

塑性分岐解析に基づく圧縮板の 座屈モードの局所化現象の解析

後藤芳顯¹・王慶雲²・小畑誠³

¹正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科(〒466 名古屋市昭和区御器所町)

²学生員 工修 名古屋工業大学大学院 工学部社会開発工学科(〒466 名古屋市昭和区御器所町)

³正会員 Ph.D. 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科(〒466 名古屋市昭和区御器所町)

薄板構造の耐震性を損なう圧縮板の座屈モードの局所化現象を厳密に解析しうる塑性分岐解法を提示した。この手法を用い、局所化した初期たわみが、座屈モードの局所化現象に与える影響を調べた。この結果をもとに、TvergaardとNeedlemanや著者らに用いられた局所化した初期たわみを与え、塑性分岐解析によらず局所化挙動を近似的に解析する手法の妥当性を検討した。さらに、材料構成則、初期たわみの影響についても論じた。

Key Words : plate, localization, plastic-bifurcation, imperfection sensitivity, cyclic loading, seismic design, ductility

1. まえがき

圧縮板においては、最大耐力到達後、変位制御で荷重を続けると、最大耐力到達時の座屈波形の特定の部分に塑性変形が集中する座屈モードの局所化現象が発生し、急激に耐力が低下し、変形能が失われる。

著者らは、座屈モードの局所化現象が、圧縮板要素の変形能を規定する一つの重要な要因であるとの観点から、その解析手法ならびに、繰り返し荷重下の挙動を含め、局所化による変形能低下のメカニズムを理論的に検討してきた。文献1)~4)で指摘しているように、座屈モードの局所化現象は最大耐力到達後の荷重減少経路上で生ずる塑性分岐現象に起因するため、局所化挙動を正確に把握するためにはこの塑性分岐現象を厳密に解析する必要がある。著者らは、局所化挙動が解析できるように、すでに変位制御での塑性分岐解析の手法を提案し、Bernoulli-Eulerはりでの一軸応力下の局所化挙動¹⁾²⁾、ならびに軸対称円筒殻の二軸応力下の局所化挙動³⁾を厳密に解析している。しかしながら、圧縮板での局所化挙動を解析するには一般的な平面応力状態での塑性分岐問題を解析する必要があり、その解析が困難となる場合が多い。そのため、文献2),4)では局所化が発生する分岐点は厳密に同定しているが、分岐経路は微小な局所化した初期たわみ

を与えることで、近似的に求める手法を採用している。TvergaardとNeedlemanも同様な近似的な手法で、板⁵⁾や円筒シェル⁶⁾の局所化挙動を解析しており、著者の知る範囲では厳密な塑性分岐解析をした例はないと考えられる。しかしながら、このような初期たわみを導入する方法では分岐挙動が初期たわみに対して敏感な場合には、完全系の局所化挙動を正確に解析できない可能性がある。また、Hillの分岐条件⁷⁾からわかるように、塑性分岐の場合つり合い経路上で生ずる最初の分岐点以後は、基本経路から連続的に分岐が可能となるため正確な分岐解析を実施しないと物理的に意味のない挙動を解析する可能性もある。

ここでは、まず、平面応力下の弾塑性分岐解析により圧縮板の局所化挙動を厳密に解析する手法を提示する。このとき、局所化挙動が材料の塑性化した領域で発生し、材料構成則が大きく影響することを考慮して、J2流れ則の枠内で、文献4)で採用した硬化係数を一定としたパイリニアモデルの他に、繰り返し荷重下の挙動を対象としたDafalias-Popovの二曲面モデル⁸⁾も採用する。つぎに、提示した手法により、正確な局所化経路を求め、文献2),4)で実施した微小な初期たわみを与え近似的に座屈モードの局所化現象を解析する手法の精度を検証する。さらに、局所化した初期たわみが局所化挙動に与える影響についても検討する。

2. 三角形平面シェル要素による複合非線形解析

(1) 概要

塑性座屈モードの局所化現象では、局所的な大変形挙動を伴うために精度の良い弾塑性有限変位解析を実施する必要がある。本論文では文献(2),(4)と同様、幾何学的非線形解析は微小ひずみの範囲で、極端な大変形挙動も正確に扱おうように三次元空間での有限回転を正確に考慮した剛体変位除去の手法⁹⁾を用いる。シェル要素としては平面三角形要素で、局所移動座標系において Bergan と Fellipa¹⁰⁾ による面内回転自由度を考慮した面内要素と Bazeley ら¹¹⁾ の板曲げ要素を併せ用いる。これらの要素の各節点は並進3自由度と回転3自由度の計6自由度を持っており、回転自由度が2である平面要素と異なり剛体変位除去の手法による定式化が可能となる。ここでは、剛体変位除去の手法に基づく幾何学的非線形解析とともに二曲面モデルを用いた材料非線形解析の定式化を示す。

(2) 幾何学的関係

剛体変位除去の手法に用いる座標系は 図-1 に示すように、変形前の三角形シェル要素に対して定義される直交直線座標系 (x, y, z) と変形後の三角形シェル要素の節点①', ②', ③' で定義される直交直線移動座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ の2種類である。移動座標系の原点は節点①'に一致させ、 \bar{x} 軸は変形後のシェル要素の節点①', ②'を結ぶ方向に選ぶ。 \bar{y} 軸は①', ③'により定義される平面上に存在する。 (x, y, z) の基底ベクトルを (g_x, g_y, g_z) 、 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ の基底ベクトルを $(\bar{g}_x, \bar{g}_y, \bar{g}_z)$ と定義する。 $(\bar{g}_x, \bar{g}_y, \bar{g}_z)$ は変形前後の節点位置ベクトルをそれぞれ R_i, \hat{R}_i ($i=1,2,3$)とすれば次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_x &= (\hat{R}_2 - \hat{R}_1) / |\hat{R}_2 - \hat{R}_1| \\ \bar{g}_z &= \left\{ (\hat{R}_2 - \hat{R}_1) \times (\hat{R}_3 - \hat{R}_1) \right\} / \left| (\hat{R}_2 - \hat{R}_1) \times (\hat{R}_3 - \hat{R}_1) \right\} \\ \bar{g}_y &= \bar{g}_z \times \bar{g}_x \end{aligned} \right\} \quad (1a-c)$$

ここに、変形前の節点の位置ベクトルは

$$R_i = x_i g_x + y_i g_y + z_i g_z \quad i=1,2,3 \quad (2)$$

また、変形後の位置ベクトルは各節点の並進変位成分を (u_i, v_i, w_i) とすると次のように表される。

$$\hat{R}_i = (x_i + u_i) g_x + (y_i + v_i) g_y + (z_i + w_i) g_z \quad i=1,2,3 \quad (3)$$

式(1)に式(3)を代入すると、座標系 (x, y, z) と移動座

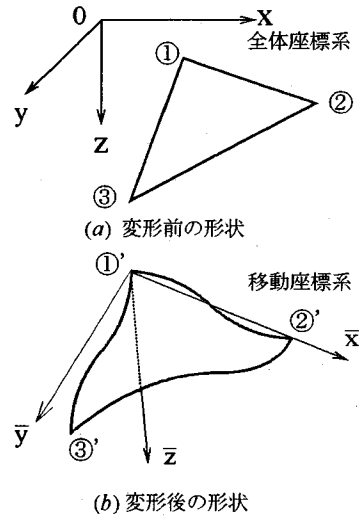


図-1 座標系とシェル要素

標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ の基底ベクトル間の関係が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{g}_x \\ \bar{g}_y \\ \bar{g}_z \end{Bmatrix} = [R_G] \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

はじめに、並進変位成分の変換関係を求める。移動座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ における剛体変位除去後の並進変位成分を $(\bar{u}_i^*, \bar{v}_i^*, \bar{w}_i^*)$ とすると、座標系 (x, y, z) における変位成分 (u_i, v_i, w_i) との関係は式(4)により、次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} x_i - x_1 + \bar{u}_i^* - \bar{u}_1^* \\ y_i - y_1 + \bar{v}_i^* - \bar{v}_1^* \\ z_i - z_1 + \bar{w}_i^* - \bar{w}_1^* \end{Bmatrix} = [R_G] \begin{Bmatrix} x_i - x_1 + u_i - u_1 \\ y_i - y_1 + v_i - v_1 \\ z_i - z_1 + w_i - w_1 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$i=2, 3$

ここで

$$\bar{u}_1^* = \bar{v}_1^* = \bar{w}_1^* = \bar{v}_2^* = \bar{w}_2^* = \bar{w}_3^* = 0 \quad (6)$$

式(5)の増分形は

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_i^* - \Delta \bar{u}_1^* \\ \Delta \bar{v}_i^* - \Delta \bar{v}_1^* \\ \Delta \bar{w}_i^* - \Delta \bar{w}_1^* \end{Bmatrix} = [\Delta R_G] \begin{Bmatrix} x_i - x_1 + u_i - u_1 \\ y_i - y_1 + v_i - v_1 \\ z_i - z_1 + w_i - w_1 \end{Bmatrix} + [R_G] \begin{Bmatrix} \Delta u_i - \Delta u_1 \\ \Delta v_i - \Delta v_1 \\ \Delta w_i - \Delta w_1 \end{Bmatrix} \quad i=2,3 \quad (7)$$

と表され、次のように書き直される。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_2^* \\ \Delta \bar{v}_3^* \\ \Delta \bar{v}_3^* \end{Bmatrix} = [TD]' \{ \Delta u_1, \Delta v_1, \Delta w_1, \Delta u_2, \Delta v_2, \Delta w_2 \} \quad (8)$$

$$\Delta u_3, \Delta v_3, \Delta w_3 \}$$

つぎに回転成分の変換関係を求める。座標系(x,y,z)の各節点*i*での変形後の基底ベクトルを($\hat{g}_{xi}, \hat{g}_{yi}, \hat{g}_{zi}$)、これを単位化したベクトルを($\hat{i}_{xi}, \hat{i}_{yi}, \hat{i}_{zi}$)と表す。有限要素の面内せん断変形が微小と考え、節点での($\hat{i}_{xi}, \hat{i}_{yi}, \hat{i}_{zi}$)が近似的に直交しているとすると、節点*i*の有限回転はオイラー角(ϕ_i, θ_i, ψ_i)で表すことができる。すなわち、($\hat{i}_{xi}, \hat{i}_{yi}, \hat{i}_{zi}$)と(g_x, g_y, g_z)との関係は次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}_{xi} \\ \hat{i}_{yi} \\ \hat{i}_{zi} \end{Bmatrix} = [R_i] \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} \quad i=1, 2, 3 \quad (9)$$

$$[R_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ 0 & -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 & -\sin \theta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_i & 0 & \cos \theta_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i & 0 \\ -\sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

($\hat{i}_{xi}, \hat{i}_{yi}, \hat{i}_{zi}$)と($\bar{g}_x, \bar{g}_y, \bar{g}_z$)との関係は式(4), (9)から以下のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}_{xi} \\ \hat{i}_{yi} \\ \hat{i}_{zi} \end{Bmatrix} = [R_i]' [R_G] \begin{Bmatrix} \bar{g}_x \\ \bar{g}_y \\ \bar{g}_z \end{Bmatrix} \quad i=1, 2, 3 \quad (11)$$

一方、剛体回転を除去した節点*i*の $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 軸まわりの微小回転角($\bar{\theta}_{xi}^*, \bar{\theta}_{yi}^*, \bar{\theta}_{zi}^*$)はベクトル量として扱え、これを用いることで、($\hat{i}_{xi}, \hat{i}_{yi}, \hat{i}_{zi}$)と($\bar{g}_x, \bar{g}_y, \bar{g}_z$)との関係は次式のようにも表せる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}_{xi} \\ \hat{i}_{yi} \\ \hat{i}_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\theta}_{xi}^* & -\bar{\theta}_{yi}^* \\ -\bar{\theta}_{xi}^* & 1 & \bar{\theta}_{zi}^* \\ \bar{\theta}_{yi}^* & -\bar{\theta}_{zi}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{g}_x \\ \bar{g}_y \\ \bar{g}_z \end{Bmatrix} \quad i=1, 2, 3 \quad (12)$$

式(11), (12)から次の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{\theta}_{xi}^* & -\bar{\theta}_{yi}^* \\ -\bar{\theta}_{xi}^* & 1 & \bar{\theta}_{zi}^* \\ \bar{\theta}_{yi}^* & -\bar{\theta}_{zi}^* & 1 \end{bmatrix} = [R_i]' [R_G] \quad i=1, 2, 3 \quad (13)$$

式(13)の増分関係式は

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta \bar{\theta}_{xi}^* & -\Delta \bar{\theta}_{yi}^* \\ -\Delta \bar{\theta}_{xi}^* & 0 & \Delta \bar{\theta}_{zi}^* \\ \Delta \bar{\theta}_{yi}^* & -\Delta \bar{\theta}_{zi}^* & 0 \end{bmatrix} = [\Delta R_i]' [\Delta R_G] + [R_i]' [\Delta R_G] \quad i=1, 2, 3 \quad (14)$$

となる。式(14)はさらに次のように書き直すことができる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{\theta}_{xi}^* \\ \Delta \bar{\theta}_{yi}^* \\ \Delta \bar{\theta}_{zi}^* \end{Bmatrix} = [TR_i]' \{ \Delta D \} \quad i=1, 2, 3 \quad (15)$$

ここに

$$\begin{aligned} {}' \{ \Delta D \} &= \{ {}' \{ \Delta d_1 \} \quad {}' \{ \Delta d_2 \} \quad {}' \{ \Delta d_3 \} \} \\ {}' \{ \Delta d_i \} &= \{ \Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i, \Delta \theta_{xi}, \Delta \theta_{yi}, \Delta \theta_{zi} \} \end{aligned} \quad i=1, 2, 3 \quad (16a, b)$$

$\Delta \theta_{xi}, \Delta \theta_{yi}, \Delta \theta_{zi}$ はそれぞれx, y, z軸回りの節点*i*の増分回転角でベクトル量として扱える。

座標系(x, y, z)と座標系($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$)間の増分形の節点変位成分の変換関係は式(8), (15)をもとに次のように表すことができる。

$$\{ \Delta \bar{D}^* \} = [\bar{R}] \{ \Delta D \} \quad (17)$$

ここで

$$\{ \Delta \bar{D}^* \} = \{ \Delta \bar{\theta}_{x1}^*, \Delta \bar{\theta}_{y1}^*, \Delta \bar{\theta}_{z1}^*, \Delta \bar{u}_2^*, \Delta \bar{\theta}_{x2}^*, \Delta \bar{\theta}_{y2}^*, \Delta \bar{\theta}_{z2}^*, \Delta \bar{u}_3^*, \Delta \bar{v}_3^*, \Delta \bar{\theta}_{x3}^*, \Delta \bar{\theta}_{y3}^*, \Delta \bar{\theta}_{z3}^* \} \quad (18)$$

最後に、式(17)の関係をもとに、節点力成分の変換関係を導く。有限要素の節点力ベクトルの(x,y,z)成分と($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$)成分をそれぞれ

$$\{ F_i \} = \{ F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} \} \quad i=1, 2, 3 \quad (19)$$

$$\{ \bar{F}_i \} = \{ \bar{F}_{x1}^*, \bar{F}_{y1}^*, \bar{F}_{z1}^*, \bar{M}_{x1}^*, \bar{M}_{y1}^*, \bar{M}_{z1}^* \} \quad i=1, 2, 3 \quad (20)$$

と表すと仮想仕事の原理から次式が成立する。

$$\{ \bar{F}^* \} \{ \Delta \bar{D}^* \} = \{ F \} \{ \Delta D \} \quad (21)$$

ここで、

$$\{ F \} = \{ {}' \{ F_1 \} \quad {}' \{ F_2 \} \quad {}' \{ F_3 \} \} \quad (22)$$

$$\{ \bar{F}^* \} = \{ \bar{M}_{x1}^*, \bar{M}_{y1}^*, \bar{M}_{z1}^*, \bar{F}_{y2}^*, \bar{M}_{x2}^*, \bar{M}_{y2}^*, \bar{M}_{z2}^*, \bar{F}_{x3}^*, \bar{F}_{y3}^*, \bar{M}_{x3}^*, \bar{M}_{y3}^*, \bar{M}_{z3}^* \} \quad (23)$$

式(17)を式(21)に代入して $\{\Delta D\}$ が任意であることを考慮すると次の節点力成分間の変換関係が得られる。

$$\{F\} = \{R\} \{F^e\} \quad (24)$$

(3) 弾塑性応力-ひずみ関係

直交直線移動座標系 (\bar{x}, \bar{y}, z) の \bar{x}, \bar{y} 平面での平面応力問題を考えると、独立な応力とひずみ成分は次のように表される。

$$\{\sigma_i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}} \\ \varepsilon_{\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix} \quad (25a, b)$$

材料の塑性の構成則として降伏条件に von Mises の降伏関数、流れ則には降伏曲面を塑性ポテンシャル面とする J2 流れ則を、また硬化則は等方硬化則と Ziegler の移動硬化則の両方に基づく混合硬化則を用いる。硬化係数はこれを定数とするバイリニアモデルの他、繰り返し荷重下の硬化係数の変化を考慮した Dafalias-Popov の二曲面モデルを用いて表す。上述の構成モデルを用いて、増分型の応力-ひずみ関係を導びくが以下の式の記述にあたっては、添字 i, j, k, l はいずれも $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}\bar{y}$ の 3 通りの記号をとり、また総和規約も用いる。

f は von Mises の降伏関数で、

$$f^2 = (\sigma_{\bar{x}} - \alpha_{\bar{x}})^2 + (\sigma_{\bar{y}} - \alpha_{\bar{y}})^2 - (\sigma_{\bar{x}} - \alpha_{\bar{x}})(\sigma_{\bar{y}} - \alpha_{\bar{y}}) + 3(\tau_{\bar{x}\bar{y}} - \alpha_{\bar{x}\bar{y}})^2 \quad (26)$$

と表される。このとき $\{\alpha_{\bar{x}}, \alpha_{\bar{y}}, \alpha_{\bar{x}\bar{y}}\}$ は降伏曲面の中心である。また、 E_{ij}^e は平面応力状態での弾性マトリックスで以下の通りである。

$$\begin{bmatrix} E_{ij}^e \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

J2 流れ則と混合硬化則を用いて、塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_i^p$ 及び相当塑性ひずみ増分 $d\bar{\varepsilon}^p$ は

$$d\varepsilon_i^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i}, \quad d\bar{\varepsilon}^p = \frac{1}{h_i + h_k} \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} d\sigma_i \quad (28a, b)$$

塑性仮想仕事の式より

$$(\sigma_i - \alpha_i) d\varepsilon_i^p = f d\bar{\varepsilon}^p \quad (29)$$

式(28a, b)を式(29)に代入すると

$$d\lambda = d\bar{\varepsilon}^p = \frac{1}{h_i + h_k} \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} d\sigma_i \quad (30)$$

応力とひずみとの増分関係は次のようになる。

$$d\sigma_i = E_{ij}^e (d\varepsilon_j - d\varepsilon_j^p) = E_{ij}^e (d\varepsilon_j - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_j}) \quad (31)$$

$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \right\}$ と $\{d\sigma_i\}$ の内積をとると

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} d\sigma_i = \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} E_{ij}^e d\varepsilon_j - \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} E_{ij}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda \quad (32)$$

式(30)を式(32)に代入すると

$$(h_i + h_k) d\lambda = \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} E_{ij}^e d\varepsilon_j - \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} E_{ij}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda \quad (33)$$

これより、指標 i, j を k, l に変換すると

$$d\lambda = q \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} E_{kl}^e d\varepsilon_l \quad (34)$$

ここに

$$q = 1 / (h_i + h_k + \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} E_{kl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_l}) \quad (35)$$

式(34)を式(31)に代入すると、塑性状態での応力とひずみの増分関係が次のように得られる

$$d\sigma_i = (E_{ij}^e - q \cdot E_{ii}^e E_{kj}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \frac{\partial f}{\partial \sigma_k}) d\varepsilon_j \quad (36)$$

式(35)の h_i, h_k はそれぞれ等方硬化係数と移動硬化係数である。これらはバイリニアモデルでは、いずれも定数となり、Dafalias-Popov の二曲面モデルによる場合は次式で評価される。

$$h_i + h_k = H_i + H_k + h \frac{\delta}{\delta_{in} - \delta} \quad (37)$$

ここに

$$\delta = \sqrt{(\bar{\sigma}_{\bar{x}} - \sigma_{\bar{x}})^2 + (\bar{\sigma}_{\bar{y}} - \sigma_{\bar{y}})^2 + 2(\bar{\tau}_{\bar{x}\bar{y}} - \tau_{\bar{x}\bar{y}})^2} \quad (38)$$

δ は降伏曲面上の応力点と境界曲面上の応力点との距離であり、 δ_{in} はある載荷サイクルで初期降伏したときの δ の値である。式(38)中の $\bar{\sigma}_{\bar{x}}, \bar{\sigma}_{\bar{y}}, \bar{\tau}_{\bar{x}\bar{y}}$ は降伏曲面上の応力点 $(\sigma_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{y}}, \tau_{\bar{x}\bar{y}})$ に対応する下式で定義される境界曲面上の応力点である。

$$F^2 = (\bar{\sigma}_{\bar{x}} - \beta_{\bar{x}})^2 + (\bar{\sigma}_{\bar{y}} - \beta_{\bar{y}})^2 - (\bar{\sigma}_{\bar{x}} - \beta_{\bar{x}})(\bar{\sigma}_{\bar{y}} - \beta_{\bar{y}}) + 3(\bar{\tau}_{\bar{x}\bar{y}} - \beta_{\bar{x}\bar{y}})^2 \quad (39)$$

具体的には降伏曲面上の応力点の垂線と境界曲面の垂線が一致するように、応力点 $(\bar{\sigma}_{\bar{x}}, \bar{\sigma}_{\bar{y}}, \bar{\tau}_{\bar{x}\bar{y}})$ を決定する。すなわち、

$$\{n_i\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \right\} / g = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \right\} / G \quad (40)$$

ここに

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \right)}, \quad G = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \right)} \quad (41a, b)$$

式(26), (39), (40)により

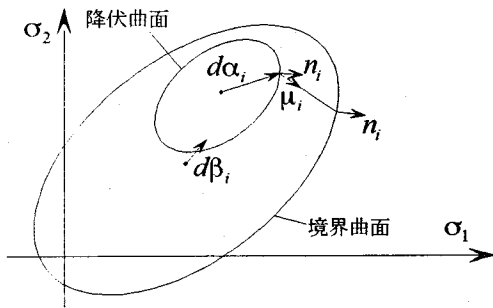


図-2 降伏曲面と境界曲面

$$\bar{\sigma}_i - \beta_i = \frac{f}{F}(\sigma_i - \alpha_i) \quad (42)$$

境界曲面の拡大移動は降伏曲面との関係において、以下により規定される。

$$dF = H_i d\bar{\epsilon}^p \quad (43)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_i} d\beta_i = H_K d\bar{\epsilon}^p \quad (44)$$

$$d\beta_i = d\alpha_i - M\mu_i \quad (45)$$

ここに

$$\{\mu_i\} = \frac{\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x - \sigma_x \\ \bar{\sigma}_y - \sigma_y \\ \bar{\tau}_{xy} - \tau_{xy} \end{Bmatrix}}{1} \quad (46)$$

$$\sqrt{(\bar{\sigma}_x - \sigma_x)^2 + (\bar{\sigma}_y - \sigma_y)^2 + (\bar{\tau}_{xy} - \tau_{xy})^2}$$

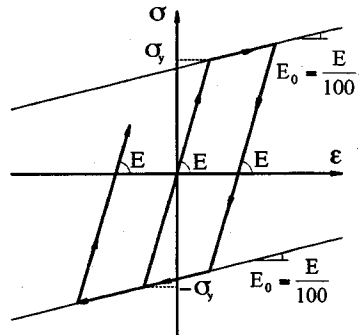
式(45)の係数 M は式(43),(44)より

$$M = \frac{(h_K/g - H_K/G)d\bar{\epsilon}^p}{\mu_i \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} / g} \quad (47)$$

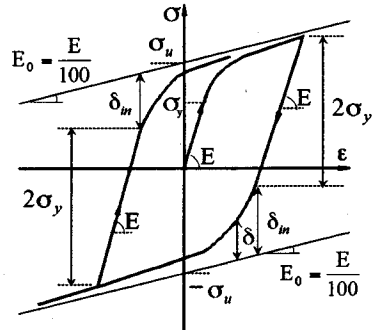
参考のために、二曲面モデルにおける降伏曲面と境界曲面の関係を図-2に示している。なお、式(37)の硬化形状パラメータ h が零の時このモデルはバイリニアモデルになる。移動硬化のみの場合 ($h_i = 0$) の両モデルの一軸応力-ひずみ関係は図-3のようになる。図-3(b)からわかるように、ここに示す降伏棚を持たない二曲面モデルは、実在の材料では降伏棚が無視できる高強度低降伏比鋼の挙動に近似している^{1,2)}。

(4) 増分形の要素剛性方程式

移動座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ での平面シェル要素としては、Bergan と Fellipa¹⁰⁾ による面内回転自由度を考慮した面内要素と Bazeley ら¹¹⁾ の板曲げ要素を併せ用いる。なお、要素の剛性マトリックス $[K^*]$ は(3)の構成則を用い、要素面内に7点の Gauss の積分点と板厚方向に11点の Simpson の積分点を設けて、数値積分により計算する。このようにして得られた



(a) バイリニアモデル



(b) 二曲面モデル

図-3 一軸応力-ひずみ関係

移動座標 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ での剛性方程式を次のように表す。

$$\{\Delta \bar{F}^*\} = [K^*] \{\Delta \bar{D}^*\} \quad (48)$$

次に、直交直線座標系 (x, y, z) での増分形の剛性方程式を誘導する。このために、まず式(24)を増分すると

$$\{\Delta F\} = [\tilde{R}] \{\Delta \bar{F}^*\} + [\Delta \tilde{R}] \{\bar{F}^*\} \quad (49)$$

$[\Delta \tilde{R}] \{\bar{F}^*\}$ は式(8), (15)を考慮すると次のような形にまとめることができる。

$$[\Delta \tilde{R}] \{\bar{F}^*\} = [K_{Gt}] \{\Delta D\} \quad (50)$$

$[K_{Gt}]$ はいわゆる幾何剛性行列に対応している。式(17),(48),(50)を式(49)に代入すると、最終的に、複合非線形シェル要素の増分形剛性方程式は以下のようになる。

$$\{\Delta F\} = [[K_{Mt}] + [K_{Gt}]] \{\Delta D\} \quad (51)$$

ここに

$$[K_{Mt}] = [\tilde{R}] [K^*] [\tilde{R}] \quad (52)$$

3. 分岐解析による平面応力下の座屈モードの局所化現象の解析

塑性座屈モードの局所化現象は荷重のピーク点到

表-1 主経路・分岐経路での
除荷・負荷の組み合わせ

		I	II	III	IV
主 経 路	$\frac{\partial f}{\partial \sigma_k} E_{kl}^e \Delta \varepsilon_l$	≥ 0	≥ 0	≤ 0	≤ 0
	E_{ij}^f	E_{ij}^{ep}	E_{ij}^{ep}	E_{ij}^e	E_{ij}^e
分 岐 経 路	$\frac{\partial f}{\partial \sigma_k} E_{kl}^e \Delta \varepsilon_l$	≥ 0	≤ 0	≤ 0	≥ 0
	E_{ij}^b	E_{ij}^{ep}	E_{ij}^e	E_{ij}^e	E_{ij}^{ep}

(注) $E_{ij}^c - E_{ij}^e = E_{ij}^{ep} - E_{ij}^e = -q \cdot E_{ij}^e E_{kj}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \frac{\partial f}{\partial \sigma_k}$

達後の荷重減少経路上での塑性分岐に起因するものである。したがって、厳密な局所化解析は荷重減少経路からの塑性分岐解析に帰着され、変位制御下の解析を実施する必要がある。ここでは、薄板の有限要素法モデルを用いた平面応力下の塑性分岐解析に基づく局所化解析法を説明する。多自由度離散系構造システムの増分変位ベクトル ΔD を制御成分ベクトル ΔC と非制御成分ベクトル $\Delta \bar{D}$ とに分け接線剛性方程式を提示すれば

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{K} & \Delta \bar{K} \\ \Delta \bar{K}^t & \Delta \bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{D} \\ \Delta C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (53)$$

ここに ΔQ は制御変位ベクトル ΔC に対応する未知反力増分ベクトル、 ΔF は既知荷重増分ベクトルである。式(53)を総和規約で次のように表示するものとする¹⁾。

$$\Delta \bar{K}_{ij} \Delta \bar{D}_j + \Delta \bar{K}_{ik} \Delta C_k = \Delta F_i \quad (54a)$$

$$\Delta \bar{K}_{ij}^t \Delta \bar{D}_j + \Delta \bar{K}_{ik} \Delta C_k = \Delta Q_i \quad (54b)$$

式(54)を用いて、Hill の分岐条件⁷⁾を表すと次のようになる。

$$\Delta \Pi = (\Delta \bar{D}_i^b - \Delta \bar{D}_i^f) \Delta \bar{K}_{ij}^c (\Delta \bar{D}_j^b - \Delta \bar{D}_j^f) + \sum_{l=1}^n \int_{V_l} \Delta \mu dV = 0 \quad (55)$$

$$\Delta \mu = \left[(\Delta \varepsilon_i^b - \Delta \varepsilon_i^f) \left\{ (E_{ij}^c - E_{ij}^f) \Delta \varepsilon_j^f + (E_{ij}^b - E_{ij}^c) \Delta \varepsilon_j^b \right\} \right] \quad (56)$$

ここに上添字 f , b はそれぞれ分岐点から主経路、分岐経路方向への増分量を示す。 c は分岐点からの増分に対し、除荷の場合も負荷剛性をとると仮定する Comparison solids に対する値を示す。また、 $\int_{V_l} dV$ は有限要素 l の全体にわたって積分することを意味

し、 $\sum_{i=1}^n$ は当該構造系の全有限要素に対して総和をとることを示している。 $\Delta \varepsilon_i$, E_{ij} はそれぞれ平面応力問題でのひずみ増分ならびに材料構成則での接線剛性を表す。

式(55)をもとに平面応力下で分岐が生ずる場合について考察する。まず、式(55)の第2項の $\Delta \mu$ のとりうる値について検討する。弾塑性域での材料の接線剛性は材料の除荷・負荷と関係しており、負荷時には式(36)、除荷時には式(27)で示す値をとる。このとき材料の除荷・負荷は次式で判定される。

$$\begin{aligned} > 0 : & \text{負荷} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \Delta \sigma_i = 0 : & \text{中立} \\ < 0 : & \text{除荷} \end{aligned} \quad (57)$$

式(57)の左辺は、式(30),(34)によりつぎのように書き換えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \Delta \sigma_i = q(h_l + h_k) E_{kl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Delta \varepsilon_l \quad (58)$$

したがって、式(58)より、式(57)の代わりに次式を用いることができる。

$$\begin{aligned} > 0 : & \text{負荷} \\ E_{kl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Delta \varepsilon_l = 0 : & \text{中立} \\ < 0 : & \text{除荷} \end{aligned} \quad (59)$$

分岐点から主経路と分岐経路方向への増分に対して材料の除荷・負荷に関してとりうるすべての場合をその材料剛性ととも表-1にまとめる。表-1をもとに各ケースについて $\Delta \mu$ を計算すると以下のようになる。

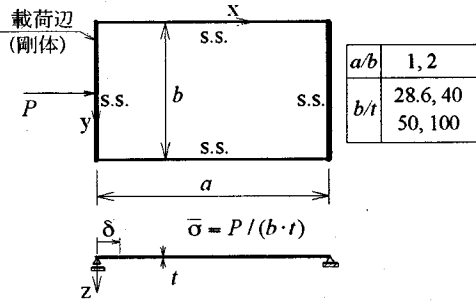
$$\text{I: } \Delta \mu = 0$$

$$\text{II: } \Delta \mu = q E_{ij}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} (\Delta \varepsilon_i^b - \Delta \varepsilon_i^f) E_{kj}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Delta \varepsilon_j^b \geq 0$$

$$\text{III: } \Delta \mu = q E_{ij}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} (\Delta \varepsilon_i^b - \Delta \varepsilon_i^f) E_{kj}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} (\Delta \varepsilon_j^b - \Delta \varepsilon_j^f) \geq 0 \quad (60a-d)$$

$$\text{IV: } \Delta \mu = -q E_{ij}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} (\Delta \varepsilon_i^b - \Delta \varepsilon_i^f) E_{kj}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} \Delta \varepsilon_j^f \geq 0$$

式(59),(60)の関係より文献1)で論じた一軸応力の場合と同様、式(55)の右辺第2項の被積分関数はいずれの場合にも負になることはなく $\Delta \mu \geq 0$ となる。これより分岐が生ずるためには、式(55)の第1項の $\Delta \bar{K}_{ij}^c$ に関する2次形式は負か、少なくとも零になることが必要である。 $\Delta \bar{K}_{ij}^c$ は変位制御下の剛性行列であることから、文献1)でも説明したように、荷重増加の釣り合い経路上はいうまでもなく極限点を越え、荷重減少経路上に至っても正值対称のままであり、



a/b	1, 2
b/t	28.6, 40 50, 100

n_x : X 方向分割数	n_x	n_y
n_y : Y 方向分割数	10	3
	20	3

図-4 圧縮板及び有限要素分割

第1項は正である。したがって、荷重減少経路上の分岐により局所化が発生する可能性が最初に生ずるのは式(55)の第1項と第2項が同時に零となる時である。すなわち、第1項が零となる条件より

$$\det|\Delta \tilde{K}_{ij}^c| = 0 \quad \text{かつ} \quad \Delta D_j^b - \Delta D_j^f = C \Delta D_j^m \quad (61a, b)$$

ここに ΔD_j^c は $\Delta \tilde{K}_{ij}^c$ の零固有値に対する固有ベクトル、 C は定数である。第2項が同時に零となるためには、式(60a~d)から分かるように、分岐点から主経路と分岐経路方向への増分に対して、構造物中において、負荷が中立状態のみ発生する必要がある。一般に式(61)の定数 C は定まらないが、分岐方向において中立状態が生ずる場合は、構造物中に中立状態と負荷状態のみ発生する条件から C の値を定めることができる。

4. 数値計算例に基づく局所化挙動の検討

(1) 一方向圧縮板の解析モデル

解析対象である一方向圧縮板の境界条件、荷重条件ならびに構造諸元は図-4に示すごとく文献4)と全く同一のものを用いる。とくに、局所化挙動の解析では、荷重方向の非対称変形も考慮できるように、圧縮板の有限要素モデルは図-4のように幅方向の対称性のみを利用して離散化する。このとき有限要素分割の非対称性を避けるため、長手方向の中央に関して対称となるよう配慮している。

材料の構成則としては、先に述べたように、

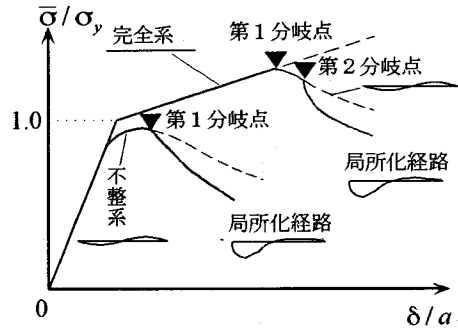


図-5 完全系と周期的な初期たわみを持つ不整系の釣り合い経路

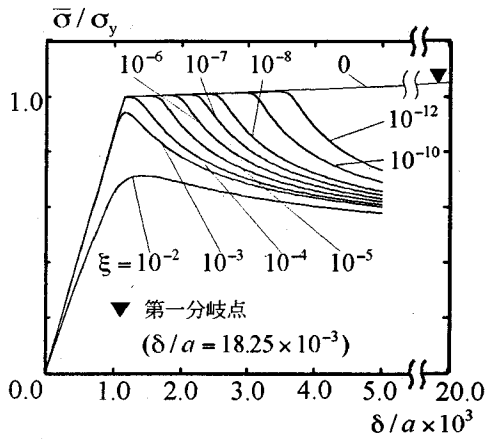
表-2 材料定数

モデル	E (MPa)	σ_y (MPa)	σ_u (MPa)	H_K (MPa)	h (MPa)
パイリニア	205800	235	-	$E/100$	-
二曲面	205800	157	235	$E/100$	$E/2$

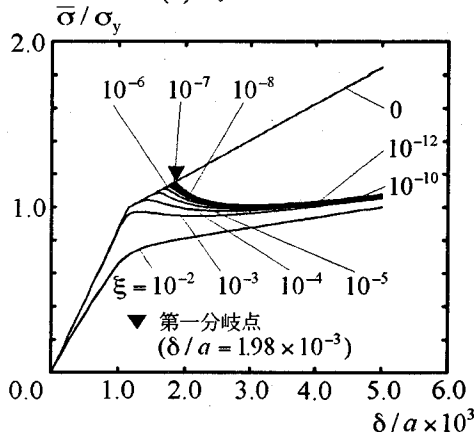
$$(h_1 = H_1 = 0)$$

Ziegler の移動硬化にもとづく硬化係数を一定とするパイリニアモデルの他に、硬化係数を Dafalias-Popov の二曲面モデルにより変化させる繰り返し塑性モデルも用いる。本解析モデルで考慮する具体的な材料定数は表-2に示すとおりである。なお、これらの構成則モデルの呼称として本文では以後簡単のため、前者をパイリニアモデル、後者を二曲面モデルとする。

つぎに、解析に与える初期たわみについて考える。初期たわみを持たない完全系圧縮板では図-5のように第一分岐点で座屈し、周期性を持った座屈波形が発生し、最大耐力に到達する。その後、荷重減少径路上にある第二分岐点の存在により局所化が発生する。周知のように、第一分岐点での座屈挙動は、初期たわみにより大きな影響を受ける。例として、 $a/b=1$, $b/t=50$ (幅厚比パラメータ $R=0.88$) の圧縮板に対して、 $u_0 = b\xi \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ の形状を持つ初期たわみがその大きさを表すパラメータ ξ により座屈挙動にどのように影響を与えるかを無次元化平均圧縮応力 $\bar{\sigma}/\sigma$ 、と無次元化軸方向変位 δ/a の関係として示したものが図-6である。このとき、材料の構成則はパイリニアモデルを用いており、2次勾配として通常値 $E_0=E/100$ の他に $E_0=E/4$ の場合も計算している。これからわかるように、初期たわみが座屈挙動に与える影響は大きく、特に、パイリニアモデルにおける2次勾配が小さく現実的な値 $E_0=E/100$ をとる場合の影響は顕著である。なお、図中の完全系 ($\xi=0$) の分岐点は座屈前の初期たわみ



(a) $E_0/E = 1/100$



(b) $E_0/E = 1/4$

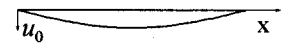
$a/b=1.0, b/t=50$

初期不整モデル $u_0 = b\xi \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$

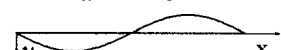
図-6 第一分岐での塑性座屈に与える初期たわみの影響

がないため、補遺に示す解析的手法により算定することができる。以上の検討から明らかなように、局所化を生ずる以前の座屈挙動は初期たわみの影響を大きく受け、完全系と初期たわみを持つ不整系の局所化挙動は大きく異なる。したがって、現実的な圧縮板の局所化挙動を検討するには初期たわみを持つ圧縮板を対象とする必要がある。さらに、厳密な意味で分岐により局所化が生じるためには初期たわみ形状は対称でなければならない⁴⁾。ここでは、対称な初期たわみ形状として、第1分岐点に関連する座屈挙動の解析に通常用いられる図-7に示す sine 波を採用する。この結果、図-5に示すように完全系では第2分岐点での挙動である局所化現象は第1分岐点の問題となる。

なお、本数値解析では各増分ステップで Newton-Raphson 法を用いて収束解を得たが、不釣り合い力

(1) $a/b=1.0$ 

$$u_0 = \xi b \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

(2) $a/b=2.0$ 

$$u_0 = \xi b \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

図-7 周期的初期たわみ

の節点力に対する許容誤差を 0.01 とした。得られた解の精度については汎用プログラムと比較することにより確認した¹³⁾。

(2) 分岐計算に基づく局所化解析の結果と考察

a) 分岐点での局所化経路方向への増分

ここで用いた sine 波などの周期的初期たわみを持つ圧縮板の局所化現象は図-5に示すように、最初の分岐点で発生し、式(54a,b)の成立が局所化発生のための条件となる。すなわち、式(54a)によって分岐点が特定され、局所化経路となる分岐経路方向への変位増分は式(54b)で求められる。式(54b)の定数は分岐の瞬間、圧縮板内に中立と負荷状態のみ発生するという条件で決定される。ここでは、図-7に示す周期的初期たわみとして十分小さな値 $\xi = 10^{-4}$ を持つ圧縮板⁴⁾を対象に、図-4に示す載荷辺の x 方向変位を単調に増加させたときの局所化挙動を計算する。このとき、材料構成則としてはパイリニアモデルの他に二曲面モデルも用いる。

解析の結果、載荷辺の x 方向変位が $\delta/a \leq 5 \times 10^{-3}$ の範囲で分岐が生ずる圧縮板の主経路方向への増分変位モード、固有ベクトルモード、分岐経路方向への増分変位モードを長手方向について図-8に示している。また、局所化経路の変形モード(局所化モード)の推移を図-9に示している。すなわち局所化が生ずる場合として辺長比 $a/b=2$ 、幅厚比 $b/t=40, 50, 100$ (幅厚比パラメータ $R=0.7, 0.88, 1.75$) の圧縮板に対して、構成則に二曲面モデルとパイリニアモデルを用いた場合について図示している。

図-8より、幅厚比により分岐経路方向への増分モードにかなり差があることがわかる。幅厚比の小さい $b/t=40$ の場合、この増分モードは図-9に示す局所化モードに近いが、幅厚比が大きくなるにつれて局所化モードとの間に差がでてくる。この理由は以下のように説明される。局所化モードとしては分岐前の変形と分岐経路方向への増分モードとの和として得られるが、幅厚比が小さいほど分岐前の変形

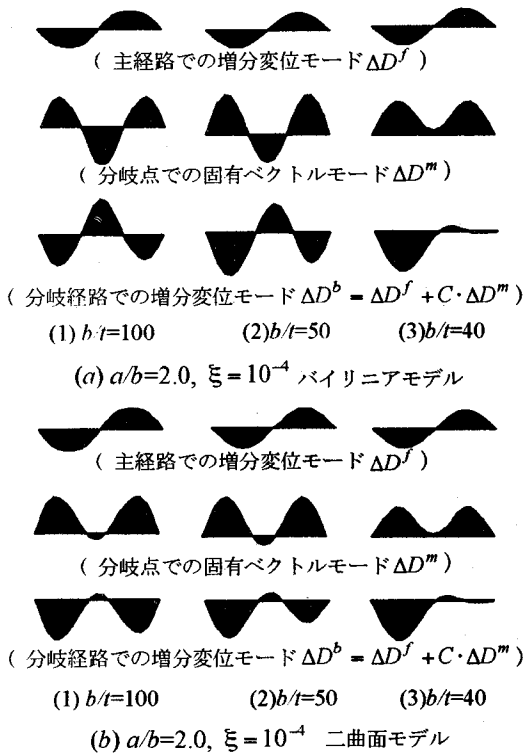


図-8 分岐点での主経路方向、分岐方向への増分変位モードと固有ベクトルモード

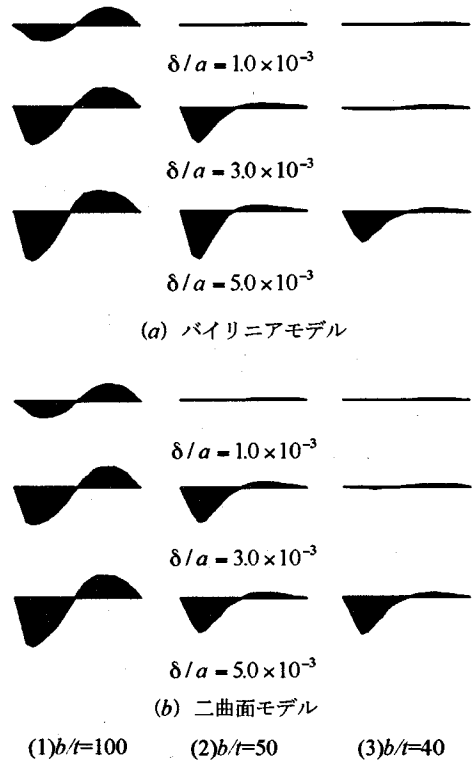


図-9 局所化経路の変形モードの推移 ($a/b=2.0$)

量が小さく、分岐方向への増分モードの寄与率が大きい。したがって局所化モードもこれに近似したものとなる。一方、幅厚比が大きい場合は分岐前の変形量が大きく、逆に分岐方向への増分モードの寄与率が小さい。この結果、局所化モードとの差が大きくなる。

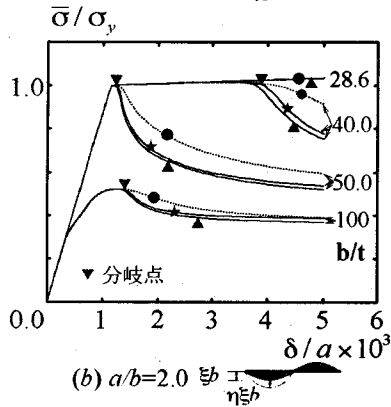
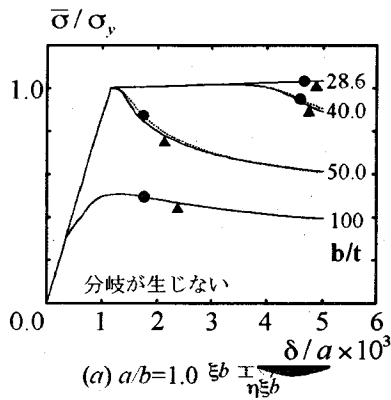
構成則による分岐方向への増分モードの差は図-8に示すように、幅厚比が小さい場合はほとんどないが、幅厚比が大きくなるにつれて顕著になる。しかしながら、先にも述べたように、幅厚比が大きい場合、分岐前の変形が大きいので、図-9のように、局所化モードにおける構成則間の実質的な差は小さい。また、図-8からわかるように、幅厚比が大きくなると分岐経路方向への増分モードにおける固有ベクトルモードの寄与率が大きくなり、両モードはほぼ近似している。このような場合、分岐解析で分岐経路方向への増分量の近似的な試行値として、固有ベクトルモードを与える従来から多く用いられる手法も可能となるものと考えられる。

b) 座屈モードの局所化挙動の特性

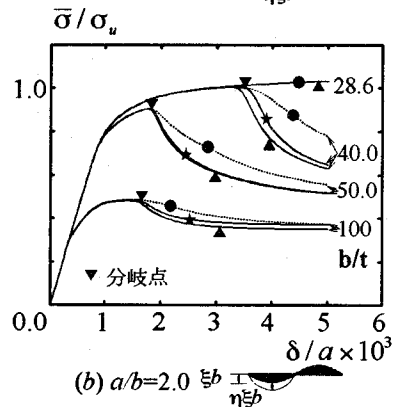
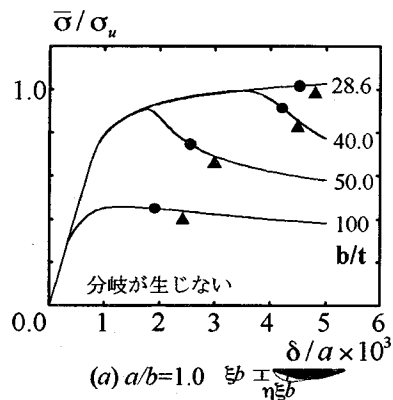
$\xi = 10^{-4}$ の大きさの微小な周期的初期たわみを持

つ圧縮板を対象に、まず、圧縮板の諸元、材料構成則が局所化挙動に与える影響を検討する。分岐解析の結果得られた局所化経路と主経路は材料構成則にバイリニアモデルと二曲面モデルを用いた場合に分け、載荷辺の無次元化平均圧縮応力 ($\bar{\sigma}/\sigma_y, \bar{\sigma}/\sigma_u$) と無次元化軸方向変位 (δ/a) の関係として、それぞれ図-10, 11 に示している。さらに各図では辺長比 a/b ごとに分け、幅厚比 b/t をパラメータとして図示している。図-10, 11 には局所化した初期たわみを与えた場合の結果も含めているが、これらについては、後の(3)の所で説明する。図中の η が局所化した初期たわみの大きさを表すパラメータで、 $\eta = 0$ のときがここで検討対象となる周期的初期たわみのみを持つ場合である。

図-10, 11 の (b)より、 $a/b=2.0$ のときは材料構成則によらず載荷辺の変位 $\delta/a \leq 5 \times 10^{-3}$ の範囲で、幅厚比 $b/t=28.6 (R=0.5)$ の場合を除きすべての圧縮板で塑性分岐による局所化挙動が生ずることが確認される。ただ、材料構成則により座屈モードの局所化が発生する軸方向変位の大きさや、局所化による荷重の低下傾向に差がある。二曲面モデルの場合はバイリニアモデルと比較して、より大きな変位で局所



$\xi = 10^{-4}$, ●: 主経路 ★: 局所化経路($\eta=0$)
 ▲: 局所化した初期たわみがある場合の経路($\eta=0.1$)
 図-10 単調載荷条件下の挙動 (バイリニアモデル)



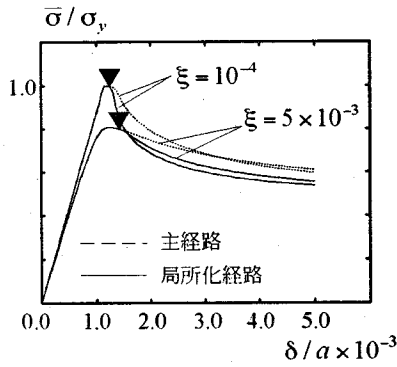
$\xi = 10^{-4}$, ●: 主経路 ★: 局所化経路($\eta=0$)
 ▲: 局所化した初期たわみがある場合の経路($\eta=0.1$)
 図-11 単調載荷条件下の挙動 (二曲面モデル)

化が発生し、局所化による荷重低下もやや小さい。これは二曲面モデルの場合、降伏応力がバイリニアモデルに比べ低いため、材料の塑性化による剛性低下が早いこと、また降伏期のない二曲面モデルの特性より剛性の低下が徐々に生ずることに起因している。すなわち、二曲面モデルの場合、圧縮板の剛性低下が早く、しかも緩やかに進むので、バイリニアモデルに比べ最大荷重到達時の軸方向変位が大きくなり、最大荷重到達後に生ずる局所化現象の発生が遅れる。また、この場合、最大荷重自体が低下するので、局所化による荷重低下も小さい。上記のようなメカニズムは残留応力を持つ圧縮板が、残留応力がない場合に比べ剛性低下が大きいため、局所化現象の発生が遅れ、また局所化による荷重低下が小さくなる⁴⁾のと同じである。

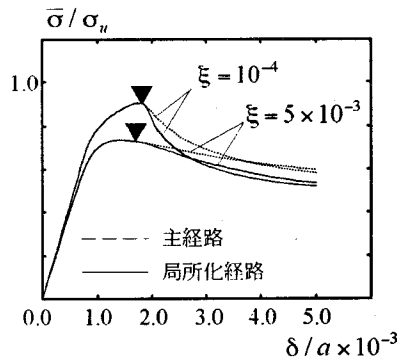
$a/b=1.0$ の圧縮板については、その局所化現象の発生は文献4)の近似解析では必ずしも明瞭ではなかったが、今回の厳密な分岐解析法で局所化が全く生じないことを確認できた。

つぎに、周期的初期たわみの大きさが局所化挙動に与える影響を見るために、現実的な範囲の値 $\xi=5 \times 10^{-3}$ を与えたときの $a/b=2.0$, $b/t=50$ ($R=0.88$)の圧縮板の挙動を解析した。得られたつり合い経路は材料構成則にバイリニアモデルと二曲面モデルを用いた場合に分け図-12に示している。

図-12の(a),(b)を比較してわかるように、いずれの構成則を用いる場合も、周期的初期たわみの値が大きいほど、大きな軸方向変位で局所化が生じ、荷重の低下率も小さい。これは、初期たわみが大きいと、圧縮板が曲げにより早く塑性化し、軸方向剛性の低下が大きいためである。この剛性の低下で、つり合い曲線上の最大荷重到達時の軸方向変位が大きくなり、局所化の発生が遅れる。また、最大荷重の低下により局所化による荷重低下も小さい。このような挙動は先に述べたように、材料構成則に二曲面モデルを用いた場合や残留応力が存在する場合と同様である。



(a) パイリニアモデル



(b) 二曲面モデル


$a/b=2.0, b/t=50$ 

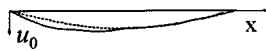
図-12 周期的初期たわみと局所化挙動

(3) 近似的な局所化解析法と局所化した初期たわみの影響

分岐解析によらず、微小な局所化した初期たわみを与え、近似的に局所化現象を解析する文献 2), 4) で用いた手法の妥当性を厳密な塑性分岐解析に基づく解析結果と比較することにより検討する。さらに、初期たわみの大きさを変化させることにより、初期たわみに対する局所化現象の感度を調べる。

初期たわみとしては図-7 に示す周期的なものに、局所化したたわみを加えた図-13 に示すものを用いる。周期的初期たわみの大きさとしては $\xi = 10^{-4}$ とし、局所化した初期たわみの大きさは周期的なたわみの 10% に相当する $\eta = 0.1$ を用いる。これらの局所化した初期たわみは文献 4) で用いたものと同じである。解析結果は、平均圧縮応力と軸方向変位の関係として、材料構成則に応じて図-10, 11 に追加して示している。

図-10, 11 より微小な局所化した初期たわみを与えた場合、 $a/b=2.0$ の板では局所化が生ずる場合、解析結果は分岐解析による局所化経路とほぼ同じつり合い経路をたどる。ただ、幅厚比が小さい $b/t=40$

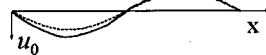
(1) $a/b=1.0$ 

$$u_0 = b \left[\xi \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \eta \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$(0 \leq x \leq \frac{a}{2})$$

$$u_0 = \xi b \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\left(\frac{a}{2} \leq x \leq a\right)$$

(2) $a/b=2.0$ 

$$u_0 = (1 + \eta) \xi b \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (0 \leq x \leq \frac{a}{2})$$

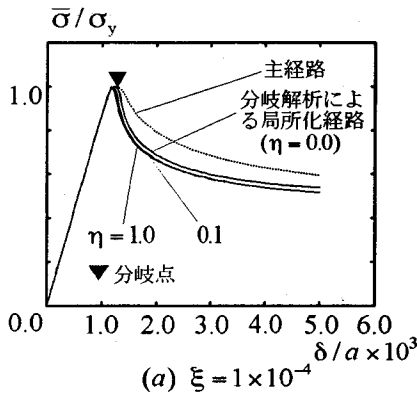
$$u_0 = \xi b \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad \left(\frac{a}{2} \leq x \leq a\right)$$

図-13 局所化した初期たわみ

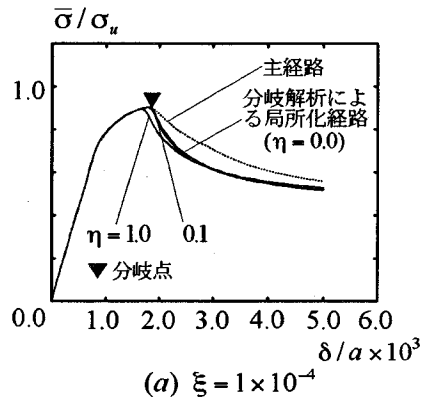
($R=0.7$) の場合は分岐解析による局所化経路とは若干差が生じており、初期たわみに対してやや敏感であると言える。一方、局所化が生じない $a/b=1.0$ の板では局所化した初期たわみを与えても、得られるつり合い経路と主経路との差はほとんどない。これから、周期的な初期たわみを持つ圧縮板において、塑性分岐による局所化現象が生じない場合は、局所化した初期たわみがあっても、局所変形は進展せず、最大耐力到達後の主経路からの荷重低下もほとんどないことがわかる。以上のように、文献 2), 4) で用いた微小な局所化した初期たわみを与え、分岐解析を行わない近似的な局所化解析法により得られるつり合い経路は厳密な分岐解析により得られるものとほぼ一致しており、近似手法の妥当性が確認される。

つぎに、局所化挙動の生ずる $a/b=2.0, b/t=50$ ($R=0.88$) の板を対象に、周期的初期たわみならびに局所化した初期たわみの大きさを増加させ、局所化挙動に対する初期不整の影響を検討してみる。周期的な初期たわみの大きさとしては先に用いた $\xi = 10^{-4}$ に加えて、現実的な範囲の値 $\xi = 5 \times 10^{-3}$ についても調べる。また、局所化した初期たわみとしては $\eta = 0.1$ の他、より大きな値 $\eta = 1.0$ を考える。得られたつり合い経路は材料構成則にパイリニアモデルと二曲面モデルを用いた場合に分け図-14, 15 に示している。さらに、各図ではつり合い経路を周期的な初期たわみの大きさごとに分け、 η をパラメータとして図示している。

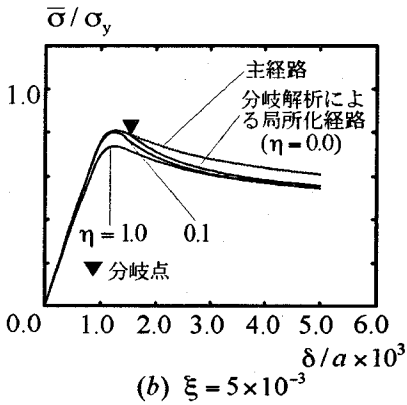
図-14, 15 をもとに、局所化した初期たわみが座屈モードの局所化挙動に与える影響について検討する。いずれの材料構成則を用いた場合も、周期的初期たわみが十分小さい $\xi = 10^{-4}$ のときは、局所化した初



(a) $\xi = 1 \times 10^{-4}$



(a) $\xi = 1 \times 10^{-4}$



(b) $\xi = 5 \times 10^{-3}$


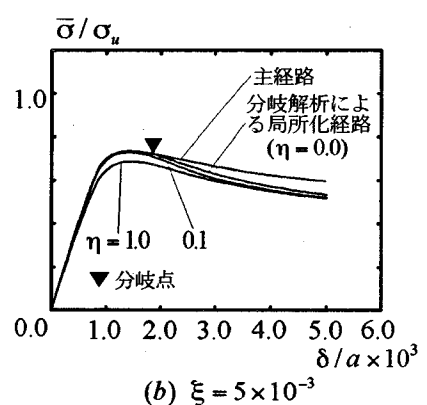
$a/b=2.0, b/t=50$ 

図-14 初期たわみと局所化挙動 (バイリニアモデル)



(b) $\xi = 5 \times 10^{-3}$


$a/b=2.0, b/t=50$ 

図-15 初期たわみと局所化挙動 (二曲面モデル)

期たわみの割合がかなり大きい $\eta = 1.0$ においても、つり合い経路は分岐解析から得られる局所化経路とほぼ一致し、局所化挙動は初期たわみに対して敏感ではない。一方、周期的初期たわみが現実的な大きさである $\xi = 5 \times 10^{-3}$ に増加すると、 $\eta = 1.0$ の場合、局所化した初期たわみの影響がやや大きく現れ、板の最大耐力も低下する。しかしながら最大荷重到達後、局所化変形が顕著になると、初期たわみがつり合い経路に与える影響は減少していく。以上のように、現実の大きさの周期的初期たわみを持つ板では、局所的な初期たわみが大きいと、局所化現象による変形能の低下のみならず最大耐力の低下も生ずる可能性があることを示唆している。

(4) 繰り返し荷重下の挙動特性

ここでは、辺長比 $a/b=2.0$ 、幅厚比 $b/t=50 (R=0.88)$ の板を対象として、材料構成則にバイリニアモデルと二曲面モデルを用いた場合の繰り返し荷重時の挙動を解析する。圧縮板に考慮する初期たわみ形状は単調荷重の場合と同様図-7, 13 に示す周期モードと、

局所化モードの2タイプである。図-7の周期的初期たわみの大きさとしては2通りの ξ の値 ($\xi = 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-3}$) を与える、また、局所化した初期たわみとしては、図-13 に示すように、先に述べた周期的初期たわみに加えて2通りの η の値 ($\eta = 0.1, 1.0$) を考慮する。荷重方法としては、図-4の荷重辺の軸方向変位制御により、両振りの定変位振幅を6サイクル与える。片側振幅の大きさとしては、単調荷重条件下で、いずれの構成則の場合も局所化が生ずる変位量より大きな値 $\delta/a = 2.0 \times 10^{-3}$ を設定する。

解析結果として、各荷重サイクルでの圧縮板の最大平均圧縮応力 $\bar{\sigma}_{\max}$ の低下傾向を各構成則ごとに図-16, 17 に示している。各図では、周期的初期たわみの大きさ ξ ごとに η をパラメータとして図示している。また、これらの図には比較のために、局所化を無視したいわゆる基本経路での繰り返し荷重による最大平均圧縮応力の低下傾向も示している。なお、最大平均圧縮応力はいずれも周期的初期たわみのみを持つ圧縮板の1回目の荷重サイクルで生ず

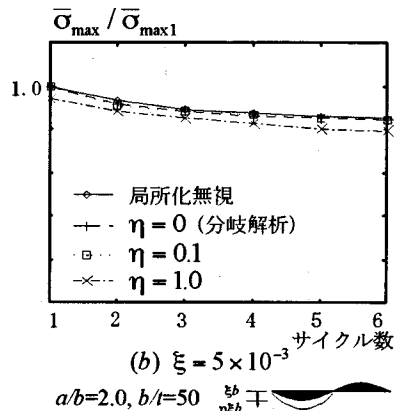
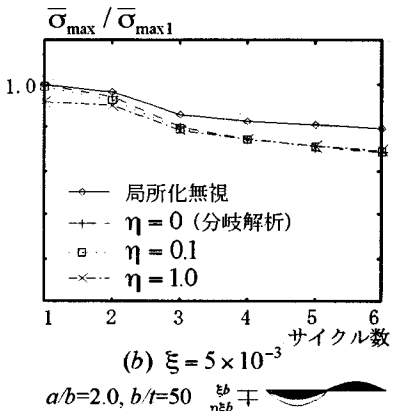
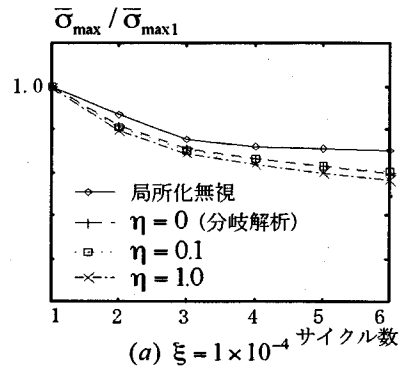
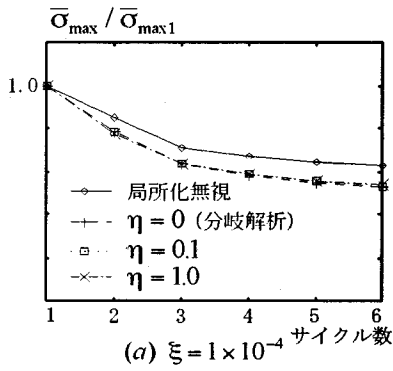


図-16 初期たわみと繰り返し载荷による耐力低下 (バイリニアモデル)

図-17 初期たわみと繰り返し载荷による耐力低下 (二曲面モデル)

る最大平均圧縮応力 $\bar{\sigma}_{max1}$ で無次元化している。

図-16, 17 より, まず, 局所化した初期たわみが零 ($\eta = 0$) の場合について材料構成則と周期的初期たわみが繰り返し荷重下の局所化挙動に与える影響について調べる。先に述べた単調载荷の場合と同様, 繰り返し载荷においても, 構成則がバイリニアモデルの場合や周期的初期たわみが小さいときほど, 局所化による繰り返し荷重下の荷重の低下が顕著になる。逆に, 二曲面モデルで周期的初期たわみが大きいと, 図-17(b)のように局所化による荷重低下はほとんど生じない。

局所化した初期たわみの影響については, η が 0.1 程度の小さい値をとれば, 周期的初期たわみの大きさや構成則モデルによらず, 局所化した初期たわみが零の場合と同じ荷重低下特性を示す。これより繰り返し荷重下においても, $\eta = 0.1$ 程度の小さな局所化した初期たわみを与える限り, 近似的な局所化解析法も十分妥当な解が得られることが確認される。

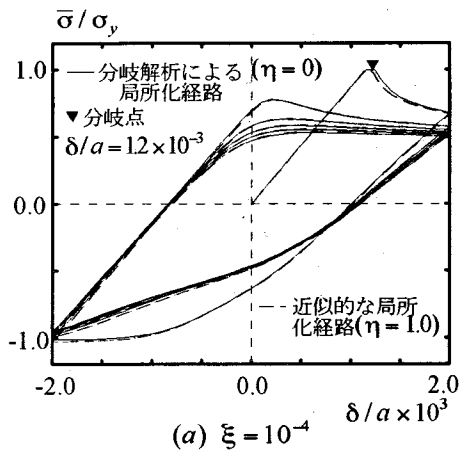
一方, 局所化した初期たわみの大きさが $\eta = 1.0$ と増加すると, 初期たわみの影響が圧縮板の劣化挙動に現れるようになる。このとき, 構成則として二曲

面モデルを用いると, バイリニアモデルとは逆に, 繰り返し载荷回数が増加するにつれ, 局所化した初期たわみの影響がやや増す傾向にあり, 荷重の劣化も若干大きい。これは, 二曲面モデルでは, 構成関係がひずみ履歴にやや敏感であることに起因していると考えられる。

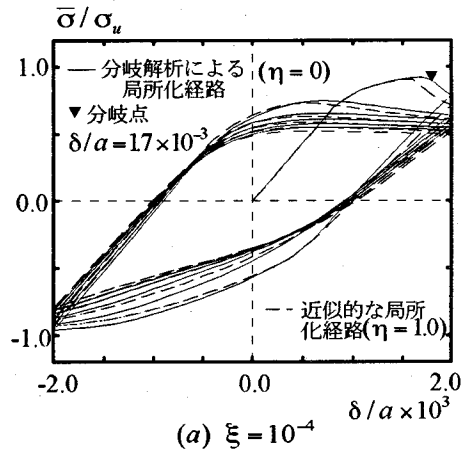
さらに, 図-18, 19 には局所化した初期たわみの影響が現れる ($\eta = 1.0$) の場合について, 平均応力と軸方向変位間のヒステリシスループを局所化した初期たわみが零 ($\eta = 0$) の場合と比較している。この図より, 圧縮板のヒステリシスループにおける局所化した初期たわみの影響の現れ方は, 定性的には, 図-16, 17 に示した最大平均圧縮応力の劣化挙動で説明した通りである。なお, ここで考慮した局所化した初期たわみでは圧縮板の履歴吸収エネルギーが若干低下する程度で, ヒステリシスループの形状が大きく変化することはない。

5. まとめ

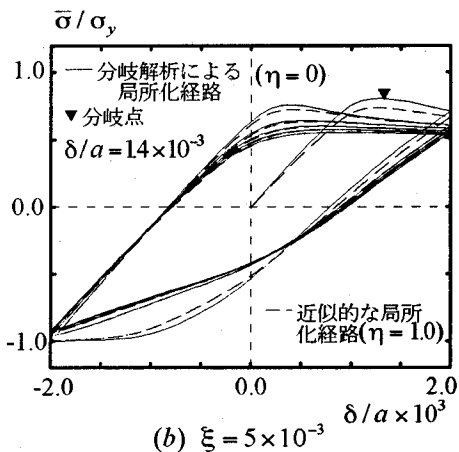
圧縮板の変形能低下に大きな影響を与える塑性座屈モードの局所化現象を厳密に扱うためには, 最大



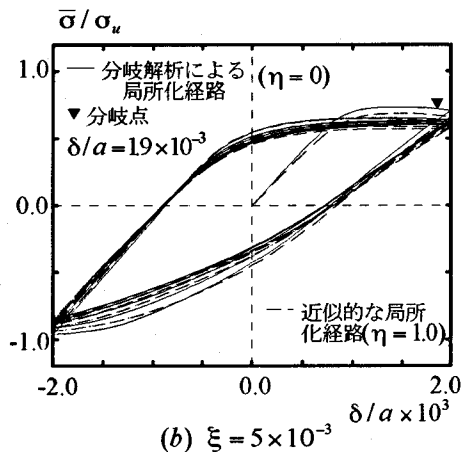
(a) $\xi = 10^{-4}$



(a) $\xi = 10^{-4}$



(b) $\xi = 5 \times 10^{-3}$



(b) $\xi = 5 \times 10^{-3}$

$a/b=2.0, b/t=50$
局所化した初期たわみ $\frac{w_0}{t}$ 干渉

図-18 局所化した初期たわみが繰り返し荷重下局所化挙動に与える影響 (パイリニアモデル)

$a/b=2.0, b/t=50$
局所化した初期たわみ $\frac{w_0}{t}$ 干渉

図-19 局所化した初期たわみが繰り返し荷重下局所化挙動に与える影響 (二曲面モデル)

耐力到達後に生ずる荷重減少経路上での塑性分岐挙動を解析しなければならない。ここでは、まず、一般的な平面応力状態での荷重減少経路からの塑性分岐挙動を正確に解析する手法を提示した。このとき、材料の塑性構成則としては、J2 流れ理論の範囲で、硬化係数を一定としたパイリニアモデルの他に、繰り返し荷重下を対象とした二曲面モデルも考慮している。つぎに、提示した厳密な局所化の解析手法を用い、局所化した初期たわみが局所化挙動に与える影響を調べた。この結果をもとに、局所化した初期たわみを与え、塑性分岐解析によらず局所化経路を求める近似手法の妥当性を検討した。さらに、材料構成則、初期たわみの大きさが局所化挙動に与える影響についても言及した。得られた結果を以下にまとめる。

1) 提示した局所化解析手法は、有限要素法で離散

化した圧縮板の複合非線形モデルに Hill の分岐条件を適用し分岐点、分岐経路を求めるもので、正確な局所化経路を求めることができる。

- 2) 辺長比 a/b が 1 の圧縮板では、少なくとも幅厚比パラメータ R が 0.5~1.75 の範囲では塑性分岐による局所化挙動が生じないことが確認できた。したがって、局所化した初期たわみを与えても、主経路からの荷重低下はほとんど生じない。
- 3) 圧縮板の複合非線形解析において、周期的初期たわみの 10% 程度の局所化した初期たわみを与えると、分岐解析で得られる局所化経路と差のないつり合い経路が得られる。つまり、初期たわみを与え、近似的に局所化挙動を解析する手法は、適切な初期たわみを設定すれば単調載荷、繰り返し載荷条件下の局所化挙動を十分妥当な精度で解析しうる。

- 4) 周期的な初期たわみが大きくなると、最大荷重到達前に圧縮板の曲げによる塑性化で剛性が減少する。これにより、最大荷重到達時の変位が大きくなり、最大荷重値も低下する。したがって、最大荷重到達後に生ずる局所化の発生が遅れ、かつ局所化による荷重の低下率も小さくなる。
- 5) 周期的初期たわみが現実的な値を持つ場合、局所化した初期たわみが大きくなると、局所化現象により、変形能の低下のみならず、最大荷重の低下も生ずる可能性がある。
- 6) 構成則に関して、バイリニアモデルは二曲面モデルより局所化挙動が生じやすい。また、これによる荷重低下も単調荷重、繰り返し荷重を通じて大きくなる。これは二曲面モデルでは、圧縮板の塑性化による剛性低下が早く、しかも緩やかに進むことによる。
- 7) 二曲面モデルにおいては、初期たわみの影響が局所化挙動を含め繰り返し荷重下の圧縮板の挙動に若干影響を与える。これは、二曲面モデルによる応力-ひずみ関係がひずみ履歴にやや敏感であることに起因していると考えられる。

補遺

完全系圧縮板の第一分岐点

単純な完全系圧縮板の内部の応力は

$$\sigma_x = \alpha, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \quad (\text{補.1})$$

これより

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T = \frac{1}{2f} \left\{ 2\sigma_x - \sigma_y \quad 2\sigma_y - \sigma_x \quad 6\tau_{xy} \right\} \quad (\text{補.2})$$

$$= \left\{ 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \right\}$$

式(補.2)を式(27)に代入すると

$$\left[E_{ij}^{ep} \right] = E \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (\text{補.3})$$

ここに

$$k_1 = \frac{1+3e}{\Omega} \quad k_2 = \frac{2-(2-4\nu)e}{\Omega} \quad (\text{補.4a~d})$$

$$k_3 = \frac{4}{\Omega} \quad k_4 = \frac{1}{2+2\nu}$$

$$e = \frac{E'}{E}, \quad \Omega = (5-4\nu) - (1-2\nu)^2 e \quad (\text{補.5a~b})$$

板曲げ問題において、面外曲げモーメント M_x, M_y , 面内外力ねじれモーメント M_{xy} と変位の増分関係

表-補1 完全系圧縮板の第一分岐点

$e = E' / E$	k	b/t=50	
		σ_{cr} (MPa)	$\delta / a \times 10^3$
1.0	4.000	303.7	1.45
0.5	3.773	286.5	1.64
0.25	3.663	278.1	1.98
0.01	3.560	270.2	18.25

$E = 2.058 \times 10^5 \text{ MPa}, \nu = 0.3, \sigma_y = 235 \text{ MPa}$

は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{t^3}{12} \left[E_{ij}^{ep} \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{補.6})$$

ここに、 t は板厚である。

x 軸一方向のみに荷重される圧縮板を考えると、局部座屈の支配方程式は下式ようになる。

$$\frac{\partial^2 \Delta M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta M_y}{\partial y^2} - N_x \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{補.7})$$

$a/b=1$ の板について、4辺単純支持の境界条件を満足する式(補.7)の解として

$$\Delta w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (\text{補.8})$$

を仮定し、式(補.6)、式(補.8)を式(補.7)に代入すると座屈荷重は

$$N_x = (k_1 + 2k_2 + k_3 + 4k_4) \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \quad (\text{補.9})$$

ここに

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)} \quad (\text{補.10})$$

また、圧縮板の座屈応力は：

$$\sigma_{cr} = \frac{N_x}{t} = k\sigma_e \quad (\text{補.11})$$

ここに

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (\text{補.12})$$

$$k = \left(\frac{9-e+8\nu e}{\Omega} + \frac{2}{1+\nu} \right) (1-\nu^2) \quad (\text{補.13})$$

係数 k は板の塑性座屈係数である。

式(補.11)をもとに幅厚比 $b/t=50$ の圧縮板第一分岐点の座屈応力 σ_{cr} 及び無次元化 x 方向変位 δ/a と $e = E' / E$ の関係を計算し、表-補1に示している。

参考文献

- 1) 後藤芳顯, 川西直樹, 鳥羽保行、小畑誠: 構造物の塑性座屈モードの局所化による変形能の低下と繰り返し荷重下の挙動, 土木学会論文集, No.483/I-26, pp. 87-96, 1994年1月.
- 2) Goto, Y., Toba, Y. and Matsuoka, H.: Localization of Plastic Buckling Patterns under Cyclic Loading, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.121, No.4, pp.493-501, April 1995.
- 3) 後藤芳顯, 小野聖久, 鳥羽保行、小畑誠: 軸対称変形する円筒殻の座屈モードの局所化と繰り返し荷重下の挙動, 第44応用力学連合講演会, 講演予稿集, pp. 193-194, 1994年12月.
- 4) 後藤芳顯, 松岡宏典, 王慶雲, 鳥羽保行: 圧縮板の塑性座屈モードの局所化と変形能の低下, 土木学会論文集, No.513/I-31, pp. 39-51, 1995年4月.
- 5) Tvergaard, V. and Needleman, A.: On the Localization of Plastic Buckling Patterns, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.43, pp. 613-619, 1980.
- 6) Tvergaard, V.: On the Transition from a Diamond Mode to an Axisymmetric Mode of Collapse in Cylindrical Shell, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.19, No.10, pp. 845-856, 1983.
- 7) Hill, R.: A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic Plastic Solids, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol.6, pp. 236-249, 1958.
- 8) Dafalias, Y.E. and Popov, E.P.: Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.43, pp. 645-651, 1976.
- 9) Goto, Y., Li, X. S., Kasugai, T. and Obata, M.: Analysis of Greenhill Problem by a Co-Rotational Method, 構造工学論文集, Vol.41A, pp. 411-420, 1995年3月.
- 10) Bergan, P. G. and Felippa, C. A.: A Triangular Membrane Element with Rotational Degree of Freedom, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.50, pp.25-69, 1985.
- 11) Bazeley G. P., Cheung Y. K., Irons B. M. and Zienkiewicz O. C.: Triangular Elements in Bending-Conforming and Non-Conforming Solutions, *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
- 12) 福本 昉士: 鋼構造の機能性向上からみた高張力鋼の実用化に関する研究, 文部省科研試験研究B報告書, 1992年3月.
- 13) 後藤芳顯, 王慶雲, 松岡宏典, 小畑誠: 構成則が圧縮板の繰り返し荷重下の局所化挙動に与える影響, 土木学会中部支部平成6年度研究発表会講演概要集, I-20, 1995年3月.

(1995.11.27 受付)

A RIGOROUS METHOD FOR THE ANALYSIS OF LOCALIZATION BEHAVIOR OF COMPRESSION PLATE

Yoshiaki GOTO, Qingyun WANG and Makoto OBATA

A rigorous method for the analysis of plastic bifurcation under in-plane stress was presented in order to precisely assess the localization of plastic buckling patterns of plates structures. In this analysis, two kinds of constitutive models, i.e. bi-linear model and two-surface model, respectively, within the framework of J2 flow theory, were considered to investigate the effect of constitutive relations. By using this method, it was examined how the localization behavior is influenced by the localized initial deflections. Based on this result, we discussed the validity of the approximate method proposed by Tvergaard and Needleman where a small localized initial deflection was given to analyze the localization phenomenon without carrying out the plastic bifurcation analysis.