



じる位置で共通接線をもつ2つの梢円曲線を用い、Lipkeは最大流速の生じる位置より上は梢円下は放物線とし、Kozenyは梢円分布を提唱した。また、Humphreys-AbbotはMississippi河での実測結果より水表面下に最大流速を有する2次放物線式を発表した。これに対し、Hagenは実験式として鉛直軸をもつ頂点を床上に有する放物線式を主張し、Jasmundは鉛直軸を有する対数曲線式を仮定しElbe河における実測の結果と一致することを確かめた。そのほか、KaplanやLavaleの指數公式がある。

日本では、速水第一郎教授<sup>7)</sup>がGebeleinの2平行板内の乱れの下部分を開水路に用いた理論式を示され、安芸峻一教授<sup>8)</sup>は渦動粘性係数を深さに無関係な定数と仮定して、最大流速の位置の割合 $\alpha$ 、水深 $h$ 、水面勾配 $I$ 、Chézyの係数 $C$ を含む2次式を誘導され、久宝保教授<sup>9)</sup>は最大流速の位置において乱れの混合距離を一定としましたこの位置の上下において流速分布を対称であると仮定して、 $\alpha, h, I$ および粗度係数 $n$ を含む逆双曲正弦曲線式を導かれた。

筆者は、次に述べるように、最大流速の位置の割合 $\alpha$ 、表面流速と縦平均流速との比 $k$ および縦平均流速 $v_m$ を含む2次式を解析的に誘導した。すなわち、図-1に示すように、開水路の等流において流れの方向に $x$ 軸を深さにそつて $z$ 軸をとり、流れの中に幅が単位長さの微小体 $\delta x \delta z$ を考える。 $z$ 点での乱れによるセン応力を $\tau$ とし、 $x$ 方向の力の釣合を考えると、上下流面に垂直に働く力 $p\delta z$ は相殺されるから、けつきよく、次の式が成り立つ。

$$\tau \delta x - \{\tau + (\partial \tau / \partial z) \delta z\} \delta x + w_0 \delta x \delta z \cdot I = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(a)}$$

ここに、 $w_0$ は水の単位容積の重量、 $I$ は水面勾配である。上の式から、

$$\partial \tau / \partial z = w_0 I \quad \dots \dots \dots \text{(b)}$$

がえられるから、これを $z$ に関して1度積分すれば、積分定数を $c$ として、

$$\tau = w_0 Iz + c \quad \dots \dots \dots \text{(c)}$$

ここで、河底 $z=h$ におけるセン応力を $\tau_0$ とすれば、

$$\tau = \tau_0 - w_0 Ih \quad \dots \dots \dots \text{(d)}$$

これを(c)式に入れれば、

$$\tau = w_0 I(z-h) + \tau_0 \quad \dots \dots \dots \text{(e)}$$

さて、乱れによるセン応力 $\tau$ は、渦動粘性係数を $\epsilon$ とすると、 $\rho$ を水の密度として、

$$\tau = -\rho \epsilon (dv/dz) \quad \dots \dots \dots \text{(f)}$$

で表わされるから、この関係を(e)式に入れると、 $g$ を重力加速度として、

$$\epsilon (dv/dz) = gI(h-z) - (\tau_0/\rho) \quad \dots \dots \dots \text{(g)}$$

いま、最大流速の位置の割合 $\alpha$ を考える。この $\alpha$ の値は、最大流速が水面またはそれ以下において実際に生じているときには $\alpha \geq 0$ であるが、そうでないときには $\alpha < 0$ である。すなわち、 $\alpha$ は数学的にいうならば横座標 $v$ が極大となる点の $z$ 座標の値を水深 $h$ で割つたものである。このような $\alpha$ の値を用いると、 $z=\alpha h$ において $dv/dz=0$ であるから、(g)式より、

$$\tau_0/\rho = ghI(1-\alpha) \quad \dots \dots \dots \text{(h)}$$

ゆえに、摩擦速度を $v_*$ とすると、開水路においては、

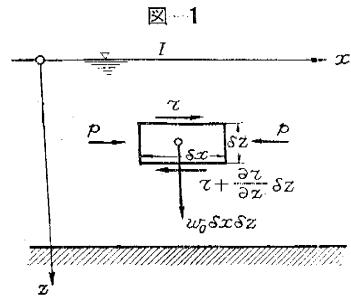
$$v_* = \sqrt{\tau_0/\rho} = \sqrt{ghI(1-\alpha)} \quad \dots \dots \dots \text{(i)}$$

摩擦速度を $v_* = \sqrt{ghI}$ とするのは、 $\alpha = 0$ すなわち最大流速が水表面において生じているときであつて、一般的には(i)式のように表わされる。

さて、(h)式を(g)式に入れると、次の式がえられる。

$$\epsilon (dv/dz) = ghI\{\alpha - (z/h)\} \quad \dots \dots \dots \text{(j)}$$

(j)式を解くためには、 $\epsilon$ が $z$ のどのような函数で表わされるかを知らなければならないが、この理論的な函数形は口下のところ不明というほかはない。Boussinesqはこれを深さに無関係な定数であるといい、Kreyは深さにつれて放物線的に変化すると述べているが<sup>10)</sup>、Kozeny<sup>11)</sup>はDonau河の実測値から、大体において、 $\epsilon$ は流速の減少函数で $\epsilon = K/\{a + (z/h)\}$ で表わされると主張した。ここに、 $K$ は河底粗度や河底流速によつて変わるが $z$ には無関係な定数であり、 $a$ は1より大きい定数である。このように、 $\epsilon$ の函数形はいろいろと議論のあるところであるから、いま、一般に $z$ の函数として(j)式を $z$ に関して積分すると、



$$v = ghI \left( \alpha \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} dz - \frac{1}{h} \int_{\epsilon}^{\frac{z}{\epsilon}} dz \right) \dots \dots \dots \quad (k)$$

(k) 式より明らかのように、 $\epsilon$  を Boussinesq などのように定数と仮定すれば垂直流速曲線は2次式となり、Kozeny の式を採用すれば3次式となる。いま、 $\epsilon$  を定数と仮定する場合の垂直流速曲線式を誘導しよう。(k) 式より、 $c$  を積分定数として、

$$v = (ghI/\epsilon) \{ \alpha z - (z^2/2h) \} + c \dots \dots \dots \quad (l)$$

表面流速を  $v_s$  とすれば、 $c = v_s$  となるから (l) 式は、

$$v = v_s + (ghI/\epsilon) \{ \alpha z - (z^2/2h) \} \dots \dots \dots \quad (m)$$

ここで、縦平均流速  $v_m$  を導入すると、

$$v_m = \frac{1}{h} \int_0^h v dz = v_s + \frac{gI}{\epsilon} \left( \frac{\alpha h^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) = v_s - \frac{gI}{6\epsilon} (1 - 3\alpha) h^2 \dots \dots \dots \quad (n)$$

ゆえに、(n) 式より渦動粘性係数  $\epsilon$  は、

$$\epsilon = gI(1 - 3\alpha)h^2 / [6(v_s - v_m)] \dots \dots \dots \quad (o)$$

(o) 式を (m) 式に入れて  $\epsilon$  を消去すると容易に次の式がえられる。

$$v = (v_m/p) \{ pk + 2\alpha(z/h) - (z/h)^2 \} \dots \dots \dots \quad (6)$$

ここに、 $k$  は表面流速  $v_s$  と縦平均流速  $v_m$  の比 ( $k = v_s/v_m$ ) であり、 $p$  は、 $p = (1 - 3\alpha)/[3(k-1)]$  である。

さて、(6) 式は垂直流速曲線を軸が水平な2次放物線であると仮定して誘導した従来の諸公式のすべてを含むものである。例えば、Bazin の公式<sup>12)</sup>,

$$v = v_s - 24(z/h)^2 \sqrt{hI} = v_m + \{8 - 24(z/h)^2\} \sqrt{hI}$$

は (6) 式において  $\alpha = 0$ ,  $k = 1 + (8/C)$  ( $C$  は Chèzy の流速係数で,  $v_m = C \sqrt{hI}$ ) とおいてえられる特別な場合である。 $\alpha = 0$  は放物線の軸が水表面に存在するとの仮定であり、後者の関係は  $C = 30 \sim 50$  とすることによつて  $k = 1.16 \sim 1.27$  となることを示す。

Boussinesq の公式<sup>13)</sup>,

$$v = v_m [1 + (a/3C) \{ (1/3) - (z/h)^2 \}] \quad (a: \text{定数})$$

は (6) 式において  $\alpha = 0$ ,  $p = 3C/a$  とおいてえられる。後者の式より  $k = 1 + a/(9C)$  となるから (Bazin の公式は  $a = 72$  としたもの),  $a/C = 0.8 \sim 2.7$  ( $a = 40 \sim 80$ ,  $C = 30 \sim 50$ ) とすることによつて  $k = 1.10 \sim 1.30$  となる。

Humphreys-Abbot の公式<sup>14)</sup>,

$$v = v_{\max} - (0.28 v_m / \sqrt{h + 0.46})^{0.5} \{ (z - z_0)/h \}^2$$

( $v_{\max}$ : 最大流速,  $z_0$ : 最大流速の生じている点の深さ)

は (6) 式において  $p = (\sqrt{h + 0.46} v_m / 0.28)^{0.5}$  とおいてえられる。なぜならば、Humphreys-Abbot の公式において  $z_0/h = \alpha$  とおけば、

$$\begin{aligned} v = v_{\max} & - (0.28 v_m / \sqrt{h + 0.46})^{0.5} \alpha^2 - 2\alpha (0.28 v_m / \sqrt{h + 0.46})^{0.5} (z/h) \\ & - (0.28 v_m / \sqrt{h + 0.46})^{0.5} (z/h)^2 \end{aligned}$$

これと (6) 式とを比較して、

$$\begin{aligned} k &= (v_{\max}/v_m) - \{0.28 / (\sqrt{h + 0.46} v_m)\}^{0.5} \alpha^2 \\ p &= (\sqrt{h + 0.46} v_m / 0.28)^{0.5} \end{aligned}$$

がえられるが、前者の関係は後者の関係が成立していれば当然成り立つことが次のようにして証明される。すなわち、後者の関係を前者に入れれば、 $k = (v_{\max}/v_m) - (\alpha^2/p)$  となり、また、(6) 式において  $z/h = \alpha$  とおけば、 $v_{\max}/v_m = (pk + \alpha^2)/p$  がえられるからである。

安芸教授の公式<sup>15)</sup>,

$$v = \{C + (20/3) - 20\alpha + 40\alpha(z/h) - 20(z/h)^2\} \sqrt{hI}$$

は (6) 式において  $p = 20/C$  とおいてえられる。すなわち、 $k = 1 + [(1 - 3\alpha)C/60]$  である。安芸教授は  $\alpha = 0.0 \sim 0.3$  と考えておられるから、 $C = 30 \sim 50$  とすれば  $k = 1.08 \sim 1.83$  となる。

以上のように、Bazin, Boussinesq, Humphreys-Abbot, 安芸教授の諸公式はすべて (6) 式の特別な場合であることが明らかとなつた。すなわち、(6) 式における2つのパラメーター  $k$  と  $\alpha$  を適当に規定することによつていずれかの公式がえられるのである。筆者はこのパラメーターに影響を及ぼす因子を、河底粗度、水深、水面勾配、水面幅、風向と風速であると考えて、これらとの相関性を統計的に求めて、 $\alpha$  と  $k$  とが種々な条件のもと

において最大の確率をもつて生じるときの値を求めた<sup>16), 17)</sup>。

さて、垂直流速曲線の解析的な理論はしばらくおいて、縦平均流速の測定という問題に限るならば、2点法の公式は3次式まで誤差をともなわないから、 $\epsilon$ に関する Boussinesq や Kozeny の異論に關係なく正確な縦平均流速を求めることができる。

もし、Krey のように  $\epsilon$  を深さにそつての放物線式で表わすと、垂直流速曲線は対数曲線となる。そのほか  $\epsilon$  が  $z$  に関する他の函数形をとる場合には、(k) 式の右辺の積分は  $z$  の有理整式とならないのが一般であるが、(j) 式より明らかのように、 $1/\epsilon$  が  $z$  のとりうる区間  $[0, h]$  内のすべての点において正則であるならば、(j) の微分方程式の解もすべての点で正則となるから、(j) 式は次の形の級数解をもつ。

$$v = C_0 + C_1(z/h) + C_2(z/h)^2 + C_3(z/h)^3 + \dots$$

したがつて、この場合にも  $(z/h)^4$  以上の項を省略すれば2点法を用いて、また  $(z/h)^6$  以上の項を省略すれば平均値3点法を用いて、それぞれ縦平均流速の近似値を求めることができる。

次に、垂直流速曲線に関する対数曲線式について触れておこう。

Prandtl および Kármán による運動量輸送理論から円管内の流速分布曲線が誘導され、実験結果ときわめてよく一致した。M.P.O'Brien, G.H. Keulegan その他の人々によってこの公式の開水路への拡張が試みられたが、V.A. Vanoni<sup>18)</sup>もその1人で、これを幅 2.77 ft, 深さ 0.59 ft の矩形水路の中央での流速分布にあてはめてよい一致を示したと述べ、2割と8割との流速の平均が6割の点での流速にはほぼ一致することにより対数曲線説を支持している。円管内の流速分布を水路に拡張した式は<sup>19)</sup>,

$$v = v_{\max} + (v_{\max}/\kappa) \ln\{1 - (z/h)\} \dots \quad (7)$$

ここに、 $\kappa$  は普遍定数で円管に対しては  $\kappa=0.40$  であるが、E.H. Taylor<sup>20)</sup>は開水路に関する Bazin の実験値に照合させて、 $\kappa$  は開水路の形状によつて異なることを認め、採用した実験例の範囲では  $\kappa=0.22 \sim 0.43$  であつたと述べている。

(7) 式では、 $v$  は水表面に近づくにつれて大きくなり、最大流速は水表面において生じることを假定している。ところで、 $0 \leq z/h < 1$  であるから、(7) 式の右辺の自然対数は  $z/h$  のベキ級数に展開され、縦平均流速の測定において、2点法および平均値3点法を用いれば、展開式のそれぞれ  $(z/h)^4$  および  $(z/h)^6$  以上の項を省略したときの近似値を求めることがとなる。この場合の誤差はそれぞれ次のようになる。

(7) 式における縦平均流速  $v_m$  は、

$$v_m = \frac{1}{h} \int_0^h v dz = v_{\max} + \frac{v_{\max}}{\kappa h} \int_0^h \ln\left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = v_{\max} - \frac{v_{\max}}{\kappa} \dots \quad (p)$$

(p) 式を (7) 式に入れることにより、縦平均流速の位置の割合は 0.632 となることがわかる。

さて、2点法および平均値3点法における観測点の正確な位置  $z_1, z_2$  および  $z_1, z_2, z_3$  は、それぞれ次のとおりである<sup>21)</sup>。

$$\text{2点法: } z_1/h = (1 - \sqrt{1/3})/2 = 0.211, \quad z_2/h = (1 + \sqrt{1/3})/2 = 0.789$$

$$\text{平均値3点法: } z_1/h = (1 - \sqrt{3/5})/2 = 0.113, \quad z_2/h = 1/2 = 0.500,$$

$$z_3/h = (1 + \sqrt{3/5})/2 = 0.887$$

そこで、2点法において、観測点  $z_1, z_2$  における流速をそれぞれ  $v_1, v_2$  とすると、

$$v_1 = v_{\max} + (v_{\max}/\kappa) \ln\{(1 + \sqrt{1/3})/2\}, \quad v_2 = v_{\max} + (v_{\max}/\kappa) \ln\{(1 - \sqrt{1/3})/2\}$$

ゆえに、(1) 式の右辺の値は、

$$(v_1 + v_2)/2 = v_{\max} + (1/2)(v_{\max}/\kappa) \ln\{(1/4) - (1/12)\} = v_{\max} - 0.89588(v_{\max}/\kappa) \dots \quad (q)$$

したがつて、このときの誤差  $E_2$  は、

$$E_2 = \{(v_1 + v_2)/2\} - v_m = 0.10412(v_{\max}/\kappa) \dots \quad (8)$$

平均値3点法においては、上と同じ記号を用いると、

$$v_1 = v_{\max} + (v_{\max}/\kappa) \ln\{(1 + \sqrt{3/5})/2\}, \quad v_2 = v_{\max} + (v_{\max}/\kappa) \ln(1/2),$$

$$v_3 = v_{\max} + (v_{\max}/\kappa) \ln\{(1 - \sqrt{3/5})/2\}$$

ゆえに、(2) 式の右辺の値は、

$$\begin{aligned} \{5(v_1 + v_2) + 8v_3\}/18 &= v_{\max} + (5/18)(v_{\max}/\kappa) \ln[\{(1/4) - (3/20)\}(1/2)^{8/5}] \\ &= v_{\max} - 0.94768(v_{\max}/\kappa) \dots \quad (r) \end{aligned}$$

したがつて、このときの誤差  $E_3$  は、

$$E_3 = \{5(v_1 + v_2) + 8v_3\}/18 - v_m = 0.05232(v_{\max}/\kappa) \dots \quad (9)$$



図-2

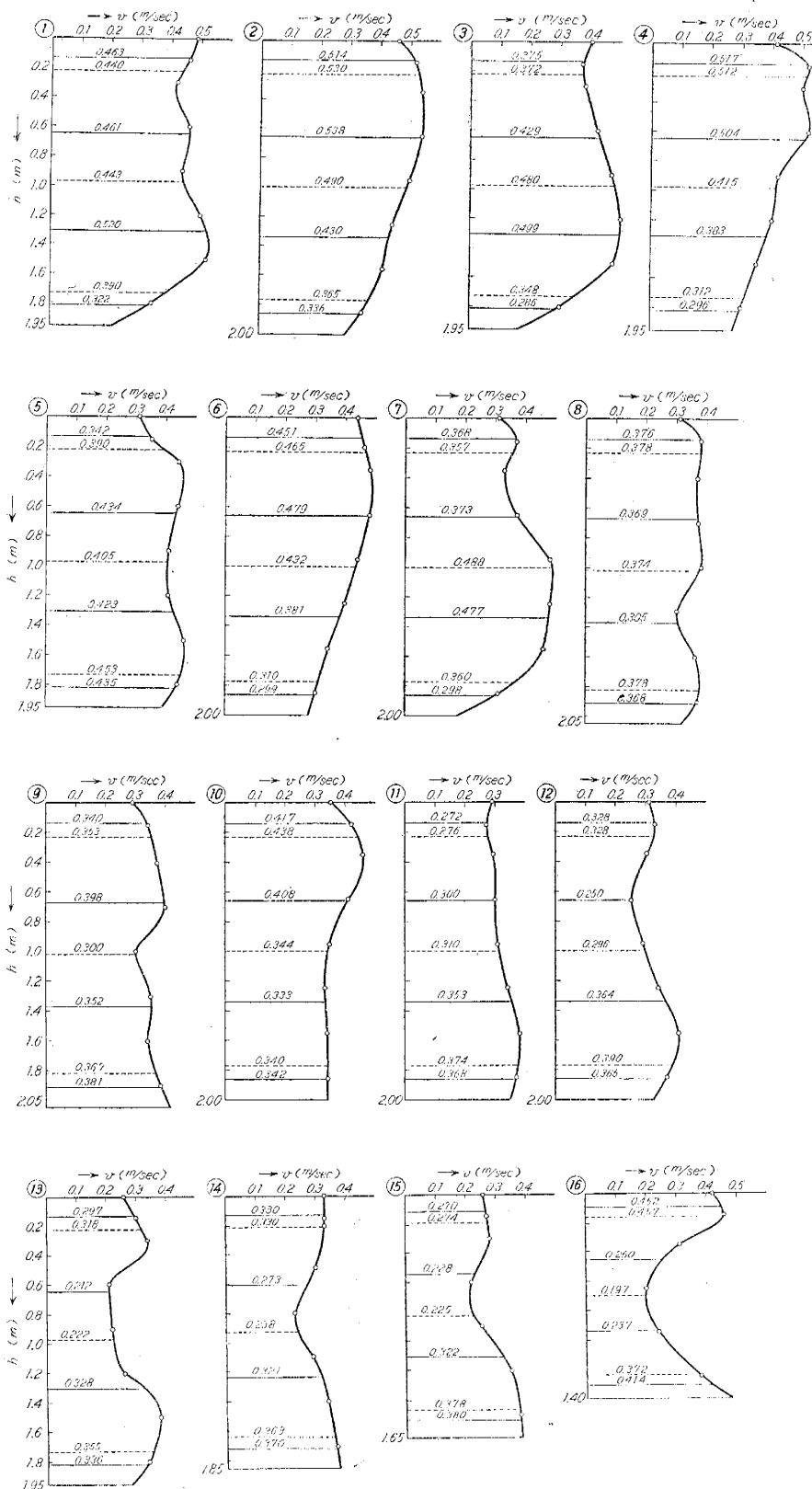


表-1

資料番号	測定年月日	水深 $h$ (m)	$\alpha$	$\beta$	緯平均流速 $v_m$ (m/sec)	1点法	2点法	3点法	4点法	平均値3点法	修正3点法	修正4点法
1	28.10.18	2.05	0.244	0.663	0.672	0.710 (+5.7%)	0.670 (-0.3%)	0.690 (+2.7%)	0.668 (-0.6%)	0.671 (-0.1%)	0.676 (+0.6%)	0.675 (+0.4%)
2	28.10.27	1.85	0.189	0.605	0.719	0.720 (+0.1%)	0.718 (-0.1%)	0.719 (±0.0%)	0.706 (-1.8%)	0.720 (+0.1%)	0.721 (+0.3%)	0.721 (+0.3%)
3	28.11.12	1.35	0.237	0.600	0.669	0.670 (+0.1%)	0.665 (-0.4%)	0.668 (-0.1%)	0.651 (-2.7%)	0.669 (±0.0%)	0.668 (-0.1%)	0.668 (-0.1%)
4	28.11.27	1.75	0.200	0.623	0.547	0.555 (+1.5%)	0.552 (+0.9%)	0.554 (+1.3%)	0.543 (-1.1%)	0.550 (+0.5%)	0.555 (+1.5%)	0.555 (+1.5%)
5	28.12.17	1.40	0.314	0.636	0.644	0.660 (+2.5%)	0.642 (-0.3%)	0.651 (+1.1%)	0.632 (-1.9%)	0.643 (-0.2%)	0.646 (+0.3%)	0.646 (+0.3%)
6	29.1.22	1.00	0.220	0.600	0.770	0.770 (±0.0%)	0.775 (+0.6%)	0.772 (+0.3%)	0.760 (-1.3%)	0.770 (±0.0%)	0.778 (+1.0%)	0.779 (+1.2%)
7	29.2.20	1.05	0.267	0.667	0.728	0.740 (+1.6%)	0.725 (-0.4%)	0.732 (+0.5%)	0.703 (-3.0%)	0.728 (±0.0%)	0.730 (+0.3%)	0.728 (±0.0%)
8	29.3.10	2.25	0.267	0.618	0.762	0.770 (+1.0%)	0.755 (-0.9%)	0.762 (±0.0%)	0.756 (-0.8%)	0.751 (-1.4%)	0.760 (-0.3%)	0.762 (±0.0%)
9	29.3.19	1.05	0.286	0.657	0.692	0.720 (+4.0%)	0.685 (-1.0%)	0.702 (+4.3%)	0.680 (-1.7%)	0.689 (-0.4%)	0.691 (-0.1%)	0.690 (-0.3%)
10	29.4.28	1.85	0.270	0.638	0.753	0.780 (+3.6%)	0.758 (+0.7%)	0.769 (+2.1%)	0.752 (-0.1%)	0.749 (-0.5%)	0.763 (+1.3%)	0.763 (+1.3%)
11	29.5.17	2.15	0.302	0.651	0.678	0.710 (+4.7%)	0.698 (+2.9%)	0.704 (+3.8%)	0.687 (+1.3%)	0.682 (+0.6%)	0.701 (+3.4%)	0.701 (+3.4%)
12	29.5.28	1.50	0.200	0.607	0.742	0.740 (-0.3%)	0.750 (+1.1%)	0.745 (+0.4%)	0.730 (-1.6%)	0.743 (+0.1%)	0.752 (+1.3%)	0.752 (+1.3%)
13	29.8.7	1.55	0.245	0.626	0.734	0.740 (+0.8%)	0.735 (+0.1%)	0.738 (+0.5%)	0.721 (-1.8%)	0.730 (-0.5%)	0.738 (+0.5%)	0.739 (+0.7%)
14	29.8.26	1.55	0.194	0.574	0.687	0.670 (-2.5%)	0.695 (+1.2%)	0.682 (-0.7%)	0.686 (-0.1%)	0.687 (+0.0%)	0.698 (+1.3%)	0.698 (+1.3%)
15	29.10.14	1.80	0.289	0.633	0.761	0.780 (+2.5%)	0.755 (-0.8%)	0.768 (+0.9%)	0.750 (-1.4%)	0.765 (+0.4%)	0.760 (-0.1%)	0.761 (±0.0%)
16	29.10.30	1.20	0.300	0.658	0.819	0.850 (+3.8%)	0.815 (-0.5%)	0.832 (+1.6%)	0.809 (-1.2%)	0.819 (±0.0%)	0.821 (+0.2%)	0.821 (+0.2%)
17	29.12.4	1.55	0.129	0.587	0.679	0.670 (-1.3%)	0.678 (-0.1%)	0.674 (-0.7%)	0.662 (-2.5%)	0.682 (+0.4%)	0.680 (+0.1%)	0.680 (+0.1%)
18	29.12.22	1.15	0.235	0.652	0.696	0.710 (+2.0%)	0.695 (-0.2%)	0.702 (+0.9%)	0.680 (-2.3%)	0.698 (+0.3%)	0.698 (+0.3%)	0.698 (+0.3%)
19	30.1.13	1.10	0.164	0.591	0.704	0.700 (-0.6%)	0.705 (+0.1%)	0.702 (-0.3%)	0.681 (-3.3%)	0.705 (+0.1%)	0.706 (+0.3%)	0.707 (+0.4%)
20	30.1.25	1.05	0.190	0.581	0.671	0.660 (-1.6%)	0.675 (+0.6%)	0.668 (-0.4%)	0.674 (+0.4%)	0.672 (+0.1%)	0.676 (+0.7%)	0.677 (+0.9%)
誤差の相加平均 $E$						+1.4%	+0.2%	+0.9%	-1.4%	-0.0%	+0.6%	+0.7%
誤差の絶対値の相加平均 $ E $						2.0%	0.7%	1.1%	1.5%	0.3%	0.7%	0.7%

示したものである。表-2の結果が示すように、極端に乱れた流速分布に対しては2点法は最も大きな誤差を与え、3点法、4点法は少しながら改良された値を与えるが、いずれも適用しうるほど正確ではない。平均値3点法でもこの場合には不十分で平均値4点法を用いれば誤差の絶対値の平均は2.0%以下となる。

表-1および表-2は自然河川における実際の流速分布の両極端を示したもので、これらの結果から次のことが結論される。従来の諸公式では2点法が最もよく、3点法、4点法は流速分布が乱れ2点法が相当な誤差を呈するにつれて幾分よい結果を与えるようであるが、到底正確な公式ということはできない。平均値3点法は普通程度の乱れに対しても十分安全に使用しうる最も優れた方法である。しかし、密に打たれた杭打水制限のように極端な乱れがある場合には平均値4点法を使用する方が安全である。

われわれは、流量測定に際してなるべく少ない観測点で正確な値をうるのでなければならない。多くの観測点をとればとるほど正確な値がえられると思うのは誤りである。なぜならば、観測時間中の水位の変動（したがつて、流量の変化）による影響を小さくするために各観測点での測定時間を短くすれば、流れの脈動によつて各点での正確な流速がえられず、これを長くして脈動の影響を免れようとすると全観測時間が延長されて水位の変動が影響するようになる。ゆえに、流量測定における課題は、全観測点数ができるだけ少なくして各観測点での測定時間をできるだけ長く（3分以上が望ましい）することである<sup>25)</sup>。本論文では、垂直線にそつての緯平均流速したがつて水面幅にそつての単位幅当りの流量を最少の観測点数でなるべく正確に測定する方法を述べたのである。水面幅にそつてとるべき垂直線の本数とその位置および流量算定式については次の論文にゆずることとする。

#### 4. 従来の緯平均流速算定式の修正

前節において明らかのように、流れの中央部で流速分布が余り乱れていない普通の場合に従来の諸公式を適用すると、3点法、4点法は観測点数が多いにもかかわらずその精度は2点法に劣る。これは、観測流速に乘じる定係数が不適当だからである。本節では、これら公式中の定係数を修正することにより、従来よりも正確と思わ

表-2

資料番号	水深 $h$ (m)	継平均流速 $v_m$ (m/sec)	2点法	3点法	4点法	平均値3点法	平均値4点法
1	1.95	0.446	0.456 (+2.2%)	0.475 (+6.5%)	0.438 (-1.8%)	0.427 (-4.3%)	0.456 (+2.2%)
2	2.00	0.465	0.472 (+1.5%)	0.461 (-0.9%)	0.457 (-1.7%)	0.466 (+0.2%)	0.463 (-0.4%)
3	1.95	0.418	0.421 (+0.7%)	0.459 (+9.8%)	0.420 (+0.5%)	0.413 (-1.2%)	0.418 (+0.0%)
4	1.95	0.420	0.425 (+1.2%)	0.414 (-1.4%)	0.410 (-2.4%)	0.413 (-1.7%)	0.431 (+2.6%)
5	1.95	0.423	0.462 (+9.2%)	0.435 (+2.8%)	0.419 (-0.9%)	0.414 (-2.1%)	0.415 (-1.9%)
6	2.00	0.412	0.410 (-0.5%)	0.408 (-1.0%)	0.403 (-2.2%)	0.407 (-1.2%)	0.411 (-0.2%)
7	2.00	0.398	0.389 (-2.3%)	0.436 (+9.5%)	0.393 (-1.3%)	0.416 (+4.5%)	0.393 (-1.3%)
8	2.05	0.359	0.368 (+2.5%)	0.342 (-4.7%)	0.342 (-4.7%)	0.376 (+4.7%)	0.349 (-2.8%)
9	2.05	0.355	0.358 (+0.8%)	0.351 (-1.1%)	0.351 (-1.1%)	0.333 (-6.2%)	0.370 (+4.2%)
10	2.00	0.374	0.400 (+7.0%)	0.361 (-3.5%)	0.363 (-2.9%)	0.369 (-1.3%)	0.374 (±0.0%)
11	2.00	0.325	0.338 (+4.0%)	0.336 (+3.4%)	0.311 (-4.3%)	0.318 (-2.2%)	0.324 (-0.3%)
12	2.00	0.326	0.351 (+7.7%)	0.340 (+4.3%)	0.309 (-5.2%)	0.331 (+1.5%)	0.321 (-1.5%)
13	1.95	0.290	0.354 (+22.1%)	0.301 (+3.8%)	0.286 (-1.4%)	0.286 (-1.4%)	0.286 (-1.4%)
14	1.85	0.310	0.334 (+7.7%)	0.313 (+1.0%)	0.289 (-6.8%)	0.298 (-3.9%)	0.315 (+1.6%)
15	1.65	0.292	0.322 (+10.3%)	0.303 (+2.8%)	0.274 (-6.2%)	0.282 (-3.4%)	0.292 (±0.0%)
16	1.40	0.312	0.342 (+9.6%)	0.275 (-11.9%)	0.275 (-11.9%)	0.290 (-7.1%)	0.309 (-1.0%)
誤差の相加平均 $\bar{E}$		+5.2%	+1.3%	-3.4%	-1.6%	-0.0%	
誤差の絶対値の相加平均 $ E $		5.6%	4.3%	3.5%	2.9%	1.3%	

れる公式を導く。そうすれば、すでにえられている観測流速をそのまま用いて結果を修正することができるであろう。しかし、修正された公式がはたして2点法より精度がよいかどうかは問題で、もし精度が優れていなければ、6割や4割の点での既往の観測値を捨て、2割と8割の点での観測値だけから2点法で計算すればよい。

平均値法の原理<sup>20)</sup>は、区間 [-1, 1]において変数  $t$  に関する連続函数のこの区間での平均値  $M$  が、この区内間に適当にとつた  $n$  個の  $t$  の値  $t_i$  に対する函数値  $y_i$  と  $n$  個の定係数  $R_i$  との積  $R_i y_i$  の総和に近似的に等しくなるように、すなわち、次の式が近似的に成り立つように、 $t_i$  および  $R_i$  の値を定めようとするものである。

$$M = R_1 y_1 + R_2 y_2 + \dots + R_n y_n \quad \dots \quad (a)$$

2n 個の根  $t_i$ ,  $R_i$  を定めるための連立方程式は次のようになることが証明される。

$$\left. \begin{array}{l} R_1 + R_2 + \dots + R_n = 1, \\ R_1 t_1 + R_2 t_2 + \dots + R_n t_n = 0 \\ R_1 t_1^2 + R_2 t_2^2 + \dots + R_n t_n^2 = 1/3, \\ R_1 t_1^3 + R_2 t_2^3 + \dots + R_n t_n^3 = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (b)$$

さて、3点法の公式は、

$$v_m = (v_{0.2} + 2v_{0.6} + v_{0.8})/4 = (1/4)v_{0.2} + (1/2)v_{0.6} + (1/4)v_{0.8}$$

であるが、観測点の位置はそのままとして定係数を修正した式を上の (a) 式のように、

$$v_m = R_1 v_{0.2} + R_2 v_{0.6} + R_3 v_{0.8} \quad \dots \quad (c)$$

と書いて、 $R_1, R_2, R_3$  の値を (b) 式より求めればよい。(c) 式は座標点  $z_1, z_2, z_3$  をあらかじめそれぞれ  $0.2h, 0.6h, 0.8h$  と選んで、定係数だけを未知数とした場合である。さて、変数  $z$  は区間 [0, h] で定義されているから、 $t=2(z/h)-1$  によって区間 [-1, 1] で定義される変数  $t$  に変換すれば、

$$t_1 = 2(z_1/h) - 1 = -0.6, \quad t_2 = 2(z_2/h) - 1 = 0.2, \quad t_3 = 2(z_3/h) - 1 = 0.6 \quad \dots \quad (d)$$

ゆえに、未知数  $R_1, R_2, R_3$  を定めるための連立方程式は (b) 式に (d) の値を入れて、

$$R_1 + R_2 + R_3 = 1, \quad -0.6R_1 + 0.2R_2 + 0.6R_3 = 0, \quad 0.36R_1 + 0.04R_2 + 0.36R_3 = 1/3 \quad \dots \quad (e)$$

(e) の連立方程式を解けば、 $R_1 = 17/36, R_2 = 1/12, R_3 = 4/9$  となるから、修正3点法の公式は次のようになる。

$$v_m = (17v_{0.2} + 3v_{0.6} + 16v_{0.8})/36 \quad \dots \quad (11)$$

(11) 式が誤差をともなわないための垂直流速曲線の最高次数は2次である。なぜならば、(b) 式の初めから3つの式までを成立させて4番目の式すなわち  $t$  に関する3次の式を成立させていないからである。

同じようにして、修正4点法の公式(誤差をともなわないための垂直流速曲線の最高次数は3次)を求めるとき、

$$v_m = \frac{1}{24} [11(v_{0.2} + v_{0.8}) + (v_{0.4} + v_{0.6})] \quad (12)$$

(11)式と(12)式とを用いて、表-1の資料につき結果を修正したものが同表の終りの2列である。すなわち、修正された公式を用いれば誤差は著しく小さくなり、3点法については従来の公式で誤差の絶対値が2.0%を越す資料において修正が著しい(番号1, 9, 10)。そしてその資料数は4個より1個(番号11)に減っている。4点法についてもほぼ同じで、修正の著しいものは番号3, 5, 7, 17, 18, 19であり、修正後誤差の絶対値が2.0%を越す例は1個(番号11)あるに過ぎない。ところで、誤差の絶対値平均をみると、修正された両方法はいずれも2点法と同じ精度である。このことは、4割および6割の点での観測値は全く不要で、2割、8割の点での観測値だけを用い2点法より計算すればよいことを示している。すなわち、従来の3点法、4点法は全く無価値な公式であり、4割、6割の点での観測値を入れることによって悪い結果を与えていたと結論される。

なお、2点法の正確な公式においては、観測点の位置は0.211h, 0.789hである。これらをそれぞれ0.2h, 0.8hとすることは、平均値法の原理からいえば精度を犠牲にすることになる。3点法や4点法の修正式の誘導と同じようにして、2つの観測点を $z_1=0.2h(t_1=-0.6)$ ,  $z_2=0.8h(t_2=0.6)$ に固定し、(b)式より定係数 $R_1, R_2$ を求めるとき、 $R_1=R_2=1/2$ がえられるが、これら $t_1, t_2; R_1, R_2$ の値は(b)式の初めの2つの方程式しか成立させず、3番目の式、 $t_1^2 R_1 + t_2^2 R_2 = 1/3$ を成立させない。すなわち、2割、8割の点での流速の相加平均をもつて総平均流速とするという簡易化された2点法は、理論的に流速分布が1次式の場合にしか正確な値を与えないこととなり、3次式まで誤差のない正確な2点法の公式にくらべ余りにも精度が劣る。ゆえに、水深が浅いときには簡易化された式を用いてもよいが、水深が大きいときには正確な観測点をとることが望まれる。

## 5. 結 語

(1) 開水路の垂直流速曲線については、渦動粘性係数を深さのどのような函数と仮定するかによつて種々な理論式がえられるが、筆者はこれを深さに無関係な定数と仮定して、Bazin, Boussinesq, Humphreys-Abbot, 安芸教授の諸公式を包含する2次放物線式を誘導する。

(2) 縦平均流速の測定という問題に限るならば、垂直流速分布に関する2次放物線説や対数曲線説のいかんにかかわらず、平均値法より誘導された2点法、平均値3点法はいずれも合理的である。対数分布に対しては平均値3点法の誤差は2点法のそれの半分である。

(3) 縦平均流速算定式に関する従来の諸公式と平均値法公式とを利根川の資料に適用して流れが整正な場合には2点法または平均値3点法を、杭打水制間のように極端な乱れのある場合には平均値4点法を用いればよいことが示される。従来の3点法、4点法はいずれの場合にもよい結果を与えない。

(4) 従来の3点法、4点法がよい結果を与えない原因は、観測流速に乗じる係数が合理的でないからで、平均値法の原理に基づいてこの係数を修正すれば、結果を著しく改善することができるが、その精度は2点法のそれを出ない。これより、水深の4割、6割の点での観測流速をもちこむことは無意味であることが結論される。

終りに貴重な資料を提供していただいた建設省利根川上流工事務所に対し深甚なる謝意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 春日屋伸昌: 平均値法による流量算定式について、土木学会誌、第38巻、第7号、1953、p. 17~p. 21.
- 2) 土木学会: 水理公式集、1949、p. 1~p. 2. 3) 物部辰穂: 水理学(増補改訂版)、1954、p. 104~p. 106.
- 4) 安芸敏一: 流量測定法、1954、p. 46~p. 49. 5) 狩野徳太郎: 農業水利、1949、p. 47~p. 49.
- 6) Rouse, H.: Fluid mechanics for hydraulic engineers, 1938, p. 274~p. 275.
- 7) Hayami, S.: On the mechanics of flow in a wide alluvial river, Journ. of the Shanghai Science Insti., Section 1, Vol. 1, July, 1939, p. 239~p. 261.
- 8) 安芸敏一: 浮子式竿浮子による観測流速の更正係数について、土木学会誌、第18巻、第1号、1932、p. 105~p. 129.
- 9) 久宝 保: 開水路における乱流の縦平均流速分布について、土木学会誌、第35巻、第7号、1950、p. 9~p. 13.
- 10) 野瀬隆治: 河川学、1943、p. 81. 11) 安芸敏一: 河相論、1954、p. 36.
- 12) 土木学会: 水理公式集、1949、p. 1. 13) 本間 仁: 水理学、1939、p. 120.
- 14) 土木学会: 水理公式集、1949、p. 1~p. 2. 15) 同上、p. 12~p. 13.
- 16) 春日屋伸昌: 開水路の垂直流速曲線における平均流速の位置の分布性について、土木学会誌、第40巻、第5号、1955、p. 24~p. 29.
- 17) 春日屋伸昌: 開水路の垂直流速曲線に及ぼす諸因子間の相関性について、土木学会誌、第40巻、第10号、1955、p. 44~p. 51.
- 18) Vanoni, V.A.: Velocity distribution in open channels, Civil Eng., Vol. 11, 1941, p. 356~p. 357.
- 19) 佐藤清二: 水理学(下巻)、1955、p. 81.
- 20) Taylor, E.H.: Velocity distribution in open channels, Trans. A.G.U., 1939, p. 641~p. 643.
- 21) 春日屋伸昌: 平均値法の原理と流量測定への応用、中央大学70周年記念工学部論文集、1955、p. 57~p. 74.
- 22) 宮木武之輔: 治水工学、1953, p. 85.
- 23) 春日屋伸昌: 開水路における垂直流速曲線について、土木学会誌、第38巻、第9号、1953、p. 15~p. 20.
- 24) Grover, N.C. and Harrington, A.W.: Stream flow, 1949, p. 250.
- 25) 春日屋伸昌: 流量測定における二、三の問題、中央大学工学部研究報告、第1巻、第1号、1957、p. 19~p. 29.
- 26) 春日屋伸昌: 最小2乗法と実験式、応用数学講座、第5巻、第2部、1957、p. 296~p. 300.