

集中衝撃移動荷重を受ける 弾性基礎上の厚板の過渡波動伝播解析

石川清志¹・依田照彦²・平嶋政治³

¹正会員 工博 信州大学技官 工学部社会開発工学科 (〒380 長野市若里 500)

²正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科 (〒169 東京都新宿区大久保 3-4-1)

³正会員 工博 早稲田大学名誉教授 理工学部土木工学科 (〒169 東京都新宿区大久保 3-4-1)

本論文では弾性基礎上に横たわる無限厚板の過渡波動伝播現象を解析する一手法を Fourier 変換と固有関数を用いて提案している。基礎からの反力は基礎に接する厚板底面の変位に比例するという Winkler の仮定を用いた。静止している厚板の表面に集中荷重が衝撃的に負荷され、直ちに定速度で移動する問題を取り上げ、載荷点から少し離れた厚板内のある一空間点に注目し、静止から最初の波面到達によって引き起こされる初期の擾乱、ならびに後続到達する波動の伝播速度、伝播経路等の違いによって誘起される擾乱を境界での反射現象と関連づけて明らかにした。

Key Words : transient waves, thick plate, reflection, elastic foundation, eigenfunctions, moving loads

1. まえがき

弾性基礎上の板の曲げ解析には基礎を Winkler 弾性基礎と考えるもの、半無限弾性体と考えるものに分けられる。前者は粘弾性基礎、弾塑性基礎への拡張が容易であるが、解析に用いる基礎弾性係数 (foundation modulus) の決定が難しいとされる¹⁾。とくに動的問題では、基礎体の慣性効果を考慮できないことや、自由縁を有する板などに現れる、時間変化の振動による局部的浮き上がりによる負反力の扱い方などに課題が残されている。一方、後者はより精密な解析であるものの、解析の困難さが欠点となっている。これら2つの考え方と別なものとしては、梁の曲げ振動問題ではあるが、基礎は縦振動するロッドの集合体とみなし、梁の曲げたわみと基礎の縦振動変位を連成させ、基礎の慣性効果をも考慮しようとする研究²⁾もある。

半無限体上の表面層 (あるいは厚板) の問題において、Love の表面波は、Rayleigh 波と異なり分散性を有し、半無限体の横波伝播速度が表面層のそれより大きい場合に、はじめてこの表面波は存在する。半無限体、表面層の横波伝播速度はそれぞれの横弾性係数、密度に関係することから、半無限体の弾性係数が表面層のものと比較して近い、あるいは小さい場合には Love の表面波の問題として扱うことが困難となる³⁾。このようなことから、比較的軟弱な基礎にある厚板など、基礎の弾性係数が厚板のものと比較して小さい場合には Love の表面波の問題として扱うことが難しいことになる。このような場合、軟弱基礎を Winkler 弾性基礎と

仮定するならば、境界条件の扱い方で2層問題が1層の問題に置き変わり解析は簡単になる。また基礎をバネで置き換えることにより解析の適用範囲が広がる。

移動荷重を受ける2次元動的問題は最初 Lamb⁴⁾によって定式化され、その後 Sneddon⁵⁾、Cole⁶⁾らによって発展された。それらは線荷重が一定速度で弾性半空間上を移動する問題を対象にしており、荷重が加えられ、移動し始めてから十分時間が経過した後の定常応答を調べたものである。それ故、載荷の瞬間には弾性波が発生するものの、はじめの擾乱の伝播にはふれていない。これらは古典弾性学の問題に属するが、移動荷重の研究は核爆発の圧力波に基づく地殻の挙動を明らかにするうえで工学上きわめて重要であるとして、当時多くの注目を集めた⁷⁾。

移動荷重を受ける2次元動的問題の解析は意外と少なく、Gakenheimer⁸⁾らは半無限体上を集中荷重が一定速度で移動する問題を変位ポテンシャル理論に基づく波動方程式の解、ならびに時間変数消去に Laplace 変換を用いて解いた。Sandler⁹⁾らは荷重が半無限体上を Rayleigh 波伝播速度で移動する問題を扱い、移動荷重の直前に生じる応力の特異性について論じた。

小林^{10),11),12)}らは構造物の衝撃破壊を解明するために、衝撃荷重を受ける合成梁などの問題を精密に解いた。その中で衝撃問題では一般となっている時間変数消去の Laplace 変換より、固有関数による解法の有用性を指摘している。

本研究は過渡波動伝播解析^{13),14)}をさらに発展させるもので、2次元動的問題における一般的解法である、

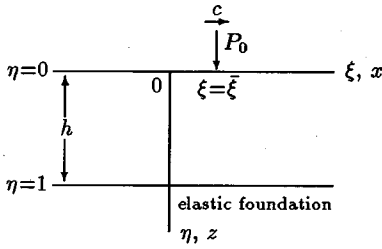


図-1 弾性基礎上の無限厚板

波動方程式を基本解とする変位ポテンシャル理論と時間変数消去の Laplace 変換^{15),16)}を用いず、Fourier 変換と固有関数を用いて、連立偏微分方程式で表された運動方程式が境界条件、初期条件のもとで直接的に、しかも精密に解かれる方法を提案する。解析の対象としては、着陸衝撃を受ける地盤上滑走路の舗装盤、爆発による移動圧力波を受ける海面の氷などの衝撃応答を解明するために、弾性基礎上の厚板表面に集中衝撃移動荷重を受けた場合、荷重の移動速度と載荷直後から誘発される擾乱の伝播に注目し、境界での反射現象を含めて厚板内の過渡波動伝播現象を調べる。

2. 運動方程式、境界条件、および初期条件

均質等方弾性体における変位を未知関数とした運動方程式 (Navier の式) は次のように表される。

$$\mu[\nabla^2 \mathbf{u} + (1+b) \text{grad div } \mathbf{u}] = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad b = \frac{\lambda}{\mu} \quad (1)$$

ここに、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 ∇^2 は Laplace 演算子、 λ 、 μ は Lamé の弾性係数、 ρ は質量密度、 t は時間である。ここでは直交座標 (x, y, z) に依存する変位ベクトルを $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ とし、問題を簡単化するために 2 次元平面ひずみ問題 ($\partial u_y / \partial y = 0$) とする。

いま、弾性基礎上に厚さ h の無限厚板が x 方向に横たわっている問題 (図-1) を考える。荷重は便宜、分布直荷重 p_z とし、厚板の自由表面境界 $z=0$ の一部分に作用するものとする。これより境界条件は

$$x \rightarrow \pm\infty: (u_x, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \text{etc.}) = 0 \quad (2)$$

および

$$\left. \begin{aligned} z=0: \sigma_{zz} + p_z = 0, \quad \sigma_{zx} = 0 \\ z=h: \sigma_{zz} + R_z = 0, \quad \sigma_{zx} + R_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。式(2)は $x \rightarrow \pm\infty$ で変位、応力がゼロを表す。ここで、 σ_{jk} ($j=x, z, k=x, z$) は応力、 R_x, R_z はそれぞれ x, z 方向の基礎からの反力である。反力と変位の関係は Winkler の仮定¹⁷⁾を用いれば、次式

$$R_x = k_x u_x(x, h, t), \quad R_z = k_z u_z(x, h, t) \quad (4)$$

で与えられる。 k_x, k_z は基礎弾性係数で、値の取り方によっては比較的軟弱な基礎をも含めるかたちで、応力自由から変位固定までの中間的な境界を扱える。Winkler の仮定は問題の定式化が容易であるので採用した。

初期条件は静止を与える。すなわち、

$$t=0: u_x = u_z = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

解析を容易にするために、次の無次元座標

$$\xi = \frac{x}{h} \quad (|\xi| < \infty), \quad \eta = \frac{z}{h} \quad (0 < \eta < 1) \quad (6)$$

および無次元時間

$$\tau = \frac{c_T t}{h} \quad (0 < \tau), \quad c_T = \sqrt{\mu/\rho} \quad (7)$$

を導入する。 c_T は横波の伝播速度である。このとき 2 次元平面ひずみ問題の運動方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + (1+b) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \\ \nabla^2 w + (1+b) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、

$$u = \frac{u_x}{h}, \quad w = \frac{u_z}{h}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (9)$$

なお、 u, w は無次元変位である。無次元応力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= \frac{\sigma_{zz}}{\mu} = (2+b) \frac{\partial w}{\partial \eta} + b \frac{\partial u}{\partial \xi}, \\ \sigma_{\eta\xi} &= \frac{\sigma_{zx}}{\mu} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \sigma_{\xi\xi} &= \frac{\sigma_{xx}}{\mu} = (2+b) \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を用いれば、境界条件は

$$\xi \rightarrow \pm\infty: (u, w, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}, \text{etc.}) = 0 \quad (11)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: \sigma_{\eta\eta} + p_\eta = 0, \quad \sigma_{\eta\xi} = 0 \\ \eta=1: \sigma_{\eta\eta} + k_\eta w = 0, \quad \sigma_{\eta\xi} + k_\xi u = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

と書き換えられる。ここに、

$$p_\eta = \frac{p_z}{\mu}, \quad k_\eta = \frac{k_z h}{\mu}, \quad k_\xi = \frac{k_x h}{\mu} \quad (13)$$

初期条件は単に次式となる。

$$\tau=0: u = w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0 \quad (14)$$

3. Fourier 変換

関数 $S(\xi)$ の Fourier 変換は次式で定義される⁵⁾。

$$\bar{S}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) e^{-i\gamma\xi} d\xi \quad (15)$$

その逆変換は

$$\begin{aligned} S(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}(\gamma) e^{i\gamma\xi} d\gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [\bar{S}(-\gamma) e^{-i\gamma\xi} + \bar{S}(\gamma) e^{i\gamma\xi}] d\gamma \end{aligned} \quad (16)$$

で表される。ただし、 $i^2 = -1$ 、 γ は積分変数である。運動方程式 (8) を Fourier 変換し、境界条件 (11) で解けば次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \gamma^2(2+b)\bar{u} + i\gamma(1+b)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2}, \\ (2+b)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - \gamma^2 \bar{w} + i\gamma(1+b)\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (17)$$

応力の Fourier 変換が

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\eta\eta} &= (2+b)\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + i\gamma b \bar{u}, \quad \bar{\sigma}_{\eta\xi} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + i\gamma \bar{w}, \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi} &= b\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + i\gamma(2+b)\bar{u} \end{aligned} \quad (18)$$

と表されることから、境界条件 (12) は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: \bar{\sigma}_{\eta\eta} + \bar{p}_\eta &= 0, \quad \bar{\sigma}_{\eta\xi} = 0 \\ \eta = 1: \bar{\sigma}_{\eta\eta} + k_\eta \bar{w} &= 0, \quad \bar{\sigma}_{\eta\xi} + k_\xi \bar{u} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

いま、集中荷重 P_0 が $\xi = \bar{\xi}$ 点に作用している場合を考えると、 \bar{p}_η は次式で表される。

$$\bar{p}_\eta = P_0 e^{-i\gamma \bar{\xi}} \quad (20)$$

さらに、 P_0 が厚板の表面 ($\eta=0$) に沿って ξ の正の方向に一定速度で移動する場合、時刻 τ の荷重作用点の位置 $\bar{\xi}$ は次式となる。

$$\bar{\xi} = c\tau + \bar{\xi}_0 \quad (21)$$

ここに、 c は移動速度係数、 $\bar{\xi}_0$ は初期作用点である。ここでは載荷直後の過渡現象、すなわち、はじめの擾乱の伝播に注目していることから、定常応答問題でよく使われる Galilei 変換による移動座標⁷⁾は用いない。初期条件も Fourier 変換し次式で表す。

$$\tau = 0: \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = 0 \quad (22)$$

4. 固有関数による級数展開

連立偏微分方程式で表された運動方程式 (17) を境界条件 (19)、初期条件 (22) で解くにあたり、ここでは Stokes の方法による固有関数解析^{18), 19)}を導入する。Fourier 変換された変位 \bar{u} 、 \bar{w} は

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\tau) \begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \psi_m(\eta) \end{bmatrix} \quad (23)$$

と仮定する。ただし、 A_m は未知関数、関数 ϕ_m 、 ψ_m は変位の座標関数を表すもので次の連立常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_m}{d\eta^2} - \gamma^2(2+b)\phi_m + i\gamma(1+b)\frac{d\phi_m}{d\eta} &= -\omega_m^2 \phi_m, \\ (2+b)\frac{d^2 \psi_m}{d\eta^2} - \gamma^2 \psi_m + i\gamma(1+b)\frac{d\psi_m}{d\eta} &= -\omega_m^2 \psi_m \end{aligned} \quad (24)$$

を満足するものである。ただし、 ω_m は任意定数である。式 (23) を式 (18) に代入すると応力は

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{\eta\eta} \\ \bar{\sigma}_{\eta\xi} \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\tau) \begin{bmatrix} \Psi_m(\eta) \\ \Phi_m(\eta) \\ \Theta_m(\eta) \end{bmatrix} \quad (25)$$

で表される。 Ψ_m 、 Φ_m 、 Θ_m は応力の座標関数であり、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \Psi_m &= (2+b)\frac{d\psi_m}{d\eta} + i\gamma b \phi_m, \quad \Phi_m = \frac{d\phi_m}{d\eta} + i\gamma \psi_m, \\ \Theta_m &= b\frac{d\psi_m}{d\eta} + i\gamma(2+b)\phi_m \end{aligned} \quad (26)$$

これより、式 (19) を考慮すれば、方程式 (24) に対する境界条件は次式を与えることになる。

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: \Psi_m &= 0, \quad \Phi_m = 0 \\ \eta = 1: \Psi_m + k_\eta \psi_m &= 0, \quad \Phi_m + k_\xi \phi_m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

仮定した式 (24) を考察すれば、これはもとの運動方程式 (17) に対して、 $\bar{u} = \phi_m(\eta)e^{i\omega_m \tau}$ 、 $\bar{w} = \psi_m(\eta)e^{i\omega_m \tau}$ と変数分離したものに相当する。これは無限厚板の自由振動方程式と同じであり、 ω_m は円振動数と見ることが出来る。また、式 (27) はもとの境界条件 (19) と比較して、荷重項が省略されていることになる。

式 (24) の連立常微分方程式と式 (27) の境界条件を満足する ϕ_m 、 ψ_m には次の直交性の条件が成立する。

$$\int_0^1 (\phi_k \phi_l - \psi_k \psi_l) d\eta = 0, \quad \omega_k \neq \omega_l \quad (28)$$

連立常微分方程式に対する関数の直交性の条件の誘導は、Dolph²⁰⁾ が Timoshenko 梁理論に適用した方法を応用した。式 (28) を使えば、式 (23) の A_m は次式で得られる。

$$A_m = \frac{1}{g_m} \int_0^1 (\bar{u} \phi_m - \bar{w} \psi_m) d\eta, \quad g_m = \int_0^1 (\phi_m^2 - \psi_m^2) d\eta \quad (29)$$

運動方程式 (17) において、左辺項をまとめて次の級数で表すことを考える。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \gamma^2(2+b)\bar{u} + i\gamma(1+b)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \\ (2+b)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - \gamma^2 \bar{w} + i\gamma(1+b)\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(\tau) \begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \psi_m(\eta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、 B_m は未知関数である。同様に、右辺項もまとめて表すことにすれば、これは式 (23) から単に

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2 A_m}{d\tau^2} \begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \psi_m(\eta) \end{bmatrix} \quad (31)$$

となる。このことが成立するならば、連立偏微分方程式 (17) は、変数 η が共通に消去され、しかも連立性も解除されて次の時間のみの常微分方程式

$$B_m = \frac{d^2 A_m}{d\tau^2} \quad (32)$$

に引き下げられる。\$B_m\$ は式(28)の直交性の条件、式(24)および(29)の関係を使えば

$$B_m = \frac{1}{g_m} [\bar{\sigma}_{\eta\xi} \phi_m - \bar{\sigma}_{\eta\eta} \psi_m - \bar{u} \Phi_m + \bar{w} \Psi_m]_0^1 - \omega_m^2 A_m$$

と表され、境界条件(19), (27)を適用すれば次式となる。

$$B_m = -\frac{\psi_m(0)}{g_m} \bar{p}_\eta - \omega_m^2 A_m \quad (33)$$

これより、式(32)の方程式は次式に置き変わる。

$$\frac{d^2 A_m}{d\tau^2} + \omega_m^2 A_m = -H_m(\tau) \quad (34)$$

ここに、

$$H_m(\tau) = \frac{\psi_m(0)}{g_m} \bar{p}_\eta = P_0 \frac{\psi_m(0)}{g_m} e^{-i\gamma(\tau + \xi_0)} \quad (35)$$

微分方程式(34)に対する初期条件は式(22), (23)のかたちから

$$\tau = 0: A_m = \frac{dA_m}{d\tau} = 0 \quad (36)$$

を与えることになる。これによって式(34)は解かれて、\$A_m\$ が次のように決定される。

$$\begin{aligned} A_m &= -\frac{1}{\omega_m} \int_0^\tau H_m(\tau') \sin \omega_m(\tau - \tau') d\tau' \\ &= P_0 e^{-i\gamma\xi_0} [K_m^e(\tau) + iK_m^o(\tau)] \end{aligned} \quad (37)$$

ここに、

$$\begin{aligned} K_m^e(\tau) &= \frac{\psi_m(0)}{g_m(\gamma^2 c^2 - \omega_m^2)} (\cos \gamma c \tau - \cos \omega_m \tau), \\ K_m^o(\tau) &= \frac{\psi_m(0)}{g_m(\gamma^2 c^2 - \omega_m^2)} (\gamma c \frac{\sin \omega_m \tau}{\omega_m} - \sin \gamma c \tau) \end{aligned} \quad (38)$$

なお、\$K_m^e\$ は \$\gamma\$ に関して偶関数、\$K_m^o\$ は奇関数となる。

5. 固有関数の決定

連立常微分方程式(24)を境界条件(27)で解けば、\$\phi_m, \psi_m\$ が決定され、この問題は解決される。式(24)において、\$\psi_m\$ を消去して、\$\phi_m\$ について解けば次式

$$\square_1 \square_2 \phi_m = 0 \quad (39)$$

が得られる。逆に、\$\phi_m\$ を消去して、\$\psi_m\$ について解けば

$$\square_1 \square_2 \psi_m = 0 \quad (40)$$

を得る。ここで、\$\square_1 \square_2\$ は \$\eta\$ に関する4階の微分演算子

$$\square_1 \square_2 = \left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \gamma^2 + \frac{\omega_m^2}{V_L^2} \right] \left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \gamma^2 + \frac{\omega_m^2}{V_T^2} \right] \quad (41)$$

である。ただし、\$V_L, V_T\$ は無次元縦波、横波の伝播速度であり、それぞれ次式で表される。

$$V_L = \sqrt{2+b}, \quad V_T = 1 \quad (42)$$

式(39), (40)で得られた方程式は変位ポテンシャル理論における Galerkin ベクトルの波動方程式⁷⁾と同じ内容

を表す。これらの方程式の解は、例えば \$\gamma > \omega_m/V_T\$ のとき、次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi_m &= i [\cosh \alpha_m \eta \sinh \alpha_m \eta \cosh \beta_m \eta \sinh \beta_m \eta] N_m^1, \\ \psi_m &= [\sinh \alpha_m \eta \cosh \alpha_m \eta \sinh \beta_m \eta \cosh \beta_m \eta] N_m^2 \end{aligned} \quad (43)$$

ここに、

$$\alpha_m = \sqrt{\gamma^2 - \omega_m^2/V_L^2}, \quad \beta_m = \sqrt{\gamma^2 - \omega_m^2/V_T^2} \quad (44)$$

\$N_m^j\$ (\$j=1,2\$) は \$4 \times 1\$ の列ベクトルで表される積分定数、\$[\dots]\$ は行ベクトルを意味する。これらの解は式(24)の連立方程式に対してそれぞれ独立となるか、あるいはなんらかの関係が存在するか調べる必要がある。そのため、これらの解を式(24)の第1式に代入し、解の各項ごとにまとめると、\$N_m^1\$ と \$N_m^2\$ との間で次の関係

$$N_m^2 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_m}{\gamma} & & & \\ & \frac{\alpha_m}{\gamma} & & \\ & & \frac{\gamma}{\beta_m} & \\ & & & \frac{\gamma}{\beta_m} \end{bmatrix} N_m^1 \quad (45)$$

が得られる。式(43)を式(24)の第2式に代入しても同じ結果が得られる。式(45)を式(43)の第2式に代入し、\$\phi_m\$ の解と併せて調整すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \cosh \alpha_m \eta & \gamma \sinh \alpha_m \eta \\ \alpha_m \sinh \alpha_m \eta & \alpha_m \cosh \alpha_m \eta \\ \beta_m \cosh \beta_m \eta & \beta_m \sinh \beta_m \eta \\ \gamma \sinh \beta_m \eta & \gamma \cosh \beta_m \eta \end{bmatrix} N_m \quad (46)$$

ここに、\$N_m\$ は新しい \$4 \times 1\$ の積分定数である。なお、\$\gamma > \omega_m/V_T\$ 以外の解は式(44)を考慮すれば、\$\cosh, \sinh \to \cos, \sin\$ などに変わるだけで対応できる。結局、このようにして得られた解は連立常微分方程式(24)の一般解を表す。これらを式(26)に代入すれば \$\Psi_m, \Phi_m, \Theta_m\$ が得られ、すべて \$N_m\$ に従属して表される。

\$N_m\$ は境界条件(27)によって決定され、併せて \$\omega_m\$ も求められる。まず、境界条件(27)の第1式から、\$N_m\$ は2個の次元数を減じて \$2 \times 1\$ で表される積分定数 \$M_m\$ に従属して表される。

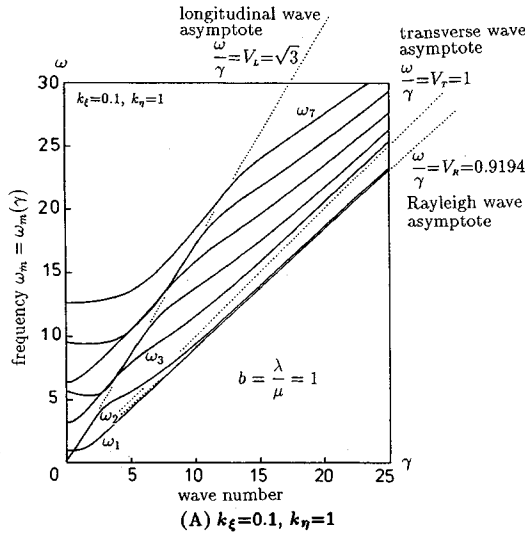
$$N_m = L_m M_m \quad (47)$$

ここに、\$L_m\$ は \$4 \times 2\$ の矩形マトリックスである。

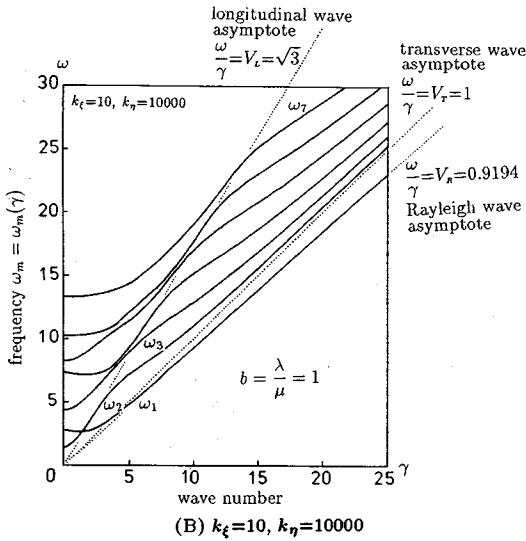
$$L_m = \begin{bmatrix} -2\gamma\beta_m & 0 \\ 0 & q_m \\ q_m & 0 \\ 0 & -2\gamma\alpha_m \end{bmatrix}, \quad q_m = \beta_m^2 + \gamma^2 \quad (48)$$

つづいて、境界条件(27)の第2式から次の方程式

$$B_m N_m = 0 \quad (49)$$



(A) $k_\xi=0.1, k_\eta=1$



(B) $k_\xi=10, k_\eta=10000$

図-2 γ に依存した固有値方程式の根 ω_m

が得られる。 B_m は 2×4 の矩形マトリックスである。

$$B_m = \begin{bmatrix} \gamma(2\alpha \sinh \alpha + k_\xi \cosh \alpha) \\ q \cosh \alpha + k_\eta \alpha \sinh \alpha \\ \gamma(2\alpha \cosh \alpha + k_\xi \sinh \alpha) & q \sinh \beta + k_\xi \beta \cosh \beta \\ q \sinh \alpha + k_\eta \alpha \cosh \alpha & \gamma(2\beta \cosh \beta + k_\eta \sinh \beta) \\ q \cosh \beta + k_\xi \beta \sinh \beta \\ \gamma(2\beta \sinh \beta + k_\eta \cosh \beta) \end{bmatrix}_m \quad (50)$$

式(47)を式(49)に代入すると次の方程式

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} M_m = 0 \quad (51)$$

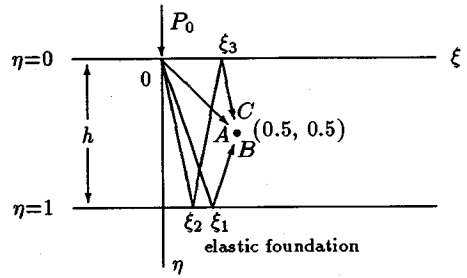


図-3 注目点を通る荷点で誘発された波動の伝播経路

が得られる。ただし、 $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ は

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = B_m L_m \quad (52)$$

と得られる。式(51)では $M_m \neq 0$ であるから、

$$Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} = 0 \quad (53)$$

でなければならない。このことにより式(51)を満足する M_m は次式で決定される。

$$M_m = \begin{bmatrix} -Z_{12} \\ Z_{11} \end{bmatrix} \quad (54)$$

この結果と式(47)から N_m が決定され、 $\phi_m, \psi_m, \Psi_m, \Phi_m, \Theta_m$ が求められる。すでに A_m が決定されているので、Fourier変換された変位、応力が式(23)、(25)によって得られる。後はFourier逆変換によって変位、応力が求められる。

式(53)は固有値方程式であり、 γ に依存する固有値、すなわち式(53)の根 ω_m を求めることになる。したがって、 ω_m は γ の関数 $\omega_m = \omega_m(\gamma)$ として得られる。固有値方程式(53)を詳しく調べると、それは γ に関して偶関数として表され、この結果、 $0 \leq \gamma < \infty$ の範囲で固有値を求めることになる。

式(17)から明らかなように、 $\gamma=0$ の特別な場合は \tilde{u} と \tilde{w} とが連成しない。したがって、この場合にはそれぞれの式が独立に解かれ解析は簡単になる。

6. Fourier逆変換

以上をまとめるとFourier変換された変位、応力は

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\sigma}_{\eta\eta} \\ \tilde{\sigma}_{\eta\xi} \\ \tilde{\sigma}_{\xi\xi} \end{bmatrix} = P_0 \sum_{m=1}^{\infty} [K_m^e(\tau) + iK_m^o(\tau)] \begin{bmatrix} i\gamma\phi_m^*(\eta) \\ \psi_m(\eta) \\ \Psi_m(\eta) \\ i\gamma\Phi_m^*(\eta) \\ \Theta_m(\eta) \end{bmatrix} \times e^{-i\gamma\xi_0} \quad (55)$$

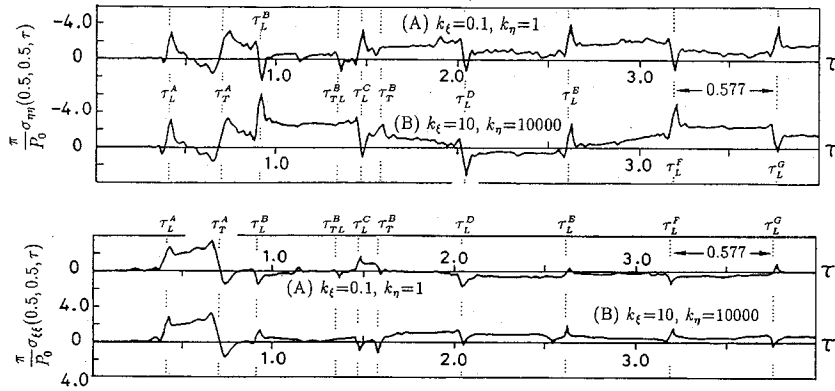


図-4 $c=0$ とした $\sigma_{\eta\eta}(0.5, 0.5, \tau), \sigma_{\xi\xi}(0.5, 0.5, \tau)$ の応答

ただし、 $\phi_m = i\gamma\phi_m^*, \Phi_m = i\gamma\Phi_m^*$ と置いた。 $\phi_m^*, \psi_m, \Psi_m, \Phi_m^*, \Theta_m$ は γ に対してすべて偶関数となる。このことを考慮して Fourier 逆変換(16)を適用すれば、変位、応力はすべて実数、しかも $0 \leq \gamma < \infty$ の範囲で定義される。

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \sigma_{\eta\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} \\ \sigma_{\xi\xi} \end{bmatrix} = -\frac{P_0}{\pi} \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty \begin{bmatrix} \phi_m^*(\eta)I_m(\tau) \\ \psi_m(\eta)J_m(\tau) \\ \Psi_m(\eta)J_m(\tau) \\ \Phi_m^*(\eta)I_m(\tau) \\ \Theta_m(\eta)J_m(\tau) \end{bmatrix} d\gamma \quad (56)$$

ここに、 I_m, J_m は

$$\begin{aligned} I_m(\tau) &= \gamma[K_m^c(\tau) \sin \gamma(\xi_0 - \xi) - K_m^o(\tau) \cos \gamma(\xi_0 - \xi)], \\ J_m(\tau) &= K_m^c(\tau) \cos \gamma(\xi_0 - \xi) + K_m^o(\tau) \sin \gamma(\xi_0 - \xi) \end{aligned} \quad (57)$$

7. 数値計算例および考察

数値計算では、簡単のため b を

$$b = \lambda/\mu = 1 \quad (58)$$

とし、 k_ξ, k_η の値を

$$\left. \begin{aligned} (A) \quad &k_\xi = 0.1, \quad k_\eta = 1 \\ (B) \quad &k_\xi = 10, \quad k_\eta = 10000 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

とした2種類について行う。 k_ξ, k_η の数値は実際の基礎地盤とは直接関係なく、一つの例として選んだ値である。式(13)で示すように、 k_ξ, k_η は厚さ h に依存するものの、厚板の弾性係数 μ を基準にした無次元量であり、(A)は極めて軟らかい基礎、(B)は硬い基礎を想定した。集中荷重 P_0 はすべて静止している厚板表面の座標原点 ($\xi=0, \eta=0$) に瞬時に載荷し、直ちに定速度 c で移動する。したがって、式(21)の初期作用点 ξ_0 は

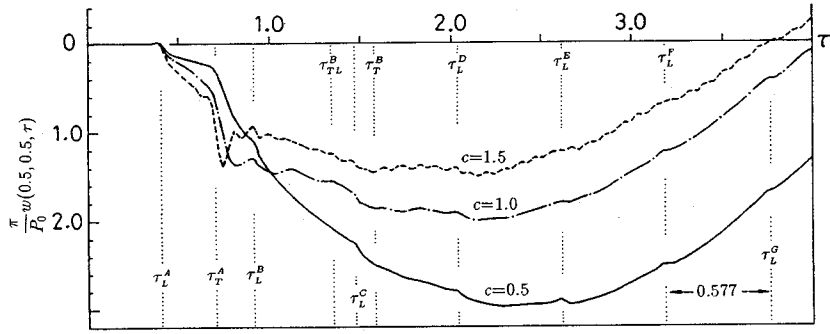
$$\xi_0 = 0. \quad (60)$$

図-2は円振動数の分散曲線で、 γ に依存した固有値方程式(53)の根 ω_m である。ただし、 $\gamma=25, m=7$ 次まで示した。なお、図中の $V_R=0.9194$ は $b=1$ としたときの Rayleigh 波の伝播速度である。(A)の分散曲線は、 $\gamma=0$ 付近では(B)の値より小さく、 γ が順次増えるにしたがって ω_1 以外は一旦 $V_L=\sqrt{3}$ に漸近し、さらに増加すると ω_1, ω_2 は V_R に漸近し、他のものは $V_T=1$ に漸近する形態をとる。これに対して、(B)では ω_1 のみが V_R に漸近し、他は V_T に漸近する形態となる。いずれの場合も V_L に漸近した後は両者ほぼ同じ形態を表し、その値は約 V_R より大きい。

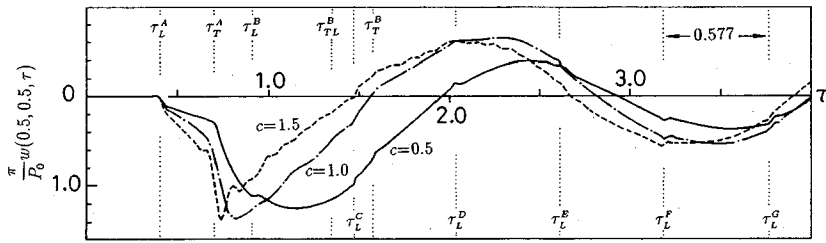
Miklowitz²¹⁾ は剛体滑面上の厚板の問題に対し、その固有値方程式 (Rayleigh-Lamb の振動方程式) の根を明らかにしている。その根は実数であり、波長に対する振動数として表されている。式(53)の固有値方程式は、基礎弾性係数を $k_\xi \rightarrow 0, k_\eta \rightarrow \infty$ と極限操作すると、剛体滑面上の厚板の固有値方程式に合致する。これを踏まえて、図-2 (B) で示した $k_\xi=10, k_\eta=10000$ の数値計算結果を考察すると、剛体滑面上の厚板の固有値方程式の根とはほぼ同じ形態となり、解 ϕ_m, ψ_m の妥当性を調べることができる。

図-4は、 P_0 が移動せずその場に固定 ($c=0$) されたとき、注目点 ($\xi=0.5, \eta=0.5$) における $\sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\xi\xi}$ の応答である。まず最初に、時刻 $\tau=\tau_L^A$ のとき、応力がおよそゼロの静止から急激に立ち上がり振幅の大きい尖頭波となって現れる。つづいて、 $\tau=\tau_T^A$ でも応力の急変がみられる。さらに $\tau=\tau_L^j$ ($j=B, C, \dots, G$) でも顕著な尖頭波が現れ、応力の急変が観察できる。全体的に $\sigma_{\eta\eta}$ の応答の方が $\sigma_{\xi\xi}$ より振幅が大きく鋭い形態となる。また、およそ $\tau=\tau_T^E$ 以後から約 0.577 の等間隔で縦波による振幅の大きい尖頭波が現れる。

記号 τ_k^j は、載荷点で誘発された波動が放射状に伝播し、その波面が注目点に到達した時間を表すもので、



(A) $k_\zeta=0.1, k_\eta=1$



(B) $k_\zeta=10, k_\eta=10000$

図-5 $c=0.5, 1.0, 1.5$ とした $w(0.5, 0.5, \tau)$ の応答

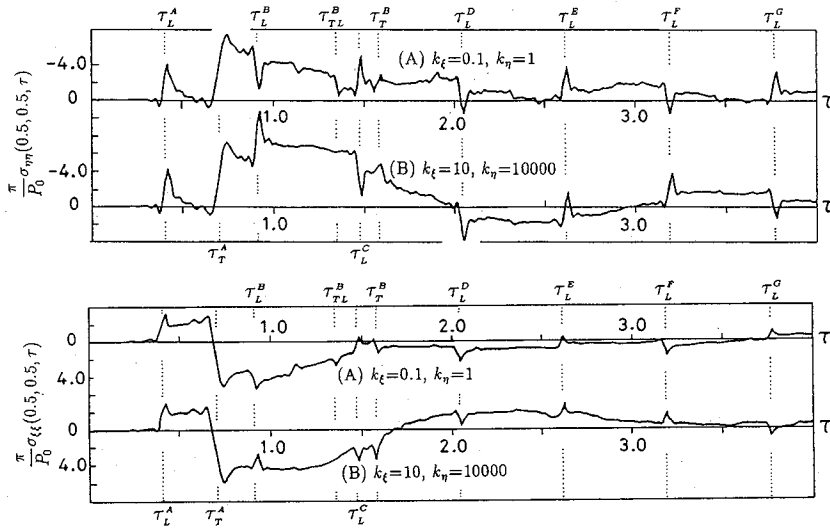


図-6 $c=0.5$ とした $\sigma_{\eta\eta}(0.5, 0.5, \tau), \sigma_{\zeta\zeta}(0.5, 0.5, \tau)$ の応答

肩文字 $j=A, B, \dots, G$ は図-3で示す波動の伝播経路であり、 A は載荷点から誘発された波動が直線的に伝播して注目点に到達した直達到達経路、 B は底面で1回反射、 C は底面と上面の2回反射して注目点に到達し

た反射到達経路を表す。さらに、 D, E, F, G は図-3に示していないが、3, 4, 5, 6回反射する経路を表す。添字 $k=L, T$ は波動の伝播速度を表し、経路 L は縦波伝播速度 $V_L=\sqrt{3}$, T は横波伝播速度 $V_T=1$ で到達する

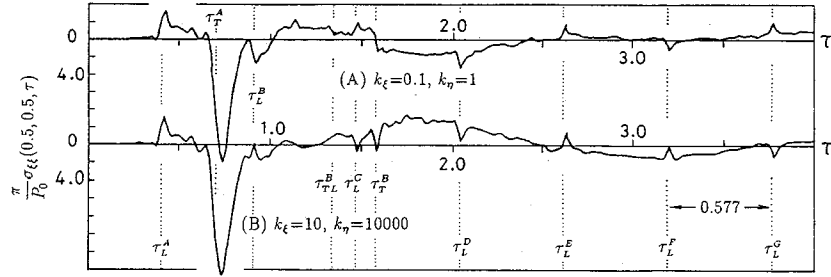
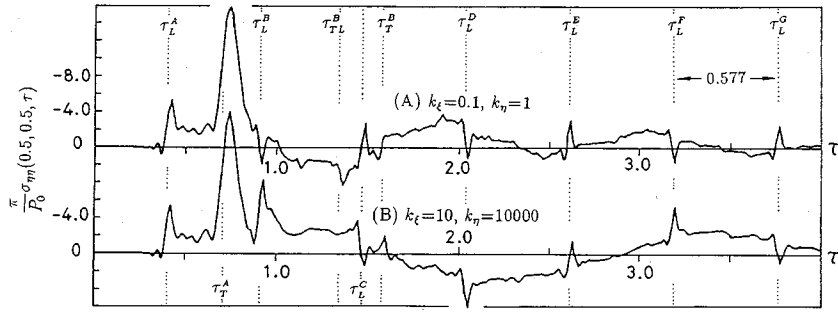


図-7 $c=1.0$ とした $\sigma_{\eta\eta}(0.5, 0.5, \tau)$, $\sigma_{\xi\xi}(0.5, 0.5, \tau)$ の応答

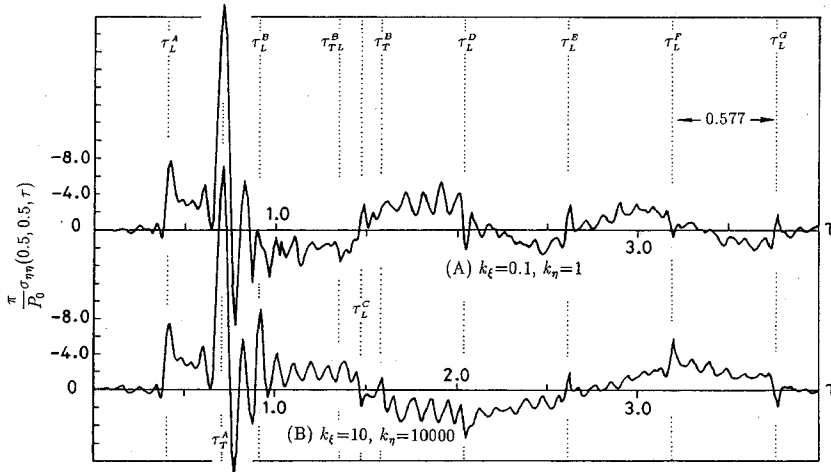


図-8 $c=1.5$ とした $\sigma_{\eta\eta}(0.5, 0.5, \tau)$ の応答

ことを意味する。したがって、 τ_k^i は

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_L^A &= 0.408 & \tau_T^A &= 0.707 \\
 \tau_L^B &= 0.913 & \tau_T^B &= 1.581 \\
 \tau_L^C &= 1.472 \\
 \tau_L^D &= 2.041 \\
 \tau_L^E &= 2.614 \\
 \tau_L^F &= 3.189 \\
 \tau_L^G &= 3.764
 \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

となる。図-3の反射点 $\xi = \xi_k$ ($k=1, 2, 3$) は幾何学的に求められ、それぞれ $\xi_1=0.333$, $\xi_2=0.2$, $\xi_3=0.4$ となる。高回反射の経路については、反射回数 n を基準にとると、その伝播経路長 l は次式

$$l = 0.5s\sqrt{1/s^2 + 1}, \quad s = 2n + 1 \quad (62)$$

で得られ、反射回数 n と $n-1$ による経路差は厚板の無次元厚さ 1 に漸近する。この結果によって、長時間経過して到達する縦波の高回反射の波動は約 $1/\sqrt{3}=0.577$

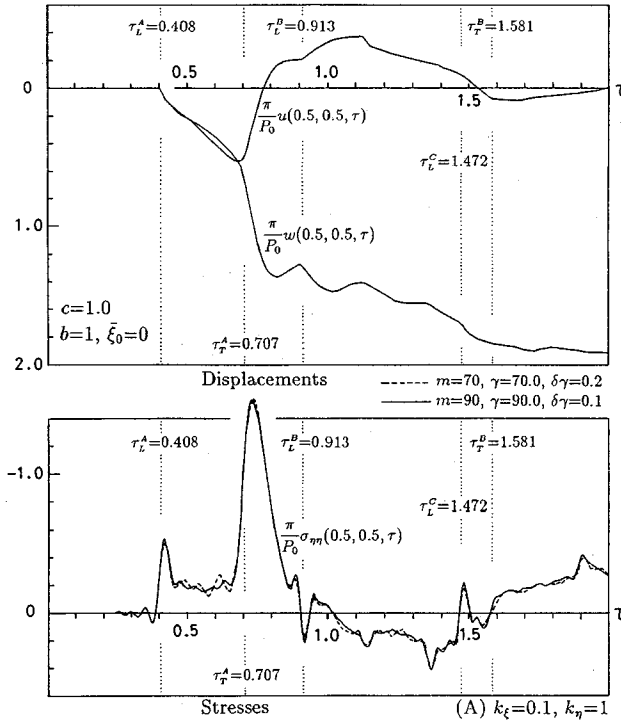


図-9 変位 $u(0.5, 0.5, \tau)$, $w(0.5, 0.5, \tau)$, 応力 $\sigma_{\eta\eta}(0.5, 0.5, \tau)$ の応答, およびその解の収束性

の間隔で尖頭波が現れることになる。

一方, 時刻 $\tau = \tau_{TL}^B$ でも応力の急変が見られる。(A) のデータでは顕著である。 τ_{TL}^B は厚板底面で 1 回反射する B 経路に似ており, 載荷点から $\eta=1$ までの距離を横波伝播速度で, 反射後は縦波伝播速度で注目点に到達した時間である。この場合, 底面での入射角と反射角は等しくなく, 反射点は光学 Snell の法則³⁾ から求められ, $\xi_1=0.259$ となる。それ故, この到達時間は次式となる。

$$\tau_{TL}^B = 1.353 \quad (63)$$

図-5は移動速度を $c=0.5, 1.0, 1.5$ と変化した場合, 注目点 ($\xi=0.5, \eta=0.5$) の鉛直変位 w の応答である。 $c=0.5$ は集中荷重の移動速度が Rayleigh 波より遅く, $c=1.0$ は横波伝播速度に等しく, $c=1.5$ は横波伝播速度より速く, 縦波伝播速度より遅いことを表す。(A) の軟らかい基礎上の厚板では, 荷重の衝撃的負荷によって載荷点で生じた波動が注目点に到達する時刻 $\tau = \tau_L^A$ から変形が始まる。以後, 速度が遅い $c=0.5$ の場合では, $\tau = \tau_L^A$ からゆったりとした剛体変位的な挙動を伴って厚板全体が振幅の大きい曲げたわみを示す。速度が速い $c=1.5$ では, 時刻 $\tau=0.333$ で注目点の真上 ($\xi=0.5$) の厚板表面に P_0 が到達し通過するが, しかし, この時刻で変位が生じなく, $\tau = \tau_L^A$ から変形が始まる。 $\tau = \tau_L^A$ で尖頭的な変位を生じ, 以後ゆったりとした変形を伴

い, その振幅は $c=0.5$ の場合より小さい。これに対して, (B) の硬い基礎上の厚板の応答は, $\tau = \tau_L^A$ まで (A) と同じ挙動を示すが, 以後 $w=0$ を中心とした振動形態を示す。

図-6は $c=0.5$ とした $\sigma_{\eta\eta}(0.5, 0.5, \tau)$, $\sigma_{\xi\xi}(0.5, 0.5, \tau)$ の応答である。 $\tau = \tau_L^A$ から $\tau = \tau_T^B$ までの振幅がいくらか助長され大きくなるものの, $c=0$ の場合に似た応答形態となる。

図-7は $c=1.0$ とした $\sigma_{\eta\eta}(0.5, 0.5, \tau)$, $\sigma_{\xi\xi}(0.5, 0.5, \tau)$ の応答である。この場合は, 集中荷重が横波伝播速度で厚板表面を移動し, 注目点の真上 $\xi=0.5$ にいち早く到達し, 続いて, 横波伝播速度の波面が注目点に到達することにより, $\tau = \tau_L^A$ では刺激され振幅の大きい鋭い尖頭波となって現れる。

図-8は $c=1.5$ とした $\sigma_{\eta\eta}(0.5, 0.5, \tau)$ の応答である。この場合, 集中荷重の移動速度が横波伝播速度より速く, 縦波より遅いことにより, $\tau = \tau_L^A$ と $\tau = \tau_L^A$ の両方の尖頭波に刺激を与え, とくに, $\tau = \tau_L^A$ 振幅が極端に大きく助長され, 鋭い尖頭波となって現れる。また, 荷重が注目点の真上を通過した後は激しい振動形態となる。

集中荷重が瞬時に衝撃的に負荷され, 直ちに定速度で厚板表面を移動する場合, 載荷点で誘発された波動が注目点に到達する時刻と, 注目点の真上の厚板表面に荷重が到達する時刻が短い時間差で重なると, その

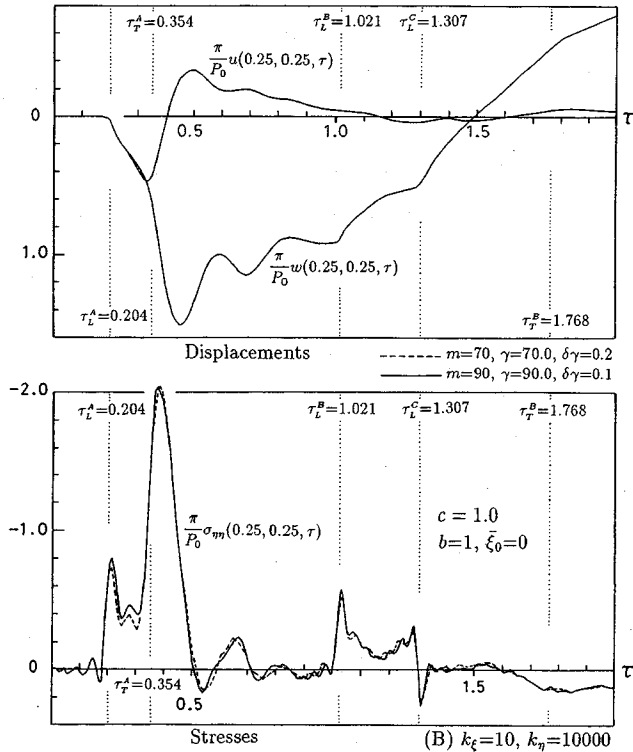


図-10 変位 $u(0.25, 0.25, \tau)$, $w(0.25, 0.25, \tau)$, 応力 $\sigma_{\eta\eta}(0.25, 0.25, \tau)$ の応答, およびその解の収束性

ときの応力は刺激され振幅が助長された鋭い尖頭波となる。 $c=1.0, 1.5$ とした応答では、第1波の到達時刻 $\tau=\tau_L^a$ でも起こるが、とくに、第2波の $\tau=\tau_L^a$ で応力が際だって助長された鋭い尖頭波となって現れる。

集中荷重の衝撃的負荷によって、載荷点を中心として応力波が誘発し放射状に伝播する。載荷点から注目点まではある距離があり、応力波が最初に注目点へ到達する時刻 $\tau=\tau_L^a$ 以前で応力は静止のゼロでなくてはならない。図-5の変位はこれを満足するが、しかし、図-7および図-8では、 $\tau=\tau_L^a$ 以前でいくらか応力が発生している。これは、応力がゼロの状態から、波動の到達によって不連続的に急激に立ち上がる現象を、連続したモード関数の重ね合わせによって表現させようとする解法によるもので、 $\tau=\tau_L^a$ 以前で応力が少し発生してしまう。しかし、 $\tau=\tau_L^a$ で立ち上がる尖頭波の振幅や、以後誘発する他の振幅と比較してきわめて小さく、 $\tau=\tau_L^a$ 以前は静止を満たしていると判断してよいであろう。また、応力は変位を微分することによって表され、このため応力は γ および ω_m に対する収束性が変位より劣る。この収束性の違いによって $\tau=\tau_L^a$ 以前で変位は静止のゼロを表すが、応力はいくらか発生する。

数値計算では γ の積分上限値を $\gamma=70$, その積分分割

ステップを $\delta\gamma=0.2$, 級数 m の上限次数を $m=70$ まで採用した。図-9は注目点を $\xi=\eta=0.5$, 図-10は $\xi=\eta=0.25$ の応答, ならびにその解の収束性について示したもので、上限値は $\gamma=90, m=90$ まで採用, 分割ステップを $\delta\gamma=0.1$ とした解と比較した。変位は完全に合致するのに対して、応力はいくらかの差が現れるが、両者の間で極端な相違がみられず、ほぼ合致した解を得たと判断してよいであろう。これによって解の収束性を確認した。

8. 結論

集中衝撃移動荷重を受ける Winkler 弾性基礎上厚板の過渡現象問題を精密に解析することができた。本研究の結論は次の通りである。

(1) Fourier 変換ならびに固有関数展開を用いることにより、連立偏微分方程式で表された運動方程式が境界条件, 初期条件のもとで直接的に、しかも精密に解かれる解法を提示することができた。Fourier 変換を導入することにより、形式的に運動方程式が複素数のかたちとなるが、固有値方程式の根が複素根とならず、すべて実数の範囲で問題が解決される。また、弾性体の振動方程式の解を基とした固有関数を使うため、関数

の直交性など、よく知られた関係を使うことができる。

(2) 基礎弾性係数 (k_g, k_n) に対する γ に依存する円振動数の分散曲線を得ることができた。基礎弾性係数の値によって分散曲線は変化するが、およそ Rayleigh 波の伝播速度より速い範囲で現れる。

(3) 集中荷重が衝撃的に負荷され移動せずその場に固定 ($c=0$) された場合、載荷点から少し離れた一空間点の応答は、静止の状態から縦波面の直接到達によってはじめの擾乱が起こり、続いて伝播速度の遅い波の到達、さらには境界からの反射波の到達によって擾乱が現れ、初期の複雑な過渡波動伝播の現象を明らかにすることができた。さらに時間が経過したとき、高回反射の縦波のみによる擾乱がおよそ 0.577 の間隔で起こる。

(4) 集中衝撃移動荷重では、基礎弾性係数、ならびに荷重の移動速度の違いによる複雑な過渡波動伝播形態を明らかにすることができた。(A), (B) のデータに対して、変位は際だって異なる応答となるのに対して、応力では大きな差が現れなかった。また、集中荷重の移動速度が速くなるに従って、振幅が大きく鋭い尖頭波となる。とくに、横波伝播速度より速い $c=1.0, 1.5$ では、 $\tau=\tau_g^*$ の振幅が極めて大きく助長され鋭い尖頭波を表す。

参考文献

- 1) 北村泰寿, 桜井春輔: 弾性基礎上の4辺自由板の級数解, 土木学会誌, pp. 61-66, 1979年3月.
- 2) Jaiswal, O. R., and Iyengar, R. N.: Dynamic response of a beam on elastic foundation of finite depth under a moving force, *Acta Mechanica*, Vol. 96, pp. 67-83, 1993.
- 3) Ewing, W. M., Jardetzky, W. S., and Press, F.: *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill Book Company, inc., New York, 1957.
- 4) Lamb, H.: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 203, pp. 1-42, 1904.
- 5) Sneddon, I.: *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York, pp. 447-449, 1951.

- 6) Cole, J., and Huth, J.: Stresses produced in a half-plane by moving loads, *J. Appl. Mech.*, Vol. 25, ASME, pp. 433-436, 1958.
- 7) Fung, C. Y.: 固体の力学/理論, 大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生 共訳, 培風館, 1970.
- 8) Gakenheimer, D. C., and Miklowitz, J.: Transient excitation of an elastic half space by a point load traveling on the surface, *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, pp. 505-515, 1969.
- 9) Sandler, I. S., and Bleich, H. H.: Stresses in an elastic half space due to surface loads progressing at the speed of Rayleigh waves, *J. Appl. Mech.*, pp. 372-377, 1972.
- 10) 小林治俊, 園田恵一郎, 鹿島光洋: 単純支持された鋼・コンクリート合成梁の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 1489-1496, 1992年3月.
- 11) 小林治俊, 園田恵一郎, 石丸和宏: 鋼・コンクリート合成円版の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 1497-1504, 1992年3月.
- 12) 小林治俊, 奥田東吾, 園田恵一郎: 衝撃荷重を受ける単純支持はりの応力波伝播解析, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 1505-1514, 1992年3月.
- 13) 石川清志: Voigt型粘弾性体無限帯板の過渡応力波伝播, 土木学会論文集, 第380号/I-7, pp. 273-281, 1987年4月.
- 14) 石川清志, 夏目正太郎: 集中衝撃荷重を受ける軸対称Voigt型粘弾性層体の過渡応力波伝播, 土木学会論文集, 第422号/I-14, pp. 275-284, 1990年10月.
- 15) Achenbach, J. D.: *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, New York, 1973.
- 16) Miklowitz, J.: *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*, North-Holland, New York, 1978.
- 17) Hetenyi, M.: *Beams on Elastic Foundation*, Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1946.
- 18) 西村源六郎: 振動工学, 誠文堂新光社, 1969.
- 19) 小平吉男: 物理数学, 第二巻, 文献社, 1971.
- 20) Dolph, C. L.: On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations, *Quart. Appl. Math.*, Vol. XII, No. 2, pp. 175-187, 1954.
- 21) Miklowitz, J.: Transient compressional waves in an infinite elastic plate or elastic layer overlying a rigid half-space, *J. Appl. Mech.*, Vol. 29, No. 1, pp. 53-60, 1962.

(1995. 1. 23 受付)

TRANSIENT WAVES IN AN INFINITE THICK PLATE ON ELASTIC FOUNDATION SUBJECTED TO CONCENTRATED MOVING LOADS

Kiyoshi ISHIKAWA, Teruhiko YODA and Masaharu HIRASHIMA

A method of analysis for the solutions of transient wave propagation in an infinite thick plate on elastic foundation is developed in terms of eigenfunctions depending on the Fourier integral transforms. The Winkler assumption that the reaction forces of the foundation are proportional at every point to the bottom bounding displacements of the plate touching the foundation is taken here. The time history of displacements and stresses representing the head of the disturbance are evaluated as transient wave propagation corresponding to different speeds of concentrated moving loads that are suddenly applied at the free surface of the plate standing still initially.