

軌道狂いの合理的評価とその保守限度の設定について

正員 小林 勇*
准員 佐佐木 綱**

On the Rational Evaluation of Railway-Track Irregularity
and the Determination of its Allowable Limit.

by Dr. Eng., Isamu Kobayashi, C.E. Member and
Tsuna Sasaki, C.E. Assoc. Member.

Synopsis: Since some years the irregularity index of railway-track has been adopted as a measure by which the track conditions are discriminated and the maintenance of railway-track is put in rational practice by Japanese National Railways authorities. In this paper we shall discuss some properties of this index and present a new measure named relative entropy which has an intimate relationship with the vibration of running car, and explain on the determination of the allowable limit of our irregularity measure related to the velocity of car.

要旨 数年前から国鉄では、軌道状態の良否を判定し軌道の管理を合理的に遂行できるような指標として、軌道狂い指数を採用してきている。本文はこの軌道狂い指数の諸性質を検討し、車両の動搖加速度との関係から軌道状態の良否を統計的に判定するエントロピー管理法を提案し、更にこの管理法の採用により軌道保守限度を車両の走行速度に応じて設定しうることを示したものである。

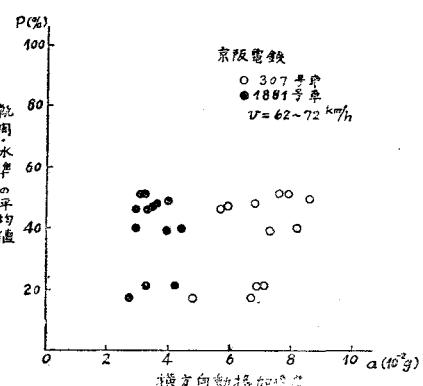
1. 緒 言

軌道の保守限度は保線管理の目標であり、安全な高速度運転を可能ならしめるために定められたものである。保守限度を小さくして保守を厳重にすることが最上であることはいうまでもないが、これは経済的に許されない。それで從来は経験的に適當と考えられる許容限度を設定し、これを保守目標として採用してきた。今日列車運転の高速度化とともに、この保守許容限度の再検討が主として鉄道経営の立場から要請されている。従つて以下、軌道の狂いとその軌道上を走行する車両の動搖加速度との関係を明らかにし、從来の軌道狂いの保守限度に代つて軌道狂いの一層合理的な評価による保守限度について述べ、走行速度に応じて保守限度をいかに設定すべきかを明らかにしようと思う。

2. P 及び σ と動搖加速度との関係

これまでの経験的保守限度に対して、新しく統計的手段による軌道狂いの評価が行われるようになり、保線管理の合理化が進んできた。なかでも軌道狂い指数 P 及び狂いの標準偏差 σ による管理が広く採用され、保線計画に利用されている。われわれは軌道が狂つておれば狂つてゐるほど、その上を走る車両は大きく動搖するであろうという直観的考え方から、 P 及び σ と車両の動搖加速度との関係について実験的に調べてみた。この試験区間はいずれも 300 m 以上の直線区間 (37 kg レール敷設) であり、KK 式合成加速度計を用いて車両の動搖加速度を測定した。その結果は図-1 及び図-2 である。動搖加速度 a は試験区間中の全動搖加速度の幾何平均値であり、 P は軌間・水準の各 P の算術平均値である。以下特別にことわらないかぎり、動搖加速度といえば全動搖加速度の幾何平均値を指すものとする。図-1, 2 からわかるように、 P 及び σ と横方向動搖加速度 a との関係はあまりはつきりしていない。ここには図示してはいないが、上下方向の動搖加速度と P , σ との関係もほとんど存在しない。このよ

図-1



* 工学博士、京都大学教授、工学部土木工学教室

** 熊本大学講師、工学部土木工学教室

うに P 及び σ と動搖加速度との関係があまりはつきりしない理由として、次の点があげられる。

- 1) 軌道狂いの分布が正規分布と考えられない場合が多いこと、
 - 2) 軌道狂い指数が約 20% 以上になると、狂い指数は軌道狂い状態を適確に評価しえないこと。
- 2)は軌道狂いの分布が正規分布とみなされる場合においても成立するものである。この点について説明する。

いま狂いの測点数を n とし、測定された軌道狂い量を順序統計量化して、大きさの順に $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ とする。軌道狂い x の分布が正規分布 $N(0, \sigma)$ に従つているならば、range $w = x_n - x_1$ 及び mid range $v = (x_1 + x_n)/2$ の分布はそれぞれ次のごとく与えられる¹⁾。

$$\begin{aligned} g(w) &= \alpha \psi(R) \\ \text{ここに } \psi(R) &= 2 e^{-R} K_0(2 e^{-R/2}) \\ R &= \alpha(w - 2u) \\ \alpha &= n \varphi(u) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \quad \left. \right\} \dots\dots\dots (1) \\ \int_{-\infty}^u \varphi(u) du &= 1 - \frac{1}{n} \\ f(v) &= \frac{\alpha e^{-\alpha v}}{(1 + e^{-\alpha v})^2} \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$\psi(R)$ の分布は non parametric, distribution free であるから、 $\psi(R)$ の極大点は分布に關係なき常数として与えられる。すなわち $d\psi/dR = 0$ を解いて $R_0 = 0.506$ をうる。ゆえに式 (1) の 3 番目の式から $w = 2u + \frac{R_0}{n\varphi(u)}$ として w と R_0 との関係が求められ、

$$\int_{-\infty}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} dt = 1 - \frac{1}{n}$$

で定義される u_0 を用いると、式 (1) の u は $u = u_0 \sigma$ となる。従つて

$$\sigma = w / [2u_0 + \frac{\sqrt{2\pi}}{n} R_0 e^{\frac{u_0^2}{2}}] \quad \dots\dots\dots (3)$$

が成立する。 w は観測値 x_1, x_n から決定されるから、式 (3) により母分散の推定が可能である。また式 (2) からわかるように、母平均の推定値としては

$$\bar{m} = (x_1 + x_n)/2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

を採用する。狂いの最小値 x_1 、最大値 x_n 及び測点数 n が与えられたならば、式 (3) 及び式 (4) から母集団の m, σ を推定することができ、従つて狂い指数 P を計算することができる。測点数 $n = 316$ の場合、最大狂い x_n 、最小狂い x_1 がそれぞれ変化したときの狂い指数 P の値は図-3 にみられるとおりである。図-3 からわかるように、最大狂い +7 mm、最小狂い -1 mm の場合 (点 A) の P の値は 50% であり、最大狂い +7 mm、最小狂い -5 mm のとき (点 B) の P の値は 20% である。すなわち最大狂いはそのまま変化せず、最小狂いのみが -1 mm から -5 mm へ変化したことによつて、 P の値は半分以下に減少している。この

図-2

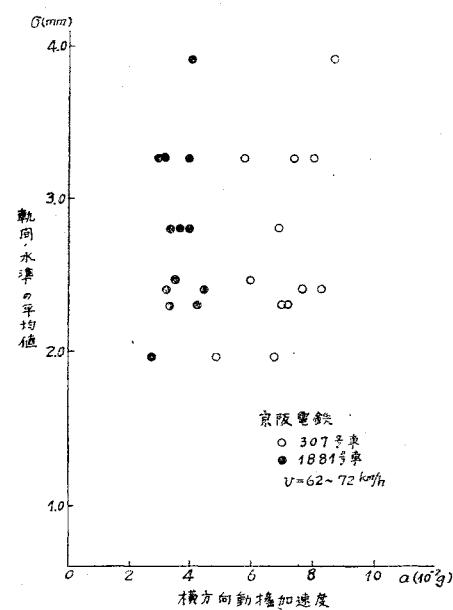
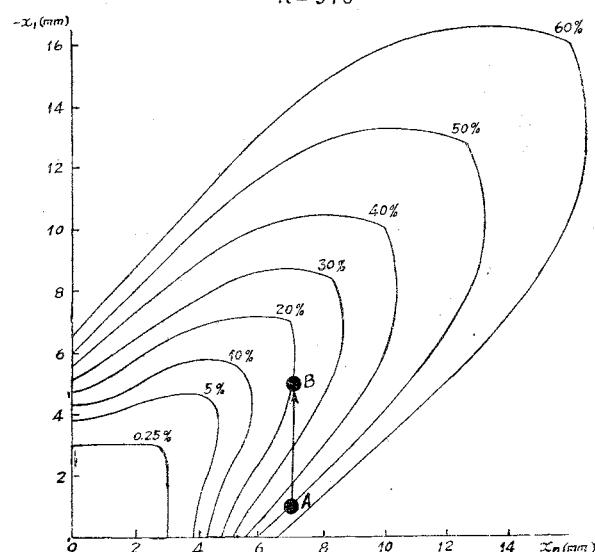


図-3

 $n = 316$ 

ことは最大狂いが +7 mm のとき、最小狂いが -1 mm から -5 mm へと軌道状態が悪化していくにかかる。軌道狂い指数による軌道状態の評価は 50% から 20% へと急激に減少して軌道状態の良くなつたことを示している。このような矛盾は最大狂い、最小狂いのうちどちらか一方が他にくらべて大きいとき生ずるものであるから、この矛盾を避けるためには、狂いが 0 のまわりに常に対称形に分布していることが必要条件となる。しかるに狂いは左右対称に発生していくとはかぎらないし、事実狂い発生の大きい箇所では特に 0 のまわりに対称であることは少ない。従つて P の値が軌道状態を適確に表現しうるのは、図-3 の $P=$ 一定の曲線が正方形の一部をなすとみなされる範囲である。すなわち大きくとも $P=20\%$ くらいまでの範囲であろう。

3. 狂いの分布が正規分布である場合の σ と動揺加速度との関係

軌道の狂い状態と動揺加速度との関係を不明確にしている上述の 2つの原因を取り除くため、まず同一軌道構造を行かつ軌道の狂いが χ^2 -検定により正規分布とみなされる軌道区間を数箇所選び、軌道狂いの標準偏差 σ と車両の動揺加速度を測定したところ、図-4 の結果を得た。図-4 の σ の値は軌間・水準の平均値であり、軌間・水準それぞれの狂い分布はいずれも χ^2 -検定により正規分布と考えられたものである。図-4からわかるように、 σ と a との間にはほぼ式(5)の1次式が成立するようである。

$$a = kv^2\sigma + a_0 \dots \dots \dots (5)$$

ここに k 、 a_0 は常数であり、 v は走行速度である。

いま軌道狂いの分布が正規分布でない任意の分布である場合を考察するのに便ならしめるため、 σ の対数変換

$$H = \log \sigma \sqrt{2\pi e}, H \geq 0 \dots \dots \dots (6)$$

を考え、 σ を H で表わすと式(5)は

$$a = (kv^2 e^H / \sqrt{2\pi e}) + a_0$$

となり、以下の考察を簡単にするため

$$a = (kv^2 + b) e^H / \sqrt{2\pi e}, H \geq 0 \dots \dots \dots (7)$$

と仮定する。

4. 広義のエントロピー

軌道狂いが正規分布とみなされる場合でも、みなされない場合でも軌道狂いの適確な評価をなしうる指標を見出すため、式(8)で広義のエントロピー H を定義する^{2), 3)}。

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log \varphi(x) dx \dots \dots \dots (8)$$

ここに $\varphi(x)$ は軌道狂いの確率密度函数である。もし $\varphi(x)$ が $N(m, \sigma)$ で与えられる正規分布であると、広義のエントロピー H は式(9)で与えられる⁴⁾。

$$H = \log \sigma \sqrt{2\pi e} \dots \dots \dots (9)$$

式(9)が式(6)に等しいことから、前節における H が広義のエントロピーであることがわかる。

一般に軌道狂いの確率密度函数 $\varphi(x)$ は正規分布ではないので、式(9)から H を計算することはできない。従つて実測値から式(10)で計算する。

$$H = - \sum_i \frac{f_i}{n} \log \frac{f_i}{n} \dots \dots \dots (10)$$

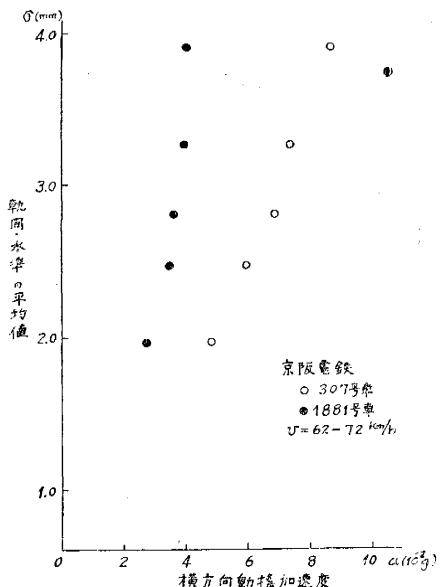
ここに f_i は狂い x_i の観測回数であり、 n は全観測回数である。式(10)で H が最大となるのは $f_i \equiv 1$ の場合であるから、 $H_{\max} = \log n$ である。いま H と H_{\max} の比を

$$h = - \sum_i \frac{f_i}{n} \log \frac{f_i}{n} / \log n \dots \dots \dots (11)$$

と表わし、これを相対エントロピーと名づける。

5. 狂いが任意の分布である場合の軌道狂いと動揺加速度との関係

一般に軌道狂いの分布を χ^2 -検定してみると、正規分布とみなされない場合が多いのは、その軌道狂いが同一母集団から抽出されたものと考えられないことに原因するようである。



いま図-5に示すように、考へている軌道区間が N 個の正規分布をなす区間から成立しているものと仮定する。その区間長は実際には互に等しくはないが、等しいものと考えてもなんら一般性は失われない。

さて N 個の正規分布中任意の1つを $N(m_i, \sigma_i)$ とすれば、車両がその1つの区間に走行するときに受ける動揺加速度 a_i は、式(7)から

$$a_i = (kv^2 + b)e^{H_i} / \sqrt{2\pi e} \quad \dots \dots \dots (12)$$

で与えられる。 N 個の正規分布区間にすべてを車両が通過するときに受ける動揺加速度 a は、個々の区間に受ける動揺加速度 a_i の幾何平均値であるから、式(13)で与えられる。

$$\log a = \frac{1}{N} \sum \log a_i = \log \sqrt{2\pi e} + \frac{1}{N} \sum H_i \quad \dots \dots \dots (13)$$

従つてわれわれは式(13)の $\frac{1}{N} \sum H_i$ を表わすような指標をみつけることができれば、任意区間の動揺加速度 a を式(13)から求めることができる。

しかしながら、軌道を実際に N 個の正規分布に分解することはきわめて困難であり、厳密には N の個数さえも不明であるから、一般に H_i の値は測定できない値である。測定できるものは図-6に示したようなその軌道区間の狂い分布のみであるから、この狂い分布図のみから $\frac{1}{N} \sum H_i$ に近い指標をえなければならない。図-6で説明すると、点線で描かれている2個の正規分布(1)及び(2)のエントロピー H_1 及び H_2 から計算される $(H_1 + H_2)/2$ に等しいような指標を、図中のヒストグラムのみから求めたいのである。

いま狂い分布のヒストグラムから計算したエントロピーを H とすると、この H は $(H_1 + H_2)/2$ に近い値を与える。厳密には $(H_1 + H_2)/2 - A(m_1 \sim m_2)$ であり、 A は平均値の差に関係する量である。図-6の2個の正規分布の平均値の差 $m_1 \sim m_2$ が変化したときの H と $(H_1 + H_2)/2$ との関係は図-7のとおりである。また図-6の正規分布(2)が正規分布(1)と同じ標準偏差 σ_1 を持つときの H と $(H_1 + H_2)/2 = H_1$ ($\sigma_2 = \sigma_1$)との関係も図-7に示すとおりである。

一方図-6のヒストグラムから算出した標準偏差 σ を用いて、式(9)から H を計算すると同じく図-7のとおりである。式(9)から計算される H は、図-6の狂い分布のヒストグラムを1個の正規分布と仮定して求めたものにはならない。式(9)を用いて σ から計算される H を H' として H と区別することにする。従つて H' は σ と同じ性質を持つている。

以上のことから次のように考えることができる。

- 1) A は平均値の差が大きくなれば大きくなるが、ある値で一定となる。2) 標準偏差 σ は平均値の差が大きくなるにつれ、急激に増大し収束するところがない。このことは H' の性質からも知られる。3) 図-7からもわかるように、 H の値が H' よりも常に $(\sum H_i)/N$ の値に近く、エントロピー H の方が標準偏差 σ よりも車両加速度と密接な関係があるといえる。4) 従つて $(\sum H_i)/N$ の値の代りに、狂い分布のヒストグラムから算出されるエントロピー H を用い近似的に式(13)に採用する。すな

図-5

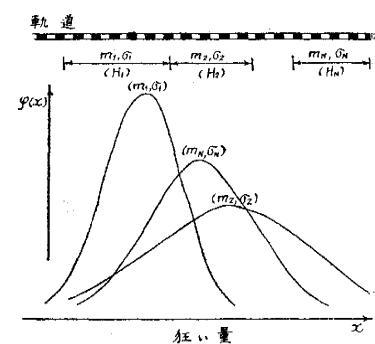


図-6

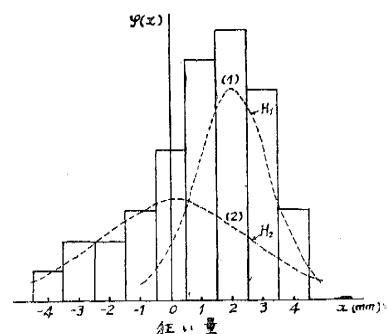
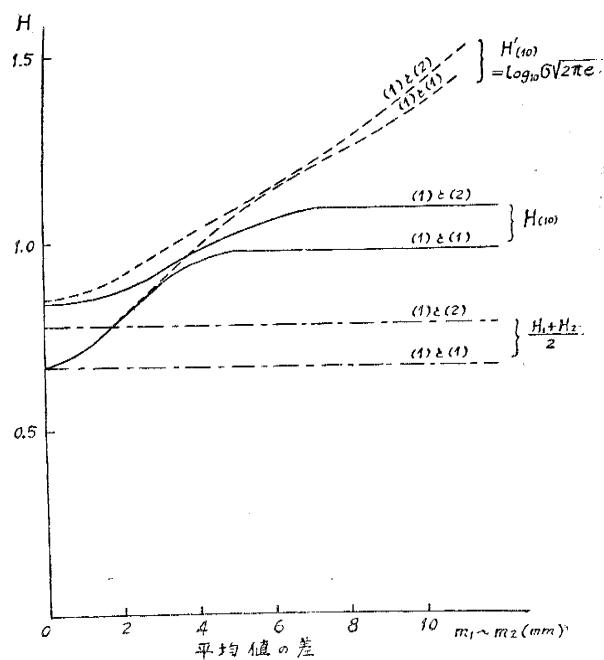


図-7



わち

$$(\sum H_i)/N \equiv H \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

式(14)を式(13)に代入することにより、求める動揺加速度 a は

$$a = (kv^2 + b)e^H / \sqrt{2\pi e} \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

で与えられ、正規分布の場合と同型となる。換言すると、狂い分布がいかなるものであろうと、狂い分布図さえ与えられたならば、そのエントロピーから動搖加速度を算出することができる。

相対エントロピー h と動搖加速度との関係は式 (11) から、 $H = h \log n$ なる関係があるので

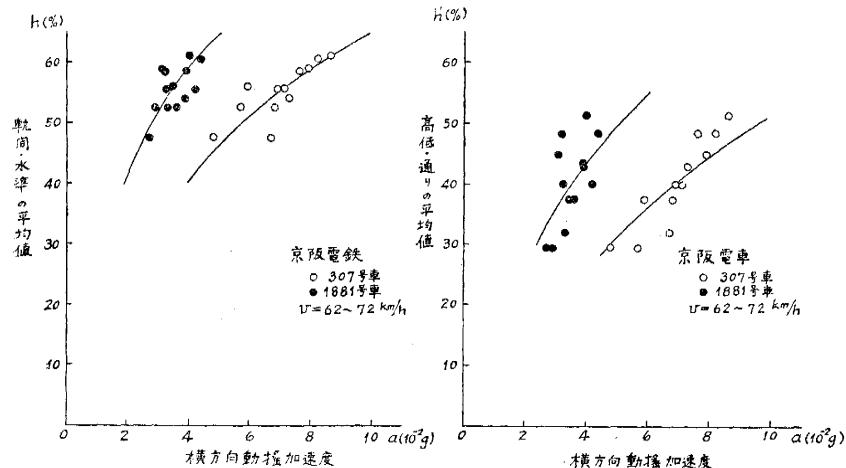
となる。実際に軌道の狂い状態を表わすには、 H よりも h が便利である。ただし H の値は測点数による変化はほとんどないが、 h の値は測点数 n が大きくなると小さくなるから、 h の大小を比較するには測点数を等しくしておかねばならない。

軌間・水準・高低・通りに対してそれぞれ相対エントロピー h_1 , h_2 , h_3 , h_4 が求められるのであるが、便宜上

で表わされる h 及び h' と動搖加速度 a との関係を調べた。図-1,2 の P, σ の代りに相対エントロピーを用いると図-8 となる。京福電鉄及び京都市電における P と a , h と a との関係は図-9,10,11,12,13 に示すとおりである。各図中の曲線は式(16)である。これらの図からわかるように、軌道狂いと動搖加速度との関係は狂い指数 P よりも相対エントロピー h を用いた方が密接である。

実測の結果、上下方向の動搖加速度と h との関係はあまりはつきり現われなかつた(図-14 参照)。これは車

图—8



— 9

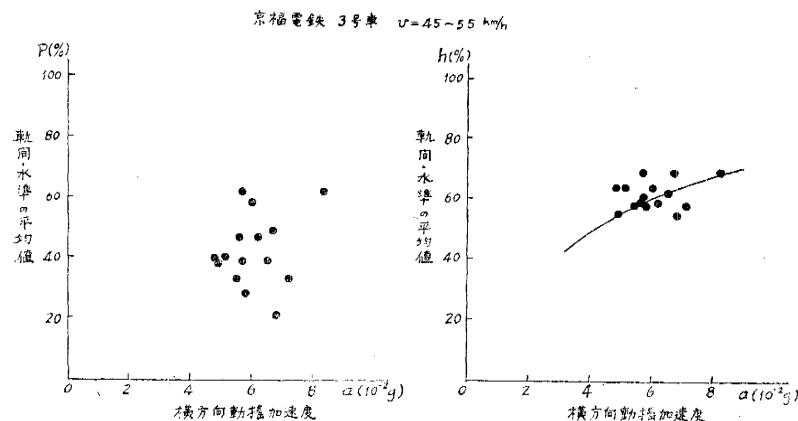


図-10

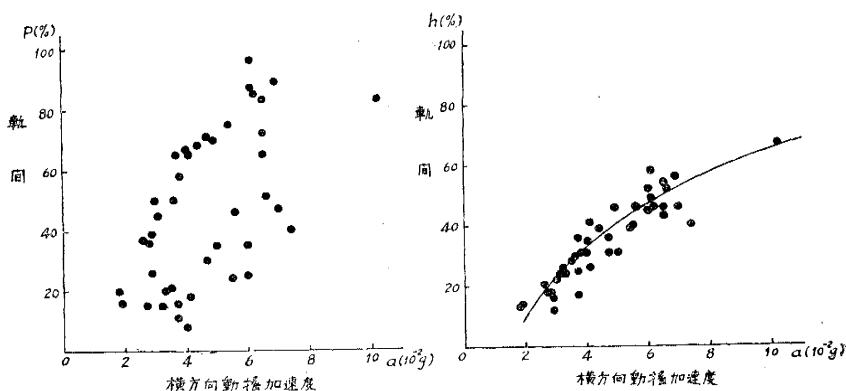
京都都市電 803号車 $v=22 \sim 28 \text{ km/h}$ 

図-11

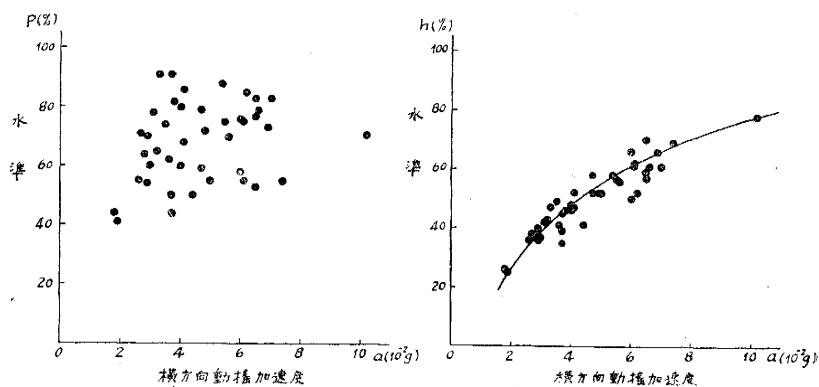
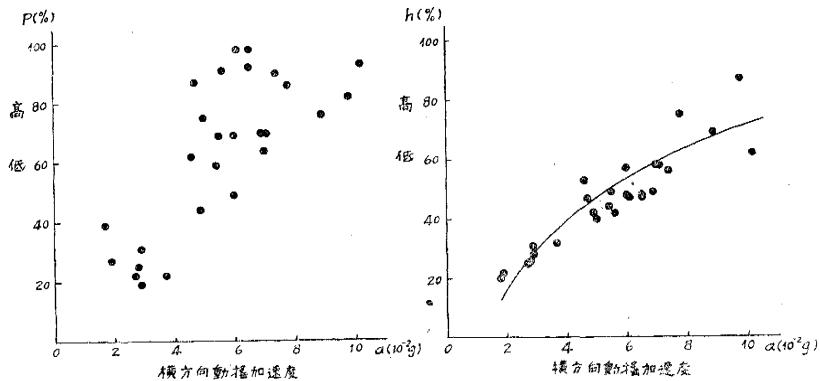
京都都市電 803号車 $v=22 \sim 28 \text{ km/h}$ 

図-12

京都都市電 803号車 $v=22 \sim 28 \text{ km/h}$ 

両がレールの狂いによる振動よりも、むしろレール・枕木・道床・路盤等軌道自体による振動に大きく影響されるためと考えられる。従つて軌道狂いと動搖加速度との関係について、大略次のように述べることができるであろう。

1) 軌間・水準・高低・通りの狂い増大は横方向の動搖加速度を増大せしめるが、上下方向の動搖加速度とは

図-13

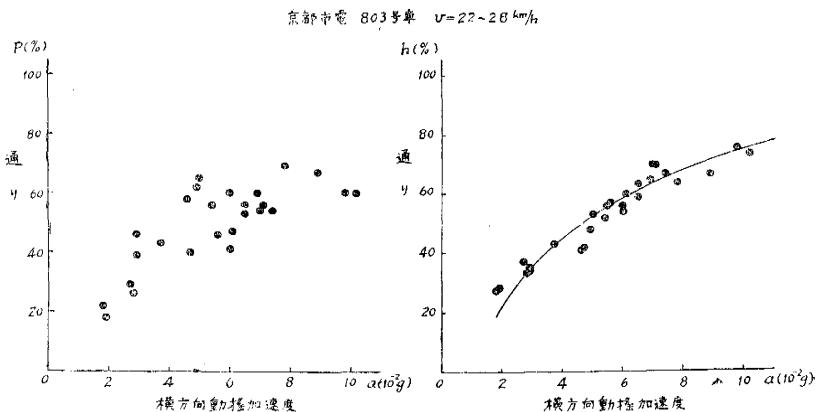
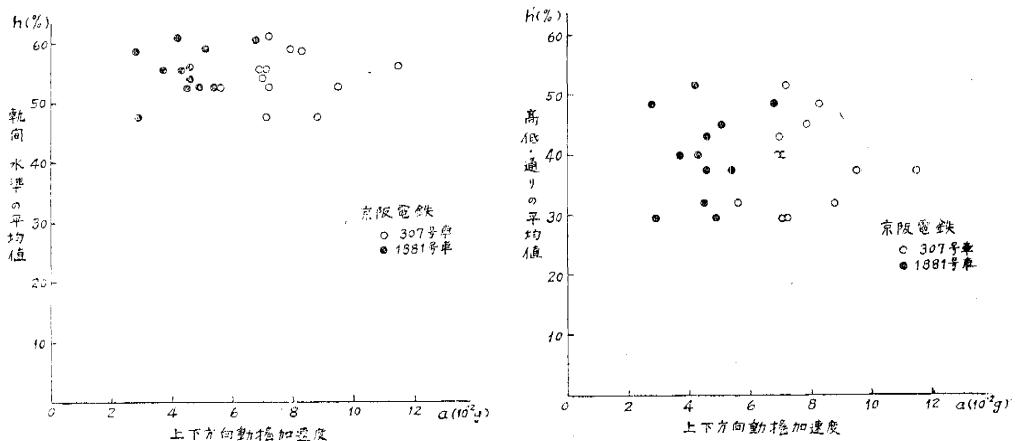


図-14

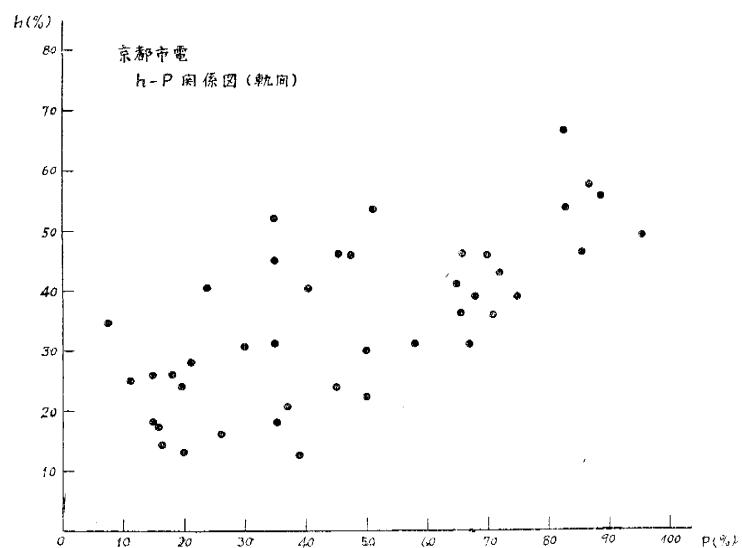


関係がない。2) 上下方向の動
揺加速度は軌道狂いとは関係が
なく、むしろ軌道構造の良否に
影響されることである。

6. P と h との関係

以上の考察からわかるように
狂い指數 P が相対エントロピー
 $-h$ と同じ性質を持つのは、
狂い分布が 0 のまわりに正規分布
をしているときのみであり、
理論的には P と h とはなんら
の関係もない。しかしながら、
実際軌道では図-15にみられる
ように全然無関係であるとも考
えられないようである。前節の
考察から狂い分布が正規分布に
近ければ近いほど、 P と h と
の関係は密接であることがわ
かる。

図-15



二〇

7. 走行速度と保守限度との関係

従来の保守限度を再検討し、列車の高速度運転の一環として保守限度の合理的設定について考察してみる。式(16)を変形すると

をうる。ここに k , b は車両によって定まる常数であるから、横方向の動搖加速度 a に管理限界を与えると、種々の走行速度 v に対して h の保守目標が求められる。 a の管理限界を理論的に出すのは困難であるので、各地での実験値から適当と考えられる $0.07 g$ を採用する。

いま $h_1/h_2=c$, $h_4/h_3=c'$ とおくと, c , c' はほぼ常数となり, 京阪電鉄の場合 $c=0.809$, $c'=0.942$, 京福電鉄の場合 $c=0.846$, $c'=0.909$ がえられた。従つて

から h_1 , h_2 , h_3 , h_4 の保守目標が求められる。京都市電の場合は c , c' が常数と考えることができないほど変化したので、 h_1 , h_2 , h_3 , h_4 をそれぞれ式(18)から求める。京福電鉄、京阪電鉄、京都市電の場合の各保守限度は表-1 のとおりである。

表-1

鉄道名	車両番号	速度	軌間	水準	高低	通り
京福電鉄	3号	10 km/h	70.6 %	83.5 %	82.0 %	74.5 %
		20	68.8	81.3	79.9	72.6
		30	66.0	78.1	76.6	69.6
		40	62.6	74.0	72.5	65.9
		50	58.8	69.5	68.1	61.9
		60	54.9	64.8	63.4	57.7
		70	50.9	60.1	58.8	53.4
京阪電鉄	307号	67	52.8	62.5	60.1	56.3
	1881号	67	68.2	85.6	82.3	75.7
京都市電	803号	25	52.1	65.7	63.7	59.2

狂い指数 P と同様 h もまた統計量であるため現場での直観的作業には不便があるので、従来の保守限度のように最大、最小の許容狂い量で表現する。狂いを整正する場合、狂い分布は正規分布となるものと考えて差支えないから、式(9)から

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \exp(h \log n) \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

として σ を求めることができる。従つて Gumbel の range の分布法則から誘導できる式(3)を用いて、 σ から range w を求めることができる。式(20)及び式(3)を用いて h から w を求めると図-16となる。従来の保守限度は range により与えられてはいないので w の $1/2$ をもつて新しい保守限度として採用すると表-2の結果をうる。測点数 n は京福電鉄及び京阪電鉄の場合は 40 であるが、京都市電の場合は 60 である。

表-2 の 307 号車の保守限度と 3 号車の速度 60 km/h ~70 km/h に対する保守限度とが非常によくになっているのは、307 号車・3 号車とともに大正末期に作られた台車を有するからであろう。

16

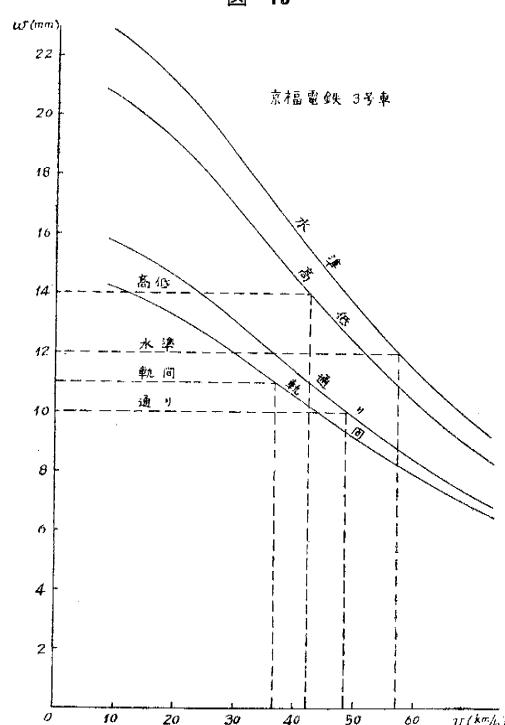


表-2

鉄道名	車両番号	速度	軌間	水準	高低	通り
京福電鉄	3号	10 km/h	± 7 mm	± 11 mm	± 10 mm	± 7 mm
		20	6	10	9	7
		30	6	9	8	6
		40	5	8	7	5
		50	4	6	6	4
		60	3	5	5	4
		70	3	4	4	3
京阪電鉄	307号	67	3	5	4	4
	1881号	67	6	12	10	8
京都市電	803号	25	5	7	7	6

8. 結論

以上の諸考察から次の事項が結論できる。

- 1) 軌道狂い指数 P が軌道状態を適確に判定しうるのは $P=20\%$ 以下である。
- 2) P が小さければ軌道状態は良好であるといえるが、 P が大きくても軌道状態が悪いとはいえない。また軌道状態が良好である場合かならずしも P が小さいとはかぎらない。
- 3) P または σ による軌道狂いの評価よりも、相対エントロピーによる評価の方が車両動揺と密接な関係があつて、狂い状態の評価に一層適切である。
- 4) 相対エントロピーによる狂い状態の評価も完全とはいがたく、 $\pm 10\%$ の誤差をともなうようである。
- 5) 0 に近い狂い量をもつ良好な軌道では、 P による管理も h による管理にも大差がないが、軌道状態が悪くなればなるほど、 P による管理よりも h による管理が適切となる。このことは前者が狂い 0 というようなきわめて良好な軌道からのモデルであり、後者はきわめて悪い状態の軌道からのモデルとして考え出されたものであることからも当然である。
- 6) h は車両動揺との関係が密接であるので、走行速度に対応した適切な保守限度を設定することができる。従つて走行速度に応じた車両形式を採用することにより、最も経済的な運転計画を立てることができる。
- 7) h の計算は P , σ の計算よりも算出が容易であり、曲線区間及び緩和曲線区間ににおける取り扱いが直線区間と同様簡単となる。

以上本文で対象とした軌道狂いは連続的狂いのみであり、不連続的狂いは対象としなかつた。従つて車両の動揺加速度も全加速度の幾何平均をとつたのである。

なお本研究は文部省科学試験研究費による研究の一部であり、実験にあたり多大の援助をたまわつた京阪電鉄、京福電鉄及び京都市交通局の各位に深く感謝する次第である。

参考文献

- 1) E.J. Gumbel; The distribution of the range, Annals of Math. Stat., Vol. 18 (1947), p. 384~412
- 2) D.A. Bell 著、唐津一訳；情報の理論その工学的応用、1955, p. 12
- 3) S. Goldman 著、関英男訳；情報理論、1956, p. 12
- 4) 上掲 2) p. 19

(昭. 32. 6. 20)