

# 桁橋構造の剛性に関する一研究

正員　米　　沢　　博\*

A Study on the Stiffness of Beam Bridge

by Dr. Eng., Hiroshi Yonezawa, C.E. Member

**Synopsis:** When the theory of orthotropic plate is applied to the analysis of beam bridge, the determination of "equivalent" flexural and twisting stiffness is firstly important. In this paper the theoretical values of equivalent stiffness are compared with experimental values to a large number of cast iron or steel models of beam bridge.

The summarize of results of study is as follows:

- (1) Values of  $\nu_y$  are small in comparison with the values of isotropic plate and values of  $\nu_x$  are equal generally to isotropic plate.
- (2) Eq. (5) is proper to determine the values of  $D_y$  when the height of beam is small and the values of A is proper when the height of beam is large.
- (3) Generally  $\nu_x D_y$  is not equal to  $\nu_y D_x$ .
- (4) Eq. (6) is proper to determine the values of 2C.
- (5) The values of  $\kappa$  are 1.0~1.3.

These results will be used efficiently to the analysis of RC or PC beam bridge by the theory of orthotropic plate.

## 1. まえがき

直交異方性板理論が、桁橋構造の平面構造物としての力学的性質を知るうえに、有効な理論であることは、各方面で論ぜられてきた。著者も、直交異方性板理論の桁橋構造への適用に関して、種々研究してきたが、この場合、桁橋構造を等厚の直交異方性板におき換えて計算するのに、いわゆる等価弾性常数や等価剛性（以後この両者を含めて等価剛性と呼ぶ）の決定が先決問題となる。

最近、補強板を直交異方性板に置き換えた場合の等価剛性について、理論的あるいは実験的研究が相当行われているようであるが<sup>1)</sup>、これらの研究はいずれも補強材の高さ（桁橋で云えば桁高）が低く、その相互間隔が密で、且つその数が比較的多い場合を論じたものである。従つて、これらの研究結果を、桁橋構造にそのままあてはめることは、不適当であり、また実用的でないと考えられる。

ここでは、軟鋼製あるいは鉄製の桁橋模型二十数個について、桁高、桁数、桁間隔などを種々変化させ、おののの模型に対して、たわみ並びにねじり試験を行つて、等価剛性を決定し、理論的に決定される等価剛性との比較検討を試みた。

## 2. 等価剛性の理論値

等厚の直交異方性板のたわみ曲面の微分方程式は、周知のように、次の式で表わされる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad \dots \dots \dots (1)$$

式(1)において

$$D_x = \frac{(EI)_x}{1 - \nu_x \nu_y} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$D_y = \frac{(EI)_y}{1 - \nu_x \nu_y} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$2H = (\nu_y D_x + \nu_x D_y) + 4C \quad \dots \dots \dots (4)$$

$(EI)_x, (EI)_y$ : 板の単位幅の  $x, y$  方向の曲げ剛性

$\nu_x, \nu_y$ : 板の  $x, y$  方向のポアソン比

2C: 板のねじり剛性

\* 工学博士、山口大学教授、工学部土木工学教室

である。且つ、ここでは便宜上  $x$  方向を主桁の方向とする。

桁橋構造を直交異方性板におき換えて、式(1)を適用して計算する場合、等価剛性すなわち  $D_x, D_y, H, \nu_x, \nu_y$  などの値を決定しなければならない。その理論的な決定法として、種々な方法が考えられる。

例えは、その一つとして、ひずみエネルギーが桁橋構造と等しくなるように、等厚の直交異方性板の  $D_x, D_y, H$ などを決定する方法がある<sup>2)</sup>。このような決定法は一応理想的な方法であるように思われるが、板の寸法、境界条件、荷重状態などによつて異なる値を与え、また桁の断面が複雑な場合などは、計算が实际上困難になると考えられる。

そこで、著者は実用的見地から、次のような簡単な理論値を対象にして、実験値との比較を行つてみた。

まず、 $D_x$ としては、圧縮フランジ有効幅の決め方で多少は変化するが、いずれにしてもあまり大差はないと考えられる。従つて、ここでは、主桁間隔を圧縮フランジ有効幅とする断面から計算される値を採用することにして、実験の対象から除外した。

$D_y$ は、同一の断面に対しても、板の二辺の比、境界の寸法や条件、荷重状態などによつて、それぞれ異なる値をとるであろう。これを、それぞれの場合について考えることは、不可能であり、また実用的でない。そこで、次のように簡単な場合を考えよう。すなわち、床板だけの曲げ剛性を用いる場合と、床板と桁の曲げ剛性を考える場合として、図-1に示すような断面に対し、次の式<sup>3)</sup>、

から計算される値を用いる。

$$\frac{c}{D_y} = \frac{(c-t)}{D_{yP}} + \frac{t}{D_{y'}} \quad \dots \dots \dots (5)$$

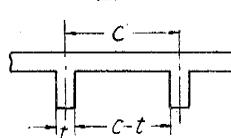


図-1

あるいは、図-1のような縦断面を有する単位幅の変断面単純ばかりを考え、そのたわみをモールの定理によつて求め、それと等しいたわみを有する矩形等断面ばかりの曲げ剛性を用いて  $D_y$ を決定する。

次に、 $2C$ についても、 $D_y$ と同様な考え方で、床板のみのねじり剛性、あるいは床板と桁とを考慮に入れて、次の式<sup>4)</sup>から計算される値を用いることとする。

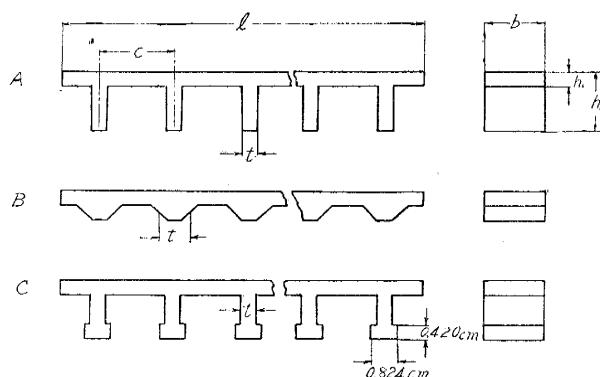
$$2C = 2C^P + \frac{C^R}{c} \quad \dots \dots \dots (6)$$

最後に、ポアソン比に対しては、実験によつて決められるべきものであると考え、理論値としては、 $\nu_x = \nu_y = 0$ あるいは  $\nu_x = \nu_y = 0.3$ を一応仮定して用いることにする。

### 3. 等価剛性の測定

等価剛性の実験値を決定するために用いた模型の種類、測定法の概略を、次に述べよう。

図-2 桁橋横断面模型



(a) 模型  $D_y, 2C, \nu_y, \nu_x$ などの測定に使用した模型の種類、寸法を図-2,3並びに表-1,2,3に、また模型の一部を写真-1に示す。

(b)  $D_y$ の測定 図-2、表-1に示した桁橋の横断面模型を単純ばかりとして、スパン中央に集中荷重を載荷し、そのたわみの測定値と等しいたわみを有する矩形等断面ばかりの  $(EI)_y$ を逆算した。軟鋼の  $E$ としては  $2.1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>、鍛鉄の  $E$ としては  $1.03 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>なる実測値を、 $\nu_x, \nu_y$ には後述する実測値を採用して、 $D_y$ の測定値を決定した。

表-1 桁橋横断面模型寸法 (cm)

	<i>l</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>h</i> <sub>1</sub>	<i>h</i> <sub>2</sub>	<i>t</i>	桁数	断面	材質
M-1	19.90	2.51	9.998	0.776	1.810	4.917	2	B	鉄鉄
M-2	17.98	2.52	6.016	0.806	1.822	1.618	3	A	鉄鉄
M-3	19.97	2.52	3.994	0.485	0.992	0.990	5	A	鉄鉄
M-4	19.95	2.52	3.996	0.492	0.962	1.531	5	B	鉄鉄
M-5	43.96	2.90	4.005	0.501	1.821	0.844	11	A	軟鋼
M-6	43.98	2.92	2.000	0.501	1.815	1.030	22	A	軟鋼
M-7	43.96	2.90	4.005	0.501	1.001	0.844	11	A	軟鋼
M-8	43.98	2.92	2.000	0.501	1.029	1.030	22	A	軟鋼
M-13	24.98	3.21	3.123	0.516	3.825	0.824	8	A	軟鋼
M-15	24.98	3.21	3.123	0.506	3.790	0.506	8	C	軟鋼

表-2 桁橋模型寸法 (cm)

	スパン	幅員	桁数	断面形
M-20	19.57	19.97	5	M-3
M-21	22.25	19.97	5	M-3
M-22	42.00	20.00	2	M-I
M-23	37.10	17.95	3	M-2
M-24	42.10	20.00	5	M-4
M-26	21.46	24.98	8	M-13
M-27	21.46	12.49	4	M-13
M-28	21.46	12.49	4	M-15

表-3 桁橋縦断模型寸法 (cm)

	<i>l</i>	<i>b</i>	<i>t</i>	<i>h</i> <sub>1</sub>	<i>h</i> <sub>2</sub>	桁数	断面	材質
M-9	44.20	2.93	0.991	0.506	1.830	1	—	軟鋼
M-10	44.95	2.49	1.002	0.516	1.000	2	—	鉄鉄
M-11	52.75	4.02	—	0.497	—	—	角形	軟鋼
M-12	44.20	2.93	0.991	0.506	1.008	1	—	軟鋼
M-14	50.30	3.21	0.824	0.516	3.825	2	—	軟鋼

のたわみ *w* を測定した。この場合、横型の二辺の長さを *a*, *b* とすると、2C は次の式<sup>5)</sup> で計算される。

$$2C = \frac{1}{2} \frac{Pab}{w} \quad \dots \dots \dots (7)$$

載荷装置を写真-2 に示す。

(d) *v<sub>y</sub>*, *v<sub>x</sub>* の測定 *v<sub>y</sub>* の測定には、*D<sub>y</sub>* の測定用いた模型を、*D<sub>x</sub>* の

測定には、図-3, 表-3 に示した桁橋の縦断模型を用いた。おのおのの模型の床板の部分の *x*, *y* 方向のひずみを、電気抵抗線ひずみ計で測定し、その比から *v<sub>y</sub>*, *v<sub>x</sub>* の値を決定した。

(e) 桁の荷重分担率の測定 スパン、幅員、桁高が同一で、桁の断面形だけが異なる二個の模型 M-27, M-28 について、各桁の応力を電気抵抗線ひずみ計で測定し、各桁の荷重分担状態を調べた。

これらの測定結果の具体的な値については、次の理論値との比較において述べる。

#### 4. 理論値と測定値との比較並びに考察

*v<sub>x</sub>*, *v<sub>y</sub>*, *D<sub>y</sub>*, 2C の測定値、これらの測定値から決定される *D<sub>x</sub>/D<sub>y</sub>*, *H/V(D<sub>x</sub>D<sub>y</sub>)* の値、各桁の荷重分担率の測定値などと、理論値との比較並びに考察をしてみよう。

(a) *v<sub>x</sub>*, *v<sub>y</sub>*について *v<sub>x</sub>*, *v<sub>y</sub>* の測定値を表-4, 5 に示す。表からわかるように、*v<sub>y</sub>* の値はいずれも 0.3 より相当小さくなっている。なお当然の結果ではあるが、同一の断面形で桁高を変化させると（例え M-5 と M-7, M-6 と M-8）、桁の高い方が *v<sub>y</sub>* が相当小さくなっている。次に、*v<sub>x</sub>* の値は、等方性板の鉄の値を大体において示している。さらに、著者の行つた実験結果だけからでは決定的なことはいえないが、*v<sub>y</sub>D<sub>x</sub>=v<sub>x</sub>D<sub>y</sub>* なる関係は、桁高が低く且つその間隔が密な場合には、ほぼ成り立つが、桁が高くあるいはその数が少ない場合には、成り立たないようである。

(b) *D<sub>y</sub>*について *D<sub>y</sub>* の理論値並びに測定値を表-6 に示す。表-6 において、*D<sub>y</sub>* の測定値を決定するのに必要な *v<sub>x</sub>* の値は、おのおのの模型について測定することはできなかつたので、軟鋼製模型に対してはすべて

图-3 桁橋縦断面模型

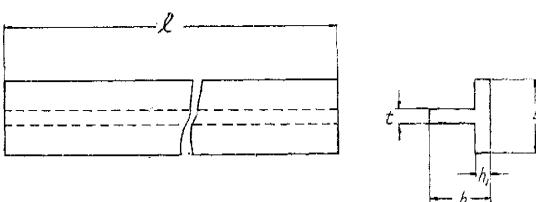


写真-1 試験模型

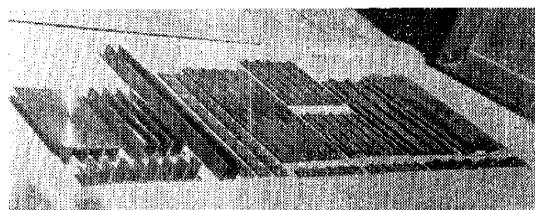


写真-2 ねじり試験装置

表-2 に示すよ  
うな、*D<sub>y</sub>* の測定  
に用いた模型と同  
一断面を有する桁  
橋全体模型を、三  
隅角部で点支持  
し、他の一隅角部  
に集中荷重 *P* を  
載荷し、荷重直下

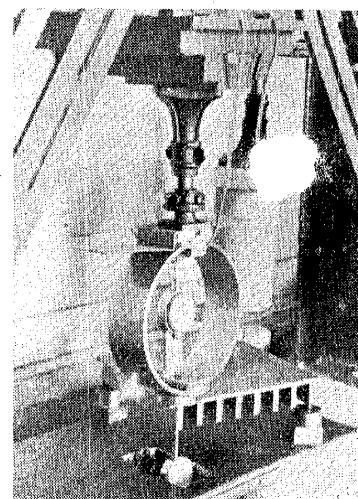


表-4  
 $\nu_x$  の測定値

	$\nu_x$
M-9	0.28
M-10	0.30
M-11	0.29
M-14	0.23

表-5  
 $\nu_y$  の測定値

	$\nu_y$
M-1	0.23
M-2	0.24
M-3	0.16
M-4	0.16
M-5	0.14
M-6	0.08
M-7	0.25
M-8	0.28
M-13	0.13
M-15	0.14

表-6  $D_y (10^5 \text{ kg}\cdot\text{cm})$  の理論値と測定値との比較

	$\nu$	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-13	M-15
理 論 値	A	0.401	0.450	0.098	0.102	0.220	0.220	0.220	0.220	0.240	0.224
	B	0	0.733	0.596	0.126	0.153	0.277	0.444	0.270	0.404	0.326
	C	0.615	0.625	0.128	0.156	0.280	0.424	0.271	0.404	0.324	0.268
測 定 値	A	0.441	0.494	0.108	0.112	0.242	0.242	0.242	0.242	0.264	0.247
	B	0.3	0.806	0.655	0.138	0.168	0.305	0.488	0.297	0.444	0.358
	C	0.676	0.687	0.141	0.171	0.308	0.466	0.298	0.444	0.356	0.295
	測定値	0.658	0.518	0.142	0.191	0.272	0.274	0.276	0.314	0.275	0.256

A: 床板, B: 式(5), C: モールの定理

 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$  (軟鋼),  $E = 1.03 \times 10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$  (鉄鉄)

M-14 の値を、鉄鉄製模型に対してはすべて M-10 の値を代用した。表からわかるように、桁の低い場合は、大体において式(5)による値(以後Bの値と略称)、あるいはモールの定理による値(以後Cの値と略称)と測定値とが一致している。桁の高い場合の測定値は、床板のみから得られる値(以後Aの値と略称)とBあるいはCの値との中間で、むしろAの値に近い値になつていている。

(c)  $2C$ について  $2C$  の理論値並びに測定値を表-7に示す。理論値の決定に用いたせん断弾性係数は、軟鋼に対しては  $0.8 \times 10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$ 、鉄鉄に対しては  $0.4 \times 10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$  を使用した。表-7からわかるように、Aの値は実測値より著しく小さくなつていている。このことは、 $2C$ に關しては桁の高低にかかわらず、床板と桁を一体として考慮する必要のあることを示している。床板と桁を一体として、式(6)から計算した値は、測定値に比較的近い値を示しているが、なお測定値の方が大体において大きい値を示している。また、模型M-27並びにM-27のウエブをわずかに削つたM-28の $2C$ の値を比較すると、M-28の値が著しく小さいことがわかる。

(d)  $D_x/D_y$  の値について 直交異方性板理論を適用して計算する場合、まず必要である  $D_x/D_y$  の値について、

表-7  $2C (\text{kg}\cdot\text{cm})$  の測定値と理論値との比較

	測定値	$Gh^3/6$	$2CP + CR/c$
M-20	24340	7607	10590
M-21	22030	7607	10590
M-22	197700	31150	91730
M-23	85700	34910	57930
M-24	33290	7933	10790
M-26	97230	18320	151600
M-27	105600	18320	151600
M-28	58020	17170	48650

 $G = 0.8 \times 10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$  (軟鋼) $G = 0.4 \times 10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$  (鉄鉄)

ほぼ測定値に近い  $D_x/D_y$  の値が得されることである。

(e)  $\kappa = H/\sqrt{D_x D_y}$  の値について (a)～(d)に示した理論値、あるいは測定値を用い、式(4)から  $H$ を決定し、 $\kappa$ の理論値と測定値とを比較したものを、表-9に示す。ここでまず注目すべきことは、 $\kappa$ のすべての測定値が1.0～1.6になつていていることである。このことは、他の実験結果<sup>5)</sup>においても、 $\kappa = 1.1, 0.86$ などの値を示している点から考えて、不自然なことではないであろう。また、理論値は桁の低い場合(M-20～24)と高い場合(M-26～28)とで、 $\kappa$ の値が著しく相違しているのに対し、測定値は桁の高低にあまり関係なく、ほぼ1.0～1.3程度の値を示している。

表-9  $\kappa$  の理論値と測定値との比較

	M-20	M-21	M-22	M-23	M-24	M-26	M-27	M-28
	$\nu$ (M-3)	$\nu$ (M-3)	$\nu$ (M-1)	$\nu$ (M-2)	$\nu$ (M-4)	$\nu$ (M-13)	$\nu$ (M-13)	$\nu$ (M-14)
理 論 値	A	0	0.394	0.394	0.264	0.333	0.368	0.057
	B	0.483	0.483	0.576	0.480	0.411	0.409	0.160
測 定 値	A	0.3	0.729	0.729	0.732	0.717	0.722	2.043
	B	0.788	0.788	0.788	0.920	0.815	0.718	2.085
	測定値	1.245	1.148	1.600	1.072	1.328	1.105	1.129

A: 床板 B: 式(5),(6)

表-8  $D_x/D_y$  の理論値と測定値との比較

	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5	M-6	M-7	M-8	M-13	M-15	
理 論 値	A	8.6	5.4	3.9	4.4	19.0	32.9	3.3	6.1	174	153
	B	4.7	4.1	3.0	2.9	15.1	16.3	2.7	3.4	128	128
	C	5.6	3.9	3.0	2.9	14.9	17.0	2.7	3.4	129	129
測定値	5.7	5.1	2.8	2.5	16.0	27.0	2.8	4.7	157	140	

A: 床板, B: 式(5), C: モールの定理

理論値と測定値を比較したものを、表-8に示す。ここで、 $D_x$ を決定するための  $(EI)_x$  の測定値がないので、主桁間隔を圧縮フランジ有効幅とする断面から計算される値を用いた。 $D_x/D_y$ の値で注意すべきことは、桁が高い場合(M-5, 6, 13, 15など)は  $D_y$ は床板のみから計算して、ほぼ測定値に近い  $D_x/D_y$ の値が得られることである。

(f) 桁の荷重分担状態について 模型M-27, 28の縁桁あるいは中桁のスパン中央に、400 kg(載荷幅2.0 cm, 载荷長2.5 cm)の荷重を載荷した場合の、各桁のスパン中央断面の最大応力の測定

表-10 各桁の応力 (kg/cm<sup>2</sup>) の理論値と測定値との比較

	A	縁桁に載荷				縁桁に載荷			
		G 1	G 2	G 3	G 4	G 1	G 2	G 3	G 4
M	A	573 (74)	160 (22)	31 (4)	0 (0)	154 (21)	398 (53)	148 (20)	43 (6)
	B	538 (71)	174 (23)	38 (5)	7 (1)	169 (23)	383 (52)	140 (19)	44 (6)
M	A	638 (72)	202 (23)	31 (4)	11 (1)	171 (19)	480 (54)	210 (24)	32 (3)
	B	656 (69)	219 (23)	57 (6)	19 (2)	213 (23)	473 (51)	185 (20)	56 (6)

A: 測定値, B: 理論値, ( ) : 分担率

考査を行つた。ここで使用した模型に対する研究結果を要約すると、次のようにある。

(1)  $\nu_y$  の値は、等方性板の値より相当小さく、特に桁が高くなると、その傾向が著しい。 $\nu_x$  の値は、桁の高低にかかわらず、ほぼ等方性板の値に等しくなつた。

(2)  $D_y$  の値は、桁が低い場合は式(5)、桁が高い場合は床板だけの曲げ剛性を用いて計算すれば、ほぼ満足な結果が得られる。

(3)  $\nu_x D_y = \nu_y D_x$  なる関係は、桁が高い場合あるいは桁の数が少ない場合には成り立たない。

(4) 2C の値は、式(6)から計算すればよい。

(5)  $\kappa$  の値は、桁の高低その他に關係なく、1.0~1.3程度の値を採用すればよい。

以上の結論は、RCあるいはPC桁橋構造の計算に、直交異方性板理論を適用する場合、その等価剛性の決定に参考になるものと考えられる。

直交異方性板理論が、桁橋構造の解析に有効な理論であることが一応判明している現在、実在橋梁に対する載荷試験の結果から、ただちに  $\kappa$  などの値を論ずるまえに、各種形式の桁橋に対して、等価剛性そのものに関する研究を行う必要を感じる次第である。

最後に、種々有益な御教示を頂いた京都大学小西教授、同成岡教授に感謝の意を表し、また、文部省科学試験研究費の補助を受けたことを附記する。

#### 参考文献

- 1) (a) W.H. Hoppmann, 2nd: Jurnal of Applied Mechanics, Vol. 22, 1955, p. 267  
 (b) N.J. Huffington: Journal of Applied Mechanics, Vol. 23, 1956, p. 15  
 (c) W.H. Hoppman, 2nd, N.J. Huffington, L.S. Magness: Journal of Applied Mechanics, Vol. 23, 1956, p. 343
- 2) (1), (b) 参照
- 3) K. Girkmann: Frächentragwerke, Wien, 1954. S. 297
- 4) (3) S. 298
- 5) 坪井善勝: 平面構造論, 昭 30, 226 頁
- 6) (1), (c) 参照

(昭. 32. 6. 18)

値並びに理論値を、表-10 に示す。表にて、理論値は(a), (d), (e) で述べた  $\nu_x$ ,  $\nu_y$ ,  $D_x/D_y$ ,  $\kappa$  などの測定値を用い、式(1)を適用して解いた値である。但し、 $\kappa$  の測定値は、M-27 が 1.13, M-28 が 1.03 であるから、近似的に  $\kappa=1$  として計算した。測定応力と計算応力がかなりよく一致している点や、各桁の応力から得られる桁の荷重分担状態などから判断して、 $\kappa=1$  が適当であることがわかる。

#### 5. 結論

桁橋構造を、等厚の直交異方性板に置き換えて、解析する場合問題になる  $\nu_x$ ,  $\nu_y$ ,  $D_y$ ,  $D_x/D_y$ ,  $\kappa$  などの値について、模型桁橋構造によつて、その理論値と測定値との比較