

# 個別要素法による連続体解析における バネ定数の設定

阿部和久<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

個別要素のバネ定数と要素集合体の巨視的弾性定数との関係を理論的に導いた。個別要素には円形要素を考え、各接触点の半径方向と接線方向にバネを挿入したモデルを対象とした。理論的關係式は、弾性域を対象に滑らかな巨視的変位を仮定し、要素における力とモーメントのつり合い式に対して、要素集合体の変位場の Taylor 展開を導入し、巨視的連続体のつり合い方程式を誘導することにより求めた。理論的考察を通し、ポアソン比が  $1/4$  以下の等方弾性体が個別要素法によって近似可能であることがわかった。一方、ポアソン比が  $1/4$  を越える弾性体に対しては、接線方向のバネ定数の値を負にとる必要があるため、安定な個別要素解析が不可能となる。簡単な解析例を通し、ここに誘導したバネ定数と巨視的材料定数との関係式の妥当性を確認することができた。

**Key Words :** *distinct element method, continuum analysis, spring constants, macroscopic elastic constants*

## 1. はじめに

個別要素法は、ブロック集合体や粉体のような離散体の力学挙動を解析するための一手法である。この解析による場合、集合体を構成する各離散体は、個別要素と呼ばれる多角形や球あるいは円筒形の剛体としてモデル化される。集合体の動的挙動を計算する際のアルゴリズムは極めて単純であり、各要素毎に他の要素との接触判定を行い、接触力を求め、その結果得られた運動方程式を陽的スキームにより時間積分する、という解析手順が採られている。本来この手法は、上述のように離散体の解析を対象としたもので、土のように、変形過程でダイレイタンスを伴い、粒状体としての特性が重要となる問題などに適用されているが、接触要素間のバネにある程度の引張抵抗を持たせることで、コンクリート構造物の衝撃載荷時の破壊のような連続体から離散体までの一連の現象をもシミュレートすることが可能となる。そのため、弾性体のような連続体における動的破壊や衝撃応答解析への個別要素法の適用も、近年多くの研究者により試みられて来ている<sup>1)~5)</sup>。

個別要素法による連続体解析において、最も重要且つ困難な問題は、接触要素間のバネやダッシュポットの物理定数の設定にある。バネ定数やダッシュポットの粘性係数と、集合体の巨視的な材料定数とは密接に関係しているが、上述のような弾性体解析に限って見ても、理論的な対応関係は依然確立されておらず、いずれの適用例においても、経験的または直感的考察に

基づいた設定方法が採られている。このように、経験に基づいて決定されたバネ定数によっても、現象の定性的・定量的評価においてある程度の成果を得ることができるが、バネ定数と巨視的材料定数との理論的關係を明らかにすることができれば、バネ定数の設定過程における曖昧さが排除され、さらに個別要素法の連続体解析への適用限界を知る上でも重要な知見を得ることができる。また、弾性連続体の破壊解析などに適用する場合、破壊時の挙動を適切に表現することは当然重要であるが、それ以前に、弾性域での挙動が適切にモデル化されていることが必要である。個別要素法は、非線形問題を解析するための一手法であるが、連続体の弾性域における挙動が適切に表現できなくては、非線形域での解析自体、定量的に見て信頼性の低い意味の無いものになってしまう。

そこで本研究では、連続体の破壊過程等の解析を念頭に、非線形域に至るまでの弾性域での挙動を正しく表現するために必要となる、接触要素間のバネ定数値の理論的誘導を試みる。著者はこれまで粘性連続体である積雪の変形解析に適用可能な、個別要素解析手法の構成を試みてきた<sup>6)~8)</sup>。その際に、接触点の半径方向にのみダッシュポットを挿入し、接線方向に接触力が作用しないモデルを用いたが、理論的考察を通し、このようなモデルの下では、要素集合体によってポアソン比  $\nu = 1/4$  の等方粘性体が近似できることがわかった。ここでは、半径方向と接線方向の両方にバネを挿入した、より一般的な個別要素モデルを対象に、半径・接線方向のバネ定数  $k_N, k_T$  と要素集合体によって近似

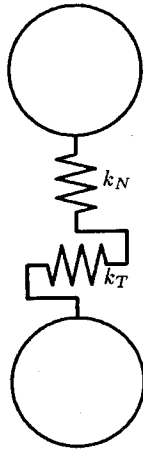


図-1 個別要素間のパネ

される弾性体における材料定数(せん断弾性係数とポアソン比)との関係を理論的に誘導し、 $k_N, k_T$  の設定方法を確立する。なお、本論文では、弾性域を対象とするので、 $k_N$  は引張・圧縮において一定とし、巨視的変形場が十分に滑らかな静的問題について考える。また、簡単な数値解析を通し、理論的に求めた設定値の妥当性を検証する。

## 2. 設定すべきバネ定数の理論的誘導

### (1) ランダムな要素配置の場合

本研究では二次元問題における微小変位下の等方弾性体を対象とする。個別要素としては二次元円形要素を考える。図-1のように、接触要素間には半径方向と接線方向にそれぞれバネ定数  $k_N, k_T$  の線形バネが挿入されているものとする。なお、 $k_N, k_T$  は単位奥行き当りのバネ定数である。また、 $k_N$  は引張、圧縮のいずれに対しても等しい値をとり、接線方向への滑りは一切生じず、変形過程において接触状態は保持され続けるものとする。

以下では平面ひずみ問題を対象に議論を進めるが、平面応力問題の場合には、平面ひずみ問題におけるポアソン比  $\nu$  を単に  $\nu/(1+\nu)$  に置き換えればよい。

図-2 に示すような、着目要素 A とそれに接触している要素 B を考える。要素 A から見た要素 B の相対変位を  $\mathbf{u}^{BA}$ 、各要素の回転角を  $\vartheta_A, \vartheta_B$  とすると、要素 B から要素 A に作用する半径方向力  $\mathbf{F}_N^B$ 、接線方向力  $\mathbf{F}_T^B$ 、およびモーメント  $M^B$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$\mathbf{F}_N^B = k_N(\mathbf{u}^{BA} \cdot \mathbf{n}^B)\mathbf{n}^B \quad (1)$$

$$\mathbf{F}_T^B = k_T[(\mathbf{u}^{BA} \cdot \mathbf{s}^B) - a(\vartheta_A + \vartheta_B)]\mathbf{s}^B \quad (2)$$

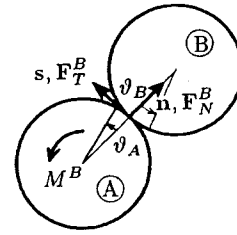


図-2 接触要素間における諸量の定義

$$M^B = k_T a[\mathbf{u}^{BA} \cdot \mathbf{s}^B - a(\vartheta_A + \vartheta_B)] \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{n}^B, \mathbf{s}^B$  は接触点における半径(外向き法線)方向単位ベクトルおよび接線方向単位ベクトル、 $\mathbf{n}$  は内積、 $a$  は要素半径である。なお、ここでは全要素に対して要素半径は  $a$  で一定とするが、要素半径が一樣でない場合には、その平均値を  $a$  と考える。

式(1)~(3)より、要素 A に作用する接触力とモーメントを、ベクトル成分で書き表すと次のようになる。

$$F_i^B = (k_N n_i^B n_j^B + k_T e_{ki} e_{lj} n_k^B n_l^B) u_j^{BA} - k_T a(\vartheta_A + \vartheta_B) e_{ki} n_k^B \quad (4)$$

$$M^B = k_T a[e_{mn} n_m^B u_n^{BA} - a(\vartheta_A + \vartheta_B)] \quad (5)$$

ここで、 $F_i^B$  は  $\mathbf{F}_N^B + \mathbf{F}_T^B$  の成分であり、繰り返し指標は総和規約に従うものとする。また、 $e_{ij}$  は交代記号である。

以上より、全ての接触力下における要素 A の、力およびモーメントのつり合い式は次式で与えられることとなる。

$$\sum_B [(k_N n_i^B n_j^B + k_T e_{ki} e_{lj} n_k^B n_l^B) u_j^{BA} - k_T a(\vartheta_A + \vartheta_B) e_{ki} n_k^B] + \rho \pi a^2 X_i = 0 \quad (6)$$

$$\sum_B k_T a[e_{mn} n_m^B u_n^{BA} - a(\vartheta_A + \vartheta_B)] = 0 \quad (7)$$

ここで、 $\rho$  は要素の質量密度、 $\rho \pi a^2 X_i$  は物体力である。なお、外力としてモーメントは作用しないものとする。また、個別要素法では運動方程式に基づいた動的解析が行われるが、議論を簡潔にするため、静的な問題を対象に考え、 $\ddot{u}_j^{BA} = \ddot{\vartheta}_A = \ddot{\vartheta}_B = 0$  としている。

式(6)は1要素当りのつり合い式であるが、その集合体としての平均量を求めれば、巨視的連続体のつり合い方程式を誘導することができる。そこで巨視的変位場は十分に滑らかであるものとし、まず相対変位  $u_i^{BA}$  と要素回転  $\vartheta_B$  を要素 A での Taylor 展開で以下のように表しておく。

$$u_j^{BA} = 2a u_{j,m}^A n_m^B + 2a^2 u_{j,mn}^A n_m^B n_n^B + \dots, \quad \vartheta_B = \vartheta_A + 2a \vartheta_{A,m} n_m^B + 2a^2 \vartheta_{A,mn} n_m^B n_n^B + \dots \quad (8)$$

ただし,  $(\cdot)_{,m}$  は空間座標  $x_m$  による偏微分を意味し,  $u_{j,m}^A$  は要素 A におけるその値である. なお, 以下では簡単のため, 着目点 A における値であることを示す添字  $(\cdot)_A, (\cdot)^A$  は省略する.

式(8)を(6),(7)に代入し, さらに, 要素集合体全体として見たときの接触点の角度分布を与える, 確率密度関数  $\psi(\theta)$ (接触点密度関数<sup>8)</sup>)を導入して, 接触点に関する総和を積分に変換すると, 次式を得る.

$$\int_0^{2\pi} [(k_N n_i n_j + k_T e_{ki} e_{lj} n_k n_l)(2a u_{j,m} n_m + 2a^2 u_{j,mn} n_m n_n + \dots) - k_T a(2\vartheta + 2a\vartheta_{,m} n_m + 2a^2 \vartheta_{,mn} n_m n_n + \dots) e_{ki} n_k] \psi d\theta + \rho \pi a^2 X_i = 0 \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} k_T a [e_{mn} n_m (2a u_{n,k} n_k + 2a^2 u_{n,kl} n_k n_l + \dots) - a(2\vartheta + 2a\vartheta_{,m} n_m + 2a^2 \vartheta_{,mn} n_m n_n + \dots)] \psi d\theta = 0 \quad (10)$$

ここで  $\theta$  は要素中心と接触点とを結ぶ径が水平座標軸となす角度であり,  $\psi(\theta)$  は角度  $\theta$  において単位ラジアン当りに存在する接触点数である.

文献7)に示したように, 接触点分布が方向性を持つ場合, 単一のバネ定数の下で与えられる要素集合体の巨視的性質は, 異方性を示すこととなる. そこで, 集合体が接触状態  $\psi$  に依らずに等方性を持つように, 文献7)と同様に, バネ定数  $k_N, k_T$  を接触点毎に次式に基づき補正する方法を採るものとする.

$$k_N(\theta) = \frac{\bar{k}_N}{\psi(\theta)}, \quad k_T(\theta) = \frac{\bar{k}_T}{\psi(\theta)} \quad (11)$$

ここで,  $\bar{k}_N, \bar{k}_T$  は解析対象としている連続体に合わせ設定すべき定数である. 式(11)に従い,  $k_N, k_T$  が設定されたならば, 式(9),(10)は次のようになる.

$$2a^2 \bar{k}_N u_{j,mn} C_{ijmn} + 2a^2 \bar{k}_T (u_{j,mn} e_{ki} e_{lj} C_{klmn} - \vartheta_{,m} e_{ki} C_{mk}) + \rho \pi a^2 X_i = 0 \quad (12)$$

$$2a^2 \bar{k}_T u_{n,k} e_{mn} C_{mk} - 2a^2 \bar{k}_T \vartheta C = 0 \quad (13)$$

ただし, ここで Taylor 展開による高次の項は省略し, 主要項のみ示した. また, 上式における  $C, C_{ij}, C_{ijkl}$  は次式で与えられる係数である.

$$C := \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi, \\ C_{ij} := \int_0^{2\pi} n_i n_j d\theta = \pi \delta_{ij}, \\ C_{ijkl} := \int_0^{2\pi} n_i n_j n_k n_l d\theta = \frac{\pi}{4} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (14)$$

ここで,  $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである.

式(13)より, 要素回転角  $\vartheta$  は変位成分を用いて次式で与えられる.

$$\vartheta = u_{n,k} e_{mn} \frac{C_{mk}}{C} \quad (15)$$

式(15)を微分して,  $\vartheta$  の導関数が次のように得られる.

$$\vartheta_{,j} = u_{n,kj} e_{mn} \frac{C_{mk}}{C} \quad (16)$$

式(16)を(12)に代入し,  $\vartheta$  に関する項を消去すると, 次式を得る.

$$2a^2 \bar{k}_N u_{j,mn} C_{ijmn} + 2a^2 \bar{k}_T u_{j,mn} e_{ki} e_{lj} (C_{klmn} - \frac{1}{C} C_{lm} C_{kn}) + \rho \pi a^2 X_i = 0 \quad (17)$$

すると, 最終的に次のような要素集合体の巨視的つり合い方程式を得る.

$$\frac{\gamma}{2\rho} (\bar{k}_N + \bar{k}_T) u_{i,mm} + \frac{\gamma}{\rho} \bar{k}_N u_{m,mi} + \gamma X_i = 0 \quad (18)$$

ここで,  $\gamma$  は要素集合体の巨視的密度である.

一方, 等方弾性体における平面ひずみ状態でのつり合い方程式は次式のように与えられる.

$$G u_{i,mm} + \frac{G}{1-2\nu} u_{m,mi} + \gamma X_i = 0 \quad (19)$$

ただし,  $G$  はせん断弾性係数,  $\nu$  はポアソン比である.

式(18)で与えられる巨視的連続体のつり合い方程式を, 式(19)の弾性体のそれに一致させるためには, 両式の比較により,  $\bar{k}_N, \bar{k}_T$  を次のように設定すればよいことがわかる.

$$\bar{k}_N = \frac{\rho G}{\gamma} \cdot \frac{1}{1-2\nu}, \quad \bar{k}_T = \frac{\rho G}{\gamma} \cdot \frac{1-4\nu}{1-2\nu} \quad (20)$$

また, 式(11)より, 各接触点におけるバネ定数は次のように設定すればよい.

$$k_N = \frac{\rho G}{\gamma} \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{\psi}, \\ k_T = \frac{\rho G}{\gamma} \cdot \frac{1-4\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{\psi} \quad (21)$$

さらに, 式(20),(21)より,  $\nu$  は  $k_T/k_N$  によって次のように与えられる.

$$\nu = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{k_T}{k_N} \right) \quad (22)$$

式(22)より, 例えば,  $k_T = k_N$  の場合に  $\nu = 0$  となり,  $k_T = 0$  の場合に  $\nu = 1/4$  となることがわかる.  $k_N = k_T$  の場合, 図-3のように, 接触力は接触点間の相対変位ベクトルに平行となるので, 要素が鉛直方向に相対移動した場合, 接触力は鉛直成分のみ持ち, 水平成分は生じない. したがって, 水平変位は生じ得ず, 結果として  $\nu = 0$  を得る. なお,  $k_T = 0$ , すなわち接触線方向にバネを挿入しない場合に  $\nu = 1/4$  となることは, 既に文献7)において示したが, 本研究で誘導した結論がそこでの議論を包含していることが確認できる. また, 上式より,  $\nu > 1/4$  とするためには  $k_T < 0$  とす

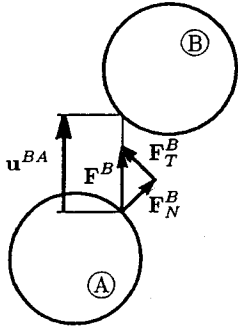


図-3  $k_N = k_T$  における接触力

る必要のあることがわかる。個別要素法では、準静的挙動を対象とする場合においても、運動方程式に基づいた動的解析が行われるため、バネ定数  $k_T$  を負にとることは、不安定解の発生を招き実際には適用不可能である。したがって、一般に個別要素解析では、等方弾性体を対象と考えれば、 $\nu \leq 1/4$  の連続体のみが解析可能となる。なお、一般の弾性体では  $\nu > 1/4$  となる場合も多いが、接触点において接線と法線方向にバネを挿入した個別要素モデルでは、このような問題は表現不可能であり、さらに何らかの工夫が必要である。

## (2) 直交格子状の要素配列の場合

個別要素法を連続体解析に適用する場合に、規則的な要素配列により解析対象領域を表現している例が多い。そこで、最も多用されている要素配列として、ここでは直交格子状のものを、また、2.(3)では最密配列のものを例に、バネ定数と巨視的材料定数との関係や、個別要素法の適用範囲について調べる。

全てのバネのバネ定数は一定値にとるものとする。図-4のように直交格子状に要素を配置した場合、各要素における接触点は  $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  の4点となり、

$$\begin{aligned} C' &:= \int_0^{2\pi} \psi \, d\theta = 4, \\ C'_{ij} &:= \int_0^{2\pi} n_i n_j \psi \, d\theta = 2\delta_{ij}, \\ C'_{ijkl} &:= \int_0^{2\pi} n_i n_j n_k n_l \psi \, d\theta \\ &= 2(\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k1}\delta_{l1} + \delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k2}\delta_{l2}) \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

式(23)を(9),(10)に代入すると、式(12),(13)に対応する次式を得る。

$$\begin{aligned} &2a^2 k_N u_{j,mn} C'_{ijmn} \\ &+ 2a^2 k_T (u_{j,mn} e_{ki} e_{ij} C'_{klmn} - \vartheta_{,m} e_{ki} C'_{mk}) \end{aligned}$$

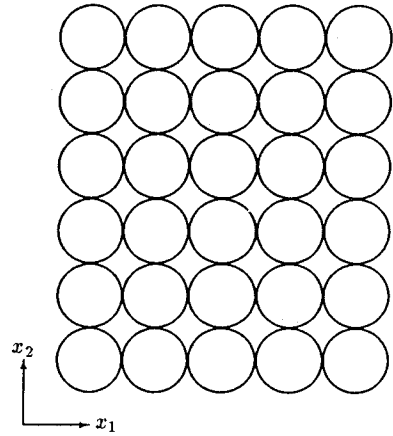


図-4 直交格子状の要素配列

$$+ \rho \pi a^2 X_i = 0 \quad (24)$$

$$2a^2 k_T u_{n,k} e_{mn} C'_{mk} - 2a^2 k_T \vartheta C' = 0 \quad (25)$$

式(25)より、 $\vartheta$  は変位成分を用いて次のように与えられる。

$$\vartheta = u_{n,k} e_{mn} \frac{C'_{mk}}{C'} \quad (26)$$

よって、

$$\vartheta_{,j} = u_{n,kj} e_{mn} \frac{C'_{mk}}{C'} \quad (27)$$

式(27)を(24)へ代入すると、式(17)に対応した次式を得る。

$$\begin{aligned} &2a^2 k_N u_{j,mn} C'_{ijmn} \\ &+ 2a^2 k_T u_{j,mn} e_{ki} e_{ij} (C'_{klmn} - \frac{1}{C'} C'_{lm} C'_{kn}) \\ &+ \rho \pi a^2 X_i = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、 $C'$ 、 $C'_{ij}$ 、 $C'_{ijkl}$  の各係数に式(23)の具体的な値を用いると、次のつり合い方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\gamma}{\pi\rho} k_N u_{1,11} + \frac{2\gamma}{\pi\rho} k_T (u_{1,22} + u_{2,21}) + \gamma X_1 &= 0 \\ \frac{4\gamma}{\pi\rho} k_N u_{2,22} + \frac{2\gamma}{\pi\rho} k_T (u_{2,11} + u_{1,12}) + \gamma X_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式(29)を式(19)の弾性体におけるつり合い方程式と比較すると、 $\nu = 0$  の場合に対してのみ、

$$k_N = k_T = \frac{\pi\rho}{4\gamma} E \quad (E: \text{ヤング率}) \quad (30)$$

とすることで式(29)と(19)とが一致することがわかる。なお、直交格子配列においては、 $\rho/\gamma = 4/\pi$  となるので、結局

$$k_N = k_T = E \quad (31)$$

とする場合に限り  $\nu = 0$  の弾性体が表現でき、ポアソン比が他の値をとるものは表現不可能であることがわかる。

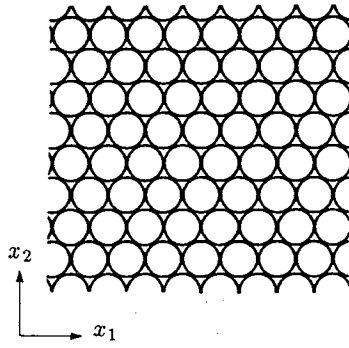


図-5 最密要素配列

図-4のように、要素が水平、鉛直方向に配置されている場合、例えば水平方向に一樣な引張を与えても、鉛直方向への収縮は生じ得ない。このような簡単な物理的考察からも  $\nu = 0$  以外の弾性体は表現不可能であることが理解できる。なお、接触点は周方向に等間隔に分布しているので、巨視的性質に方向性はなく、格子を斜め  $45^\circ$  に傾けた配置でも、やはり  $\nu = 0$  以外の弾性体を得ることはできない。

### (3) 最密要素配列の場合

図-5のように、要素配置が最密格子状の場合を考える。定式過程は 2.(2) と全く同じである。ただし、この場合、

$$\begin{aligned} C' &:= \int_0^{2\pi} \psi \, d\theta = \delta, \\ C'_{ij} &:= \int_0^{2\pi} n_i n_j \psi \, d\theta = 3\delta_{ij}, \\ C'_{ijkl} &:= \int_0^{2\pi} n_i n_j n_k n_l \psi \, d\theta \\ &= \frac{3}{4} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。

式(32)を(28)に代入すると次の方程式を得る。

$$\frac{\gamma}{\rho\pi} \cdot \frac{3}{2} (k_N + k_T) u_{i,mm} + \frac{\gamma}{\rho\pi} 3k_N u_{m,mi} + \gamma X_i = 0 \quad (33)$$

また、いまの場合、 $\gamma/\rho = \pi/(2\sqrt{3})$  となり、式(19)との比較により、平面ひずみ問題においては  $k_N, k_T$  を次のように設定すればよいことがわかる。

$$k_N = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{G}{1-2\nu}, \quad k_T = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-4\nu}{1-2\nu} G \quad (34)$$

すると、ランダムな要素配置の場合と同様に、最密配列においても、 $\nu \leq 1/4$  の弾性体が個別要素により表現可能であることがわかる。

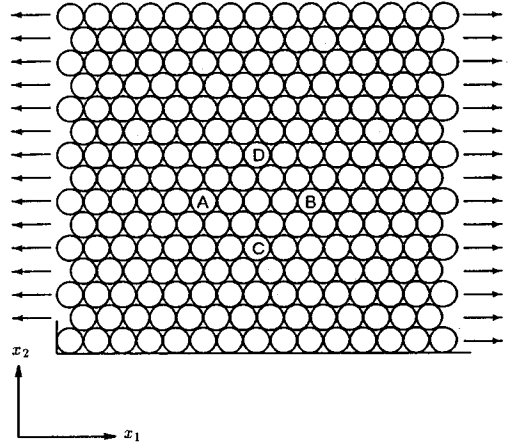


図-6 解析条件

### 3. 数値解析による検証

2. に誘導したバネ定数と巨視的弾性体の材料定数との関係式の妥当性を検証する目的で、簡単な具体例を解析した。解析対象は図-6に示すような、最密配列の集合体である。応力条件は水平方向に一樣な引張場とし、左右端の要素に一定荷重を与え、最下列の要素の鉛直方向変位と、左下端要素の水平・鉛直方向変位を拘束するような境界条件の設定を行った。なお、式(34)の妥当性の検証が目的であるので、ここでは個別要素法を用いた動的解析の代わりに、マトリックス法に基づく静的解析を行い、各要素の変位を求めた。解析結果における水平方向直応力  $\sigma_{11}$  には、外力の合計を集合体の高さで除した値を用いた。また、水平、鉛直方向のひずみ量  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  は図-6に示した要素 A-B, C-D 間の相対変位量に基づき求めた。

まず、ポアソン比  $\nu$  と  $k_T/k_N$  との関係解析結果より求めたものを、式(34)より得られる関係式と比較すると図-7のようになる。なお、解析では平面ひずみ条件を考慮の上、 $\nu$  を次式で求めた。

$$\nu = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} \quad (35)$$

一方、式(34)から得られる  $\nu$  と  $k_T/k_N$  との関係は、ランダムな要素配置に対して得られた関係式(22)に一致する。前述のように、実際の個別要素解析では  $k_T/k_N < 0$  は無意味であるが、静的解析法による場合、 $k_T/k_N < 0$  に対しても解が求まるので、図にはそのような範囲での値もプロットしてある。 $k_T/k_N < 0$  において解析結果に乱れが認められる。 $k_T/k_N < 0$  に対する静的解析の挙動自体は本研究の本題ではないので、解の乱れについては特に議論しないが、 $k_T/k_N < -1/3$  に対してこ

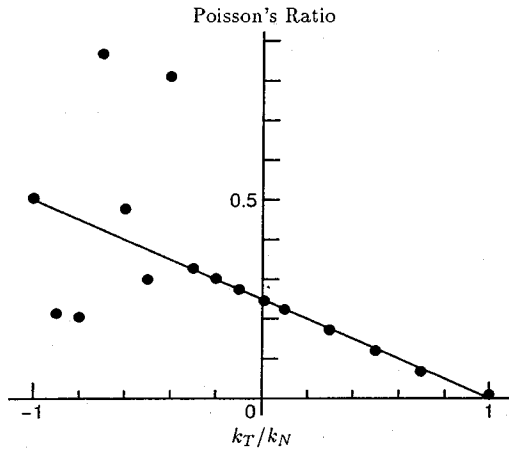


図-7  $\nu$  と  $k_T/k_N$  との関係の比較。●:解析結果, —:式 (22)

の傾向が現れたことを付言する。なお、 $k_T/k_N \geq -1/3$  に対しては、解析結果と理論式 (22) との間に非常に良い一致が認められており、本研究で導出した理論式の妥当性が確認できる。

次に、集合体の剛性に対する理論的評価の妥当性を検証するために、 $2G/[(1-\nu)k_N]$  と  $k_T/k_N$  との関係を調べた。なお、数値解析において、この値は次式により評価した。

$$\frac{2}{1-\nu} \cdot \frac{G}{k_N} = \frac{\sigma_{11}}{k_N \varepsilon_{11}} \quad (36)$$

一方、式 (34) より、この値と  $k_T/k_N$  との理論的關係は次式で与えられる。

$$\frac{2}{1-\nu} \cdot \frac{G}{k_N} = 2\sqrt{3} \frac{1 + \frac{k_T}{k_N}}{3 + \frac{k_T}{k_N}} \quad (37)$$

式 (36) より求めた解析結果と、式 (37) とを図示すると図-8 のようになる。なお、図には  $0 < k_T/k_N \leq 1$  の範囲における結果を示してある。図より、個別要素解析において通常適用されるような  $k_T/k_N$  の範囲においては、解析結果と理論式との間に極めて良い一致が認められていることがわかる。

以上の数値実験を通し、本研究で誘導したバネ定数の理論的設定値の妥当性が確認できた。なお、不均一粒径の要素集合体の場合、式 (21) における  $\psi$  が適切に評価できれば、文献 7), 8) に示したように、ほぼ妥当な結果を得ることができる。

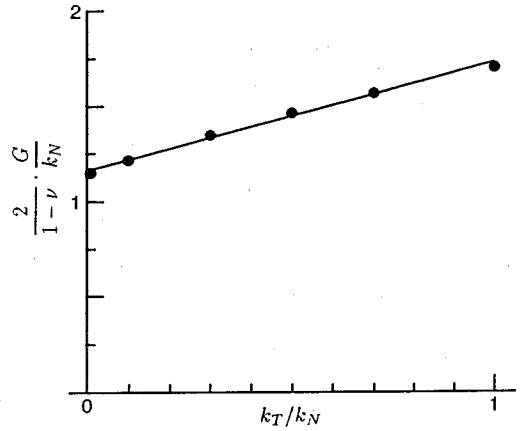


図-8  $2G/[(1-\nu)k_N]$  と  $k_T/k_N$  との関係の比較。●:解析結果, —:式 (37)

#### 4. 要素集合体の巨視的応力に基づく検討

##### (1) 規則的な要素配置における巨視的応力

実際の連続体解析では、要素間の接触力よりも、巨視的応力度の分布の方が重要となることが多い。規則的な要素配置における、要素単位での巨視的応力度  $\sigma_{ij}$  の評価は以下のようにしてなされる<sup>9)</sup>。

まず、要素内の応力を  $\tilde{\sigma}_{ij}$ 、その体積平均応力を  $\sigma_{ij}^p$  とする。

$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} \tilde{\sigma}_{ij} dV \quad (38)$$

ここで、 $V_p$  は要素体積である。

物体力を  $\rho X_i$  とすると、 $\tilde{\sigma}_{ij}$  におけるつり合い式は次式となる。

$$\tilde{\sigma}_{ik,k} + \rho X_i = 0 \quad (39)$$

式 (38), (39) より、 $\sigma_{ij}^p$  は次式のように書くことができる。

$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} [\tilde{\sigma}_{ij} + r_j (\tilde{\sigma}_{ik,k} + \rho X_i)] dV \quad (40)$$

ここで、 $r_j$  は位置ベクトルである。

式 (40) において、

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ik} \delta_{kj} = \tilde{\sigma}_{ik} r_{j,k} \quad (41)$$

となるので、 $\sigma_{ij}^p$  はさらに以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^p &= \frac{1}{V_p} \int_{V_p} [(\tilde{\sigma}_{ik} r_{j,k} + r_j \tilde{\sigma}_{ik,k}) + r_j \rho X_i] dV \\ &= \frac{1}{V_p} \left( \int_{S_p} r_j \tilde{\sigma}_{ik} n_k ds + \rho X_i \int_{V_p} r_j dV \right) \\ &= \frac{1}{V_p} \left( \int_{S_p} r_j p_i ds + \rho X_i \int_{V_p} r_j dV \right) \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、 $p_i$  は要素表面力、 $S_p$  は要素表面 (円周) である。

式 (42) で  $r_j$  を要素重心の位置ベクトル  $\bar{r}_j$  と、重心から積分点までのベクトル  $a_j$  に分離する。

$$r_j = \bar{r}_j + a_j \quad (43)$$

式 (43) を (42) に代入すると、次式を得る。

$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{V_p} [\bar{r}_j \left( \int_{S_p} p_i ds + \rho X_i V_p \right) + \int_{S_p} a_j p_i ds + \rho X_i \int_{V_p} a_j dV] \quad (44)$$

ここで、力のつり合いより、

$$\int_{S_p} p_i ds + \rho X_i V_p = 0 \quad (45)$$

また、

$$\int_{V_p} a_j dV = 0 \quad (46)$$

よつて、 $\sigma_{ij}^p$  は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{V_p} \int_{S_p} a_j p_i ds \quad (47)$$

要素単位の巨視的応力  $\sigma_{ij}$  は  $\sigma_{ij}^p$  を用い次式で定義できる。

$$\sigma_{ij} = \frac{V_p}{V} \sigma_{ij}^p \quad (48)$$

ここで  $V$  は要素  $p$  に代表される集合体の領域体積である。また、個別要素における表面力  $p_i$  は、接触点に作用する集中力として与えられるので、式 (47) は次のように書き換えられる。

$$\sigma_{ij}^p = \frac{a}{V_p} \sum F_i n_j \quad (49)$$

ここで、総和は着目要素の全接触点に関してとる。また、 $V_p = \pi a^2, V_p/V = \gamma/\rho$  となるので、式 (48),(49) より、次の応力評価式を得る。

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{1}{\pi a} \sum F_i n_j \quad (50)$$

## (2) 最密要素配列における巨視的応力

最密要素配列の場合、式 (4),(8),(26),(32) より、 $\sum F_i n_j$  は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sum F_i n_j &= 2ak_N u_{m,n} \sum n_i n_j n_m n_n \\ &\quad + 2ak_T u_{m,n} e_{ki} e_{lm} \sum n_j n_k n_l n_n \\ &\quad - 2ak_T u_{m,n} e_{lm} e_{ki} \frac{1}{2} \delta_{ln} \sum n_k n_j \\ &= \frac{3a}{2} k_N u_{m,n} (\delta_{ij} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \\ &\quad + \frac{3a}{2} k_T u_{m,n} e_{ki} e_{lm} (\delta_{jk} \delta_{ln} \\ &\quad \quad + \delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{kl}) \\ &\quad - 3ak_T u_{m,n} e_{lm} e_{ki} \delta_{ln} \delta_{kj} \\ &= \frac{3a}{2} (k_N - k_T) \delta_{ij} \epsilon_{mm} \\ &\quad \quad + 3a(k_N + k_T) \epsilon_{ij} \end{aligned} \quad (51)$$

ただし、 $\epsilon_{ij}$  はひずみテンソルであり、

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

である。

式 (51) の  $k_N, k_T$  に式 (34) を代入し、さらにその結果を (50) に代入すると、 $\gamma/\rho = \pi/(2\sqrt{3})$  より、次の応力-ひずみ関係を得る。

$$\sigma_{ij} = G \left( \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{mm} + 2\epsilon_{ij} \right) \quad (52)$$

これは、等方弾性体の応力-ひずみ関係式に一致している。以上より、今の場合、式 (50) により巨視的応力が評価可能であることが確認できる。なお、不均一粒径の要素集合体においては、応力場に多少のばらつきが認められるが、同様の手順によりほぼ適切な応力評価が可能である<sup>10)</sup>。

## (3) 要素回転を拘束した場合

個別要素の配列を一種の差分格子と見なせば、要素回転は与えず、要素の並進変位だけ許すようなモデルによっても連続体の変形場は表現可能に思われる。なお、土粒子の場合などと異なり、要素回転を考慮することが本質的に重要でないと思われる問題、例えば、コンクリートなどの連続体を対象とする場合、回転がなければそれだけ解析アルゴリズムは簡潔になるので、適用の意義はありそうに思われる。実際、このようなモデルでは、力のつり合い式が接触要素間の相対変位量だけから与えられ、その結果として式 (6) に対応したつり合い式より一種の差分式を得る。また、2. と同様の考察により、例えば最密要素配列に対しては、 $k_N, k_T$  を次のように設定することで、連続体における力のつり合い方程式が近似できることがわかる。

$$k_N = \frac{\sqrt{3}(5-4\nu)}{6(1-2\nu)} G, \quad k_T = \frac{\sqrt{3}(1-4\nu)}{6(1-2\nu)} G \quad (53)$$

この場合の巨視的応力を式 (50) に基づいて求めてみる。まず、要素回転が生じないので、接触力は次式のように与えられる。

$$F_i = 2ak_N u_{m,n} n_i n_m n_n + 2ak_T u_{m,n} e_{i,m} e_{k,i} n_l n_k n_n \quad (54)$$

すると、

$$\sum F_i n_j = 2ak_N u_{m,n} \sum n_i n_j n_m n_n + 2ak_T u_{m,n} e_{i,m} e_{k,i} \sum n_l n_k n_n n_j$$

最密要素配列に対しては、

$$\begin{aligned} &= \frac{3a}{2} k_N [\delta_{1i} \delta_{1j} (3u_{1,1} + u_{2,2}) \\ &\quad \quad + (\delta_{1i} \delta_{2j} + \delta_{2i} \delta_{1j}) (u_{1,2} + u_{2,1})] \\ &\quad + \frac{3a}{2} k_T [(\delta_{1i} \delta_{1j} - \delta_{2i} \delta_{2j}) (u_{1,1} - u_{2,2}) \\ &\quad \quad + \delta_{1i} \delta_{2j} (3u_{1,2} - u_{2,1}) \\ &\quad \quad + \delta_{2i} \delta_{1j} (-u_{1,2} + 3u_{2,1})] \end{aligned} \quad (55)$$

式 (55) の最後の 2 つの項は,  $i$  と  $j$  について対称となっていない。よって一般に  $\sum F_{in_j} \neq \sum F_{jn_i}$  であり, 応力の対称性が成り立っていない。これは, 各要素回転を拘束したことで, 要素に外力モーメントが作用することが原因である。このことより, 要素回転を拘束したモデルでは, 連続体の変形場を近似することはできるが,  $k_T = 0$  でない限り, 式 (50) に基づいた巨視的応力の評価は不可能であることがわかる。

## 5. 結論

個別要素法を連続体の破壊解析などに適用する場合を念頭に, 弾性域において設定すべきバネ定数を理論的に求め, 数値実験を通し, その妥当性を確認した。本研究で得た結論は以下のとおりである。

- (a) ランダムな要素配置で平面ひずみ状態の弾性体を近似するには, 接触要素間のバネ定数を式 (21) により設定すればよい。
- (b) 最密な規則的要素配列の場合は, バネ定数を式 (34) により設定すればよい。
- (c) 個別要素法では, 平面ひずみ問題において, ポアソン比が  $\nu \leq 1/4$  の弾性体が表現可能であるが,  $\nu > 1/4$  の場合は, 接線方向のバネ定数を負の値に設定する必要があり, 安定な解析を行うことができず, 表現不可能である。
- (d) 直交格子状の規則的な要素配列においては,  $\nu = 0$  以外の弾性体は表現不可能である。
- (e) 規則的要素配置の場合における要素単位での巨視的応力は, 式 (50) で評価することができる。
- (f) 要素回転を拘束した特殊なモデルでは, 要素回転を拘束するためのモーメントが作用する

ため, 式 (50) に基づいた巨視的応力の評価では, 応力テンソルの対称性が成り立たない。

なお, 本研究では, 弾性体を対象としたが, 粘性体や粘弾性体などの解析においても同様の議論が成り立つ。

## 参考文献

- 1) 下田義文, 鈴木真次, 石川信隆, 古川浩平: 個別要素法によるモルタル片持ばりの衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol.38A, 1467-1476, 1992.
- 2) 榎谷浩, 中田吉彦, 梶川康男: 個別要素法の衝撃問題への適用に関する一考察, 構造工学論文集, Vol.38A, 1477-1486, 1992.
- 3) Meguro, K. and Hakuno, M.: Fracture analysis of concrete structures by the modified distinct element method, *Proc. of JSCE*, No.410, 113-124, 1989.
- 4) Meguro, K. and Hakuno, M.: Application of the extended distinct element method for collapse simulation of a double-deck bridge, *Proc. of JSCE*, No.483, 17-27, 1994.
- 5) 白井孝治, 伊藤千浩, 大沼博志: 飛来物の衝突に対するコンクリートスラブの局部破壊解析への個別要素法の適用性, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第 15 巻, 409-414, 1991.
- 6) 阿部和久, 宮野裕一: 積雪変形解析のための個別要素解析手法, 構造工学論文集, Vol.38A, 339-350, 1992.
- 7) 阿部和久, 青木究: 積雪の比較的大きな変形を対象とした個別要素解析手法, 構造工学論文集, Vol.40A, 385-394, 1994.
- 8) 阿部和久, 金子正浩: 個別要素積雪変形解析における接触点密度関数の評価, 構造工学論文集, Vol.41A, 377-384, 1995.
- 9) Thornton, C. and Barnes, D.J.: Evolution of stress and structure in particulate material, Chap.11 in: *Applied Solid Mechanics -1*, (eds. A.S.Tooth and J.Sparce), Elsevier, 1986.
- 10) 阿部和久, 後藤嘉雄: 個別要素集合体の巨視的応力度の評価, 第 1 回日本計算工学会論文集, 1996, 発表予定.

(1995. 9. 4 受付)

## SPRING CONSTANTS OF DISTINCT ELEMENT IN CONTINUUM ANALYSIS

Kazuhisa ABE

The relationship between spring constants of distinct element and macroscopic elastic constants (shear modulus;  $G$  and Poisson's ratio;  $\nu$ ) of the element assembly is derived theoretically. As the distinct element, circular disc with the normal and tangential springs at the interelement contact points is considered for two-dimensional model. The theoretical investigation is carried out through the derivation of equilibrium equation of the elastic body from the equilibrium conditions of distinct element, based on the assumption that the displacement field of the assembly is smooth enough to be introduced the Taylor expansion. It is found that elastic body with  $\nu \leq 1/4$  can be approximated by the distinct element method.