatrix} \quad (67b)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (67c)$$

以上で得たガストを表す式(66)、空力アドミッタンスを表す式(67)の状態空間表現と、非定常空気力の有限次数近似モデルである式(54)を考慮した運動方程式により、式(41)のようにガスト応答を表現する一つの状態方程式を構築することができる。

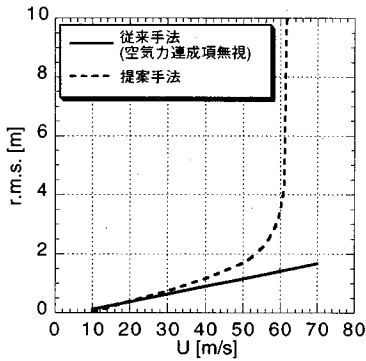


図-9 鉛直変位のr.m.s.値

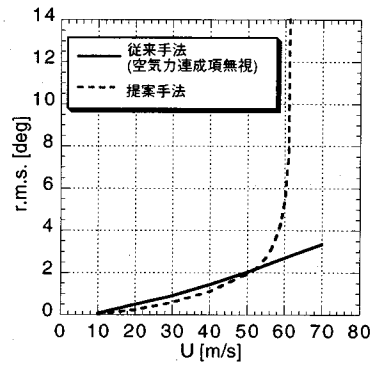


図-10 ねじれ変位のr.m.s.値

(4) 2次元平板に対するガスト応答解析結果

以上の(1)~(3)の結果を踏まえ、本研究の定式化を用いて、図-5の2次元平板に対し、鉛直・ねじれの2自由度でガスト応答解析を行った。解析に用いたパラメータ値は次の通りである。

- 単位長さ当たりの重量：31.97[tf/m]
- 単位長さ当たりの極慣性：4263[itf²/m]
- 鉛直振動の固有振動数：0.065[Hz]
- ねじれ振動の固有振動数：0.208[Hz]
- 鉛直・ねじれ振動の減衰定数：0.01

(1)~(3)の結果を用いると、最終的に得られた状態方程式の次数は30次となった。内訳は、

- 運動方程式の変位：2
- 状態方程式に変換する際に導入した補助変数：2
- 非定常空気力の有限次数モデルの補助変数：4
- 空力アドミッタンス：6
- 変動風速：16

である。応答変位のr.m.s.値は、式(53)のリヤプノフ方程式により求めた。

図-9,10は、平均風速を変化させ、各々の風速に対して前述の(1)~(3)と同様の過程により得た状態方程式をもとに、式(53)で求めた二乗平均応答値をプロットしたものである。比較対象として、周波数領域において非定常空気力を考慮した解析結果も示した。ただし、周波数領域での解析においては、計算の複雑さから非定常空気力の連成項は無視している。図より、状態方程式を用いた時間領域の解析法を用いれば、特別な手順を必要としないシステムティックな方法で、空力連成の影響によるフラッター現象を捉えられることがわかる。

6. あとがき

本研究では、ガスト応答解析の時間領域における定式化の一例として、変動風速・空力アドミッタンス・構造物のそれぞれを仮想的なフィルターとして捉え、それらを用いてガスト応答を一つの状態方程式を用いて表現する方法を試みた。

その際、振動数の関数として表される非定常空気力は、振動数に依存しない有限次数近似モデルを用いることにより定式化した。

以上に示した時間領域におけるガスト応答解析の定式化の利点としては、次のようなことが挙げられる。まず、非定常空気力を振動数に依存しない微分方程式で表すことができることから、計算の簡単化のためにこれらの項を省略する必要がなくなるため、非定常空気力に関する振動モード間の連成などの影響を考慮できることがある。また、もともとモード展開法を用いる必要がないため、周波数領域の解析では無視することが多かった、各振動モード間に及ぼすガスト空気力の作用の相関を自動的に組み込むことができることもある。このように、本研究で示した時間領域での定式化は、構造物の空力振動に関わる様々な現象をシステムティックに考慮できる方法であると言える。

しかし、本論で述べた状態方程式表示によるガスト応答解析の定式化には、現段階では実用化するために解決すべき問題が残されている。

この方法を実際の長大構造物の応答計算に適用する際には、構造物を少なくとも50~100の多質点系で表す必要がある。このような多次元の問題に対しては、3.(1)で述べたスペクトル行列から伝達関数行列を求めるfactorizationの過程において、多次元行列を扱わなくてはならない。factorizationの過程では、多項式行列の行列式の計算や、代数方程式となるそ

多項式行列の行列式の計算や、代数方程式となるその行列式を解くことが必要となるが、対象とする行列が多次元になると、これらの計算自体が複雑となり、数値計算上の問題が生じることがわかった。特に、高次代数方程式となる行列式の解を求める計算において、その計算誤差の影響により、後の計算が進まなくなることが多かった。

この問題は、変動風速の状態方程式表示の際に生じるもので、今回の結果では最大で3~4点の変動風速場を表すことしかできなかった。

今後、本手法を実用化するためには、以上の問題を踏まえた更なる検討が必要である。

謝辞：東京大学工学系研究科クリストフ・ワイルド講師には、有限次数近似モデルに関してご教示頂きました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Scanlan, R.H.: The Action of Flexible Bridges under Wind. I: Flutter Theory, *J. Sound and Vibration*, Vol.60, No.2, pp.187-199, 1978.
- 2) Scanlan, R.H.: The Action of Flexible Bridges under Wind. II: Buffeting Theory, *J. Sound and Vibration*, Vol.60, No.2, pp.201-211, 1978.
- 3) Scanlan, R.H.: On Flutter and Buffeting Mechanisms in Long-Span Bridges, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.3, No.1, pp.22-27, 1988.
- 4) 勝地弘, 宮田利雄, 北川信, 佐藤弘史, 樋上瑋一: 明石海峡大橋大型風洞試験での連成フラッター特性に関する考察, 第13回風工学シンポジウム論文集, pp.383-388, 1994.

- 5) Shinozuka, M., Jan, C.M.: Digital Simulation of Random Processes and Its Application, *J. Sound and Vibration*, Vol.25, No.1, pp.111-128, 1972.
- 6) 岩谷祥美: 任意のパワースペクトルとクロススペクトルをもつ多次元の風速変動のシミュレーション, 日本風工学会誌, No.11, pp.5-18, 1982.
- 7) Iannuzzi, A., Spinelli, P.: Artificial Wind Generation and Structural Response, *J. Structural Engineering*, Vol.103, No.12, pp.2382-2398, 1987.
- 8) 赤池弘次, 中川東一郎: ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社, 1972.
- 9) 松本勝, 陳新中, 白石成人: 空力連成を考慮した長大橋ガスト応答解析, 第13回風工学シンポジウム論文集, pp.227-232, 1994.
- 10) Wilde, K., Fujino, Y., Bhartia, B.: Active Control of Flutter Instability of Bridge Deck with Rational Function Approximation of Aerodynamic Forces, 第13回風工学シンポジウム論文集, pp.425-430, 1994.
- 11) Wilde, K., Masukawa, J., Fujino Y.: Rational Function Approximation of Bridge Deck Flutter, 土木学会論文集 (印刷中)
- 12) Roger, K.L.: Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design, *AGARD-CP-228*, pp.4.1-4.11, 1977.
- 13) Tiffany, S.H., Adams, W.M., Jr.: Nonlinear Programming Extensions to Rational Function Approximation Methods for Unsteady Aerodynamic Forces, *NASA TP-2776*, 1988.
- 14) 松本泰尚, 藤野陽三: 状態方程式を用いたガスト応答解析の定式化, 日本風工学会平成7年度年次研究発表会梗概集, pp.151-152, 1995.
- 15) 岡内功, 伊藤學, 宮田利雄: 耐風構造, 丸善, 1977.
- 16) Kailath, T.: *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.
- 17) 須田信英: 線形システム理論, 朝倉書店, 1993.
- 18) Davis, M.C.: Factoring the Spectral Matrix, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 8(4), pp.296-305, 1963.
- 19) Bryson, A.E., Ho, Y.C.: *Applied Optimal Control*, Hemisphere, 1975.

(1995. 9. 1 受付)

WIND-INDUCED GUST RESPONSE ANALYSIS BASED ON STATE SPACE FORMULATION

Yasunao MATSUMOTO, Yozo FUJINO and Kichiro KIMURA

This paper discusses a time-domain representation of wind-induced gust response analysis based on state space equations. Wind fluctuation, aerodynamic admittance and structures can be considered as linear filters, respectively, and these filters are described by state space equations. These three sets of equations are combined to obtain one set of equations with the white noise as input and the gust response as output. Frequency-dependent self-excited aerodynamic forces are included in this formulation by introducing frequency-independent finite state approximate model. Aerodynamic coupling and correlation between vibration modes of structure can be systematically considered by this time-domain method.