

# Affine 変換で表わした応力とひずみの基礎方程式

准員 島田 静雄\*

## "AFFINE-TRANSFORMATION FOR STRESS AND STRAIN RELATIONS"

by Shizuo Shimada, C.E. Assoc. Member

**Synopsis :** The stress-strain relations in matrix notation are denoted by affinor and vector calculations which introduce more simple explanations of elastic constants ( $E, G, \nu$ ) even in the orthogonally unisotropic stress-strain problems.

**要旨** 応力成分とひずみ成分との関係式は、弾性体の釣合を論ずる際に使用されるが、任意の座標変換に伴う演算のわざらわしさは比較的簡単な法則の上に成り立っている。マトリックスを、アフィノール演算で展開整理すれば、弾性体の応力成分とひずみ成分との関係が、2つのパラメーター  $\mu, \psi$  で与えられることを示し、特に直交異方性体の弾性係数を与えるのに便利な展開が誘導される。

### 1. 応力成分の Matrix 表示とその Affine 展開

弾性体の内部の任意の1点を原点として、 $x, y, z$  の直交座標軸を考え、 $yz, zx, xy$  面に作用する9個の応力成分を次のように記す。

$$\{\{\sigma\}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \dots \quad (1)$$

9個の応力成分には、 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  の関係があるから、独立なものは6個となり上のマトリックスは常に対称である。

いま原点を同一にした新しい直交座標軸を  $x', y', z'$  として座標軸を変換した時に、(1)式の応力成分がどのように変化するかを考える。新しい座標軸の方向を三つの互いに直交する単位ベクトル  $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_3$  で与えると

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\delta}_1 = [f_{11}, f_{12}, f_{13}] = \{\cos(x'x), \cos(x'y), \cos(x'z)\} \\ \vec{\delta}_2 = [f_{21}, f_{22}, f_{23}] = \{\cos(y'x), \cos(y'y), \cos(y'z)\} \\ \vec{\delta}_3 = [f_{31}, f_{32}, f_{33}] = \{\cos(z'x), \cos(z'y), \cos(z'z)\} \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j = \delta_{ij}$$

新しい座標軸で表わした応力成分  $\sigma_{x'}, \tau_{x'y'}, \dots$  は既知の変換式で次のように与えられる<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x f_{11} f_{11} + \tau_{xy} f_{11} f_{12} + \tau_{xz} f_{11} f_{13} + \tau_{yx} f_{12} f_{11} + \sigma_y f_{12} f_{12} + \tau_{yz} f_{12} f_{13} + \tau_{zx} f_{13} f_{11} \\ &\quad + \tau_{zy} f_{13} f_{12} + \sigma_z f_{13} f_{13}, \\ \tau_{x'y'} &= \sigma_x f_{11} f_{21} + \tau_{xy} f_{11} f_{22} + \tau_{xz} f_{11} f_{23} + \tau_{yx} f_{12} f_{21} + \sigma_y f_{12} f_{22} + \tau_{yz} f_{12} f_{23} + \tau_{zx} f_{13} f_{21} \\ &\quad + \tau_{zy} f_{13} f_{22} + \sigma_z f_{13} f_{23} \end{aligned}$$

これらの式の演算は、ベクトル並びにアフィノールの演算法則を使用すれば<sup>2)</sup>きわめて簡単な表現で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{x'} = \vec{\delta}_1 \times \{\{\sigma\}\} \times \vec{\delta}_1 = \{\vec{\delta}_1 \times \vec{\delta}_1\} : \{\{\sigma\}\} \\ \sigma_{y'} = \vec{\delta}_2 \times \{\{\sigma\}\} \times \vec{\delta}_2 = \{\vec{\delta}_2 \times \vec{\delta}_2\} : \{\{\sigma\}\} \\ \sigma_{z'} = \vec{\delta}_3 \times \{\{\sigma\}\} \times \vec{\delta}_3 = \{\vec{\delta}_3 \times \vec{\delta}_3\} : \{\{\sigma\}\} \\ \tau_{x'y'} = \vec{\delta}_1 \times \{\{\sigma\}\} \times \vec{\delta}_2 = \{\vec{\delta}_1 \times \vec{\delta}_2\} : \{\{\sigma\}\} \\ \sigma_{y'z'} = \vec{\delta}_2 \times \{\{\sigma\}\} \times \vec{\delta}_3 = \{\vec{\delta}_2 \times \vec{\delta}_3\} : \{\{\sigma\}\} \\ \tau_{z'x'} = \vec{\delta}_3 \times \{\{\sigma\}\} \times \vec{\delta}_1 = \{\vec{\delta}_3 \times \vec{\delta}_1\} : \{\{\sigma\}\} \end{array} \right\} \quad (3)$$

いい換えるならば、アフィノール  $\{\vec{\delta}_i \times \vec{\delta}_j\}$  とマトリックス  $\{\{\sigma\}\}$  のスカラー積が応力成分の  $i$  軸  $j$  軸 ( $i = x' y' z'$ ,  $j = x' y' z'$ ) の成分を与える。この事から座標軸の変換という見方から離れて、三つの互いに直交するベクトルの方向で表わした応力成分のアフィン展開が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\{\sigma\}\} &= \sigma_{x'} \{\vec{\delta}_1 \times \vec{\delta}_1\} + \sigma_{y'} \{\vec{\delta}_2 \times \vec{\delta}_2\} + \sigma_{z'} \{\vec{\delta}_3 \times \vec{\delta}_3\} + \tau_{x'y'} \{\vec{\delta}_1 \times \vec{\delta}_2\} + \tau_{y'z'} \{\vec{\delta}_2 \times \vec{\delta}_3\} \\ &\quad + \tau_{z'x'} \{\vec{\delta}_3 \times \vec{\delta}_1\} + \tau_{x'y'} \{\vec{\delta}_2 \times \vec{\delta}_3\} + \tau_{y'z'} \{\vec{\delta}_3 \times \vec{\delta}_1\} + \tau_{z'x'} \{\vec{\delta}_1 \times \vec{\delta}_2\} \dots \quad (4) \end{aligned}$$

\* 工学修士、東京大学大学院学生、数物系土木工学科博士過程

従つて新しい座標軸についての応力成分を  $\{\{\Sigma'\}\}$  とすれば、

$$\{\{\mathfrak{X}'\}\} = \{\{\mathfrak{X}\}\} \times \{\{\mathfrak{X}\}\} \times \{\{\mathfrak{X}^*\}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & y\tau_{z'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} \dots \dots \dots \quad (5)$$

但し

$$\{\{\mathfrak{F}\}\} \equiv \begin{Bmatrix} \mathfrak{F}_1 \\ \mathfrak{F}_2 \\ \mathfrak{F}_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

$\{\{S^*\}\}$  は  $\{\{S\}\}$  の行と列とを入れ換えたもの

## 2. 主応力と主軸ベクトル

(4) 式のアフィン展開において、三つの直交するベクトルを適当にきめて、 $\tau$  の項をすべて 0 にすることができる。

$$\{\{\mathfrak{L}\}\} = \sigma_x' \{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_1\} + \sigma_y' \{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_2\} + \sigma_z' \{\mathfrak{F}_3 \times \mathfrak{F}_3\} \dots \dots \dots \quad (6)$$

この時の  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$ ,  $\sigma_z'$  を主応力と呼び、 $\vec{\tau}_1$ ,  $\vec{\tau}_2$ ,  $\vec{\tau}_3$  のベクトルは主応力の軸の方向を与えるベクトルである。

$\sigma_x'$   $\sigma_y'$   $\sigma_z'$  を求めるには

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma, & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

のデターミナントの根として与えられ、主応力の方向を与えるベクトルは、次式で求められる。

$$\mathfrak{F}_i \times \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## アフィノールの性質として

$$\{\{\mathfrak{G}\}\} = \{\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_1\} + \{\mathfrak{G}_2 \times \mathfrak{G}_2\} + \{\mathfrak{G}_3 \times \mathfrak{G}_3\}$$

故に  $\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \sigma_{z'}$  の時は、いかなる直交座標変換においても常に一樣な応力状態を与えることを意味する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{x'} - \sigma_0 \\ \sigma_2 = \sigma_{y'} - \sigma_0 \\ \sigma_3 = \sigma_{z'} - \sigma_0 \\ 3\sigma_0 = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'} \end{array} \right.$$

とおいて、 $\{\{x\}\}$  を次の二つの成分に分解するのが便利である。

$$\{\{\mathfrak{L}\}\} = \sigma_0\{\{\mathfrak{E}\}\} + \sigma_1\{\{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_1\}\} + \sigma_2\{\{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_2\}\} + \sigma_3\{\{\mathfrak{F}_3 \times \mathfrak{F}_3\}\} \dots \dots \dots \quad (7)$$

### 3. 主せん断応力

ある1つの主応力の方向を回転軸として座標軸を $45^\circ$ だけ回転した時に、応力成分がどのように変化するかを誘導してみる。たとえば $\sigma_1$ を回転軸とすれば、それに直交する他の2つの座標軸の方向を示す単位ベクトルは

$$\mathfrak{F}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3), \quad \mathfrak{F}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_3),$$

これより (7) 式を  $\tilde{\psi}_1$ ,  $\tilde{\psi}_2'$ ,  $\tilde{\psi}_3'$  で表わせば

$$\begin{aligned}\{\{\mathfrak{E}\}\} &\equiv \sigma_0\{\{\mathfrak{E}\}\} + \sigma_1\{\{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_1\}\} + \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\{\{\mathfrak{F}_2' \times \mathfrak{F}_2'\}\} + \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\{\{\mathfrak{F}_3' \times \mathfrak{F}_3'\}\} \\ &+ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\{\{\mathfrak{F}_3' \times \mathfrak{F}_2'\}\} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\{\{\mathfrak{F}_3' \times \mathfrak{F}_3'\}\}\end{aligned}$$

座標変換の後にできる応力成分のマトリックスの形で示すと

$$\{\{\mathfrak{X}'\}\} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & & \\ & \sigma_0 & \\ \vdots & & \\ & & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1, & 0, & 0, \\ 0, & (\sigma_2 + \sigma_3)/2, & (\sigma_2 - \sigma_3)/2, \\ 0, & (\sigma_1 - \sigma_2)/2, & (\sigma_1 + \sigma_2)/2, \end{bmatrix}$$

この計算で得られる  $(\sigma_2 - \sigma_3)/2$  を主せん断応力と呼んでいる。座標軸の回転軸のとり方は 3 種あるから、主せん断応力は次の 3 種ある。

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

#### 4. 窒位とトズミ

離性体内部の二点  $P(x_1, y_1, z_1)$ ,  $Q(x_2, y_2, z_2)$  及びその直の座標を  $(u_1, v_1, w_1)$ ,  $(u_2, v_2, w_2)$  としこれを次

のベクトルで表わす。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \{x_1, y_1, z_1\}, & \mathbf{r}_2 &= \{x_2, y_2, z_2\} \\ \mathbf{B}_1 &= \{u_1, v_1, w_1\}, & \mathbf{B}_2 &= \{u_2, v_2, w_2\} \end{aligned}$$

2点  $P, Q$  が非常に近接しているとして、2点間の間を

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 &\equiv d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\} \\ \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 &\equiv d\mathbf{B} = \{du, dv, dw\} \end{aligned}$$

で与えるものとする。更に微分の演算を行う演算子と、同じくベクトルの記法で次のように記す。

$$\nabla \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

さて、 $P, Q$  の2点が変形後  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1 + \mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 + \mathbf{B}_2$  に変位した時を考え、 $P$  点に対する  $Q$  点の相対的な変位  $\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 \equiv d\mathbf{B}$  を考えてみる。これはアフィン演算で、

$$d\mathbf{B} \equiv d\mathbf{r} \times \{\nabla \times \mathbf{B}\}$$

2点間の長さの変化は  $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$  が  $(d\mathbf{r} + d\mathbf{B}) \cdot (d\mathbf{r} + d\mathbf{B})$  になつたのであるから

$$(d\epsilon)^2 = (d\mathbf{r} + d\mathbf{B}) \cdot (d\mathbf{r} + d\mathbf{B}) - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 2 d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{B} + d\mathbf{B} \cdot d\mathbf{B}$$

右辺の  $d\mathbf{B} \cdot d\mathbf{B}$  の項は第1項に比して次の微小量となるのでこれを省略すれば

$$(d\epsilon)^2 = 2 d\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{r} \times \{\nabla \times \mathbf{B}\}) = 2 \{d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}\} : \{\nabla \times \mathbf{B}\}$$

但し記号は次のものを与える。

$$\{d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}\} \equiv \begin{bmatrix} dx^2, & dx \, dy, & dx \, dz \\ dy \, dx, & dy^2, & dy \, dz \\ dz \, dx, & dz \, dy, & dz^2 \end{bmatrix}, \quad \{\nabla \times \mathbf{B}\} \equiv \begin{bmatrix} \partial u / \partial x, & \partial v / \partial x, & \partial w / \partial x \\ \partial u / \partial y, & \partial v / \partial y, & \partial w / \partial y \\ \partial u / \partial z, & \partial v / \partial z, & \partial w / \partial z \end{bmatrix} \dots (8)$$

演算の際に表われるアフィノール  $\{\nabla \times \mathbf{B}\}$  は、これを対称マトリックスと逆対称マトリックスの2つの成分に分解して考えることができる。

$$\{\{\mathfrak{D}_1\}\} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{\nabla \times \mathbf{B}\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{B} \times \nabla\} \dots (9)$$

$$\{\{\mathfrak{D}_2\}\} \equiv \begin{bmatrix} 0, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), & 0, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), & 0, \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{\nabla \times \mathbf{B}\} - \frac{1}{2} \{\mathbf{B} \times \nabla\} \dots (10)$$

$\{\{\mathfrak{D}_1\}\}$  は弾性体内部の点が変形する成分を与える、 $\{\{\mathfrak{D}_2\}\}$  は全体として剛体的回転を与える成分になる。 $\{\{\mathfrak{D}_1\}\}$  を弾性体のひずみを与えるひずみ成分のマトリックスで次のように表わす。

$$\{\{\mathfrak{D}_1\}\} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \gamma_{yz} = \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xz} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{cases} \dots (11)$$

### 5. ひずみ成分のマトリックスの Affine 展開

応力成分のマトリックスと同様にひずみ成分のマトリックスは対称であるから 座標軸の変換にともなうひずみ成分の変化は線型である。適当に変換を行えば、対角線のみのひずみを残し、次の形に導くことができる。

$$\begin{aligned} \{\{\mathfrak{D}_1\}\} &\equiv \epsilon_0 \{\{\mathfrak{C}\}\} + \epsilon_1 \{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_1\} + \epsilon_2 \{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_2\} + \epsilon_3 \{\mathfrak{F}_3 \times \mathfrak{F}_3\} \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 &= 0 \\ \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z &= 3 \epsilon_0 \end{aligned}$$

$\epsilon_0$  は弾性体全体の体積の変化を与える、 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  は容積変化がなく弾性体の形状の変化を与える。任意の直交座標変換に  $\{\{\mathfrak{C}\}\}$  は不変であるが、 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  の成分は座標変換によつてマトリックスの成分の変化を与える量である。

## 6. 均質直交異方性体の弾性常数等

応力成分とひずみ成分との相互の関係を与える常数が弹性常数であるが、これをベクトル演算で展開すると比較的興味ある性質を誘導できる。いま、応力成分を(7)式で与え、その時に生ずる主応力の方向を与えるベクトルでひずみ成分のマトリックスを展開してみる。

$$\begin{aligned} \{\{\mathfrak{D}\}\} &= \sigma_1\{\{\mathfrak{C}\}\} + \sigma_1\{\{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_1\}\} + \sigma_2\{\{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2\}\} + \sigma_3\{\{\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_3\}\} \\ \{\{\mathfrak{D}_1\}\} &= \varepsilon_{11}\{\{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_1\}\} + \varepsilon_{22}\{\{\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_2\}\} + \varepsilon_{33}\{\{\mathfrak{B}_3 \times \mathfrak{B}_3\}\} + \varepsilon_{12}\{\{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2\}\} + \varepsilon_{21}\{\{\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_1\}\} \\ &\quad + \varepsilon_{23}\{\{\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_3\}\} + \varepsilon_{32}\{\{\mathfrak{B}_3 \times \mathfrak{B}_2\}\} + \varepsilon_{13}\{\{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_3\}\} + \varepsilon_{31}\{\{\mathfrak{B}_3 \times \mathfrak{B}_1\}\} \end{aligned}$$

対称マトリックスの性質上  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  である。いま  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  となつた一様な応力状態の時を考える。この時には、三つの互いに直交するベクトル  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_i \cdot \tau_j = \delta_{ij}$  によって、

$$\{\{\mathfrak{D}\}\} \equiv \lambda_1^2 \sigma_0 \{\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_1\} + \lambda_2^2 \sigma_0 \{\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_2\} + \lambda_3^2 \sigma_0 \{\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_3\} \dots \dots \dots \quad (12)$$

にアフィン展開されるとしよう。 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  はすべて等しくない常数とする。このベクトル  $r_i$  の方向を座標軸にとるのが便利である。

$$\{\{\mathfrak{D}_1\}\} = \lambda_1^2 \sigma_0 \{\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_1\} + \lambda_2^2 \sigma_0 \{\mathfrak{E}_2 \times \mathfrak{E}_2\} + \lambda_3^2 \sigma_0 \{\mathfrak{E}_3 \times \mathfrak{E}_3\} = \sigma_0$$

さて、直交異方性体の応力とひずみとの関係を求めるのに三つの座標軸が対称軸で、一つの座標軸の廻りに $180^\circ$ 座標軸を回転しても同一の関係がある時に、ひずみと応力の関係式は一般に下式で与えられる

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z \\ \sigma_y &= a_{12}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z \\ \sigma_z &= a_{13}\varepsilon_x + a_{23}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z \\ \tau_{yz} &= a_{44}\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = a_{55}\gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = a_{66}\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(13) 式は、せん断応力とせん断ひずみとが 1 対 1 の対応を行なっている事に気をつければ、せん断ひずみを生ずる応力成分  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ) と静水圧力に相当する  $\sigma_0$  の応力成分とで、ひずみ成分  $\epsilon, r$  とに関して釣合条件が異なる事を意味している。主応力の軸を、3 つのベクトル  $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{\epsilon}_3$  で与えた時の応力成分は

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_0 + \sigma_1 f_{11} f_{11} + \sigma_2 f_{21} f_{21} + \sigma_3 f_{31} f_{31} \\ \sigma_y = \sigma_0 + \sigma_1 f_{12} f_{12} + \sigma_2 f_{22} f_{22} + \sigma_3 f_{32} f_{32} \\ \sigma_z = \sigma_0 + \sigma_1 f_{13} f_{13} + \sigma_2 f_{23} f_{23} + \sigma_3 f_{33} f_{33} \\ \tau_{xy} = \sigma_1 f_{11} f_{12} + \sigma_2 f_{21} f_{22} + \sigma_3 f_{31} f_{32} \\ \tau_{yz} = \sigma_1 f_{12} f_{13} + \sigma_2 f_{22} f_{23} + \sigma_3 f_{32} f_{33} \\ \tau_{zx} = \sigma_1 f_{13} f_{11} + \sigma_2 f_{23} f_{21} + \sigma_3 f_{33} f_{31} \end{array} \right\} \dots \quad (i)$$

いま  $\sigma_0 = 0$  として、(13) 式の 9 つの常数  $a_{ik}$  の性質を調べてみる。そのために、 $a_{44}, a_{55}, a_{66}$  の常数を、4 つの常数  $\mu, k_1, k_2, k_3$  で下記のように表わすのが便利である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a_{44}} &= 2 \mu^2 k_1 k_2, \quad \frac{1}{a_{55}} = 2 \mu^2 k_2 k_3, \quad \frac{1}{a_{66}} = 2 \mu^2 k_3 k_1 \\ k_1 \cdot k_2, k_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

ひずみ成分のマトリックス  $\{\mathbb{D}\}$  を  $\mu, k_1, k_2, k_3$  を用いて次のように2つの成分に展開する。

$$\begin{aligned} \{\{\mathfrak{D}_i\}\} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x, & r_{xy}/2, & r_{xz}/2 \\ r_{xy}/2, & \varepsilon_y, & r_{yz}/2 \\ r_{xz}/2, & r_{yz}/2, & \varepsilon_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \mu^2 k_1^2 (\sigma_1 f_{11} + \sigma_2 f_{21y} + \sigma_3 f_{31}), & 0, & 0, \\ 0, & \varepsilon_y - \mu^2 k_2^2 (\sigma_1 f_{12}^2 + \sigma_2 f_{22}^2 + \sigma_3 f_{32}^2), & \\ 0, & 0, & \varepsilon_z - \mu^2 k_3^2 (\sigma_1 f_{13}^2 + \sigma_2 f_{23}^2 + \sigma_3 f_{33}^2) \\ & + \mu^2 \sigma_1 \{\tilde{x}_x' \times \tilde{x}_y'\} + \mu^2 \sigma_2 \{\tilde{x}_y' \times \tilde{x}_z'\} + \mu^2 \sigma_3 \{\tilde{x}_z' \times \tilde{x}_x'\} \dots \dots \dots \text{(iii)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

但し、 $\mathfrak{F}_1' \equiv \{k_1 f_{11}, k_2 f_{12}, k_3 f_{13}\}$ ,  $\mathfrak{F}_2' \equiv \{k_1 f_{21}, k_2 f_{22}, k_3 f_{23}\}$ ,  $\mathfrak{F}_3' \equiv \{k_1 f_{31}, k_2 f_{32}, k_3 f_{33}\}$

さて、 $\sigma_0=0$  の場合に、応力とひずみとの関係式で、任意の大きさ、任意の方角の主応力  $\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3$  ( $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ ) に対して、成立しなければならない条件は、

$$\begin{cases} \sigma_x = a_{11}' \varepsilon_x, & \sigma_y = a_{22}' \varepsilon_y, & \sigma_z = a_{33}' \varepsilon_z \\ \tau_{x,y} = a_{41} \tau_{x,y}, & \tau_{y,z} = a_{56} \tau_{y,z}, & \tau_{z,x} = a_{65} \tau_{z,x} \end{cases}$$

で与えられる。ところで  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  は、 $a_{44}, a_{55}, a_{66}$  の係数とは無縁に決まるものではない。始めに球であつ

た弾性体は、応力を受けて三軸の梢円体に変形するのであるからひずみ成分のマトリックスは、常に  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  を係数としたアフィノールの形式で展開され得る。すなわち、(iii) 式の始めの対角行列の成分は 0 となることが規定される。よつて、

$$\sigma_{11}' = \mu^2 k_1^2, \quad \sigma_{22}' = \mu^2 k_2^2, \quad \sigma_{33}' = \mu^2 k_3^2$$

従つて  $\sigma_0 = 0, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$  の時のひずみと応力との関係は次の形になる。

$$\left. \begin{array}{l} \{\{\mathfrak{D}\}\} = \sigma_0 \{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2\} + \sigma_1 \{\mathfrak{F}_1' \times \mathfrak{F}_2\} + \sigma_2 \{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2'\} \\ \{\{\mathfrak{D}'\}\} = \mu^2 \sigma_0 \{\mathfrak{F}_1' \times \mathfrak{F}_2'\} + \mu^2 \sigma_1 \{\mathfrak{F}_2' \times \mathfrak{F}_3'\} + \mu^2 \sigma_2 \{\mathfrak{F}_1' \times \mathfrak{F}_3'\} \end{array} \right\} \quad (14)$$

但し  $\left. \begin{array}{l} \mathfrak{F}_1 = \{f_{11}, f_{12}, f_{13}\} \\ \mathfrak{F}_2 = \{f_{21}, f_{22}, f_{23}\} \\ \mathfrak{F}_3 = \{f_{31}, f_{32}, f_{33}\} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \mathfrak{F}_1' = \{k_1 f_{11}, k_2 f_{12}, k_3 f_{13}\} \\ \mathfrak{F}_2' = \{k_1 f_{21}, k_2 f_{22}, k_3 f_{23}\} \\ \mathfrak{F}_3' = \{k_1 f_{31}, k_2 f_{32}, k_3 f_{33}\} \end{array} \right\}$

$k_1, k_2, k_3$  は、座標軸の長さをそれぞれの方向に  $k$  倍した長さが単位の長さと考えることを意味している。いま  $k_1 \mu = \mu_1, k_2 \mu = \mu_2, k_3 \mu = \mu_3$  において座標軸方向の伸びを示す変換のマトリックスを次式で与える。

$$\{\{\lambda\}\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \{\{\mu\}\} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

応力とひずみの関係は

$$\left. \begin{array}{l} \{\{\mathfrak{E}\}\} = \sigma_0 \{\{\mathfrak{F}\}\} + \sigma_1 \{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2\} + \sigma_2 \{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_3\} + \sigma_3 \{\mathfrak{F}_3 \times \mathfrak{F}_1\} \\ \{\{\mathfrak{D}\}\} = \sigma_0 \{\{\lambda\}\} \times \{\{\mathfrak{F}\}\} \times \{\{\lambda\}\} + \sigma_1 \{\{\mu\}\} \times \{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2\} \times \{\{\mu\}\} + \sigma_2 \{\{\mu\}\} \times \{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_3\} \times \{\{\mu\}\} \\ + \sigma_3 \{\{\mu\}\} \times \{\mathfrak{F}_3 \times \mathfrak{F}_1\} \times \{\{\mu\}\} \end{array} \right\} \quad (16)$$

応力とひずみの関係式に書き直せば

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_0 + \sigma_1 f_{11} f_{11} + \sigma_2 f_{21} f_{21} + \sigma_3 f_{31} f_{31} \\ \sigma_y = \sigma_0 + \sigma_1 f_{12} f_{12} + \sigma_2 f_{22} f_{22} + \sigma_3 f_{32} f_{32} \\ \sigma_z = \sigma_0 + \sigma_1 f_{13} f_{13} + \sigma_2 f_{23} f_{23} + \sigma_3 f_{33} f_{33} \\ \tau_{xy} = \sigma_1 f_{11} f_{12} + \sigma_2 f_{21} f_{22} + \sigma_3 f_{31} f_{32} \\ \tau_{yz} = \sigma_1 f_{12} f_{13} + \sigma_2 f_{22} f_{23} + \sigma_3 f_{32} f_{33} \\ \tau_{zx} = \sigma_1 f_{13} f_{11} + \sigma_2 f_{23} f_{21} + \sigma_3 f_{33} f_{31} \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \sigma_0 \lambda_1^2 + \sigma_1 \mu_1^2 f_{11} f_{11} + \sigma_2 \mu_1^2 f_{21} f_{21} + \sigma_3 \mu_1^2 f_{31} f_{31} \\ \varepsilon_y = \sigma_0 \lambda_2^2 + \sigma_1 \mu_2^2 f_{12} f_{12} + \sigma_2 \mu_2^2 f_{22} f_{22} + \sigma_3 \mu_2^2 f_{32} f_{32} \\ \varepsilon_z = \sigma_0 \lambda_3^2 + \sigma_1 \mu_3^2 f_{13} f_{13} + \sigma_2 \mu_3^2 f_{23} f_{23} + \sigma_3 \mu_3^2 f_{33} f_{33} \\ \tau_{xy}/2 = \sigma_1 \mu_1 \mu_2 f_{11} f_{12} + \sigma_2 \mu_1 \mu_2 f_{21} f_{22} + \sigma_3 \mu_1 \mu_2 f_{31} f_{32} \\ \tau_{yz}/2 = \sigma_1 \mu_2 \mu_3 f_{12} f_{13} + \sigma_2 \mu_2 \mu_3 f_{22} f_{23} + \sigma_3 \mu_2 \mu_3 f_{32} f_{33} \\ \tau_{zx}/2 = \sigma_1 \mu_3 \mu_1 f_{13} f_{11} + \sigma_2 \mu_3 \mu_1 f_{23} f_{21} + \sigma_3 \mu_3 \mu_1 f_{33} f_{31} \end{array} \right\} \quad (18)$$

よつて、これらの式の比較から

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x - \sigma_0 \lambda_1^2 = \mu_1^2 (\sigma_x - \sigma_0) \\ \varepsilon_y - \sigma_0 \lambda_2^2 = \mu_2^2 (\sigma_y - \sigma_0) \\ \varepsilon_z - \sigma_0 \lambda_3^2 = \mu_3^2 (\sigma_z - \sigma_0) \\ \tau_{xy}/2 = \mu_1 \mu_2 \tau_{xy} \\ \tau_{yz}/2 = \mu_2 \mu_3 \tau_{yz} \\ \tau_{zx}/2 = \mu_3 \mu_1 \tau_{zx} \end{array} \right\}$$

$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3 \sigma_0$  を考慮すれば

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \left( \mu_1^2 + \frac{\lambda_1^2 - \mu_1^2}{3} \right) \sigma_x + \frac{\lambda_1^2 - \mu_1^2}{3} \sigma_y + \frac{\lambda_1^2 - \mu_1^2}{3} \sigma_z \\ \varepsilon_y = \frac{\lambda_2^2 - \mu_2^2}{3} \sigma_x + \left( \mu_2^2 + \frac{\lambda_2^2 - \mu_2^2}{3} \right) \sigma_y + \frac{\lambda_2^2 - \mu_2^2}{3} \sigma_z \\ \varepsilon_z = \frac{\lambda_3^2 - \mu_3^2}{3} \sigma_x + \frac{\lambda_3^2 - \mu_3^2}{3} \sigma_y + \left( \mu_3^2 + \frac{\lambda_3^2 - \mu_3^2}{3} \right) \sigma_z \end{array} \right\} \quad (19)$$

弾性体の基礎としてひずみエネルギー-函数が存在する時には、 $\lambda_i$  と  $\mu_i$  とに次の式が成立しなければならぬ。

$$\lambda_1^2 - \mu_1^2 = \lambda_2^2 - \mu_2^2 = \lambda_3^2 - \mu_3^2 = -\psi^2 \quad (20)$$

直交異方性体の弹性常数  $E_x, E_y, E_z, \nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{xz}, \nu_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$  は  $\lambda_i, \mu_i$  の常数で表わすことができ

るが、これらの弾性常数相互の関係は、4つの独立の成分が含まれる。これを  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  及び  $\psi$  で与えれば

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{3}{3\mu_1^2 - \psi^2}, \quad E_y = \frac{3}{3\mu_2^2 - \psi^2}, \quad E_z = \frac{3}{3\mu_3^2 - \psi^2} \\ \nu_{xy} = \nu_{xz} = \frac{\psi^2}{3} E_x, \quad \nu_{yx} = \nu_{zx} = \frac{\psi^2}{3} E_y, \quad \nu_{zx} = \nu_{zy} = \frac{\psi^2}{3} E_z \\ G_{xy} = \frac{1}{2\mu_1\mu_2}, \quad G_{yz} = \frac{1}{2\mu_2\mu_3}, \quad G_{zx} = \frac{1}{2\mu_3\mu_1} \end{array} \right. \quad (21)$$

結局、直交異方性体の応力とひずみとの関係式は簡単な次の式に収約される。

$$\boxed{\{\{\mathfrak{D}\}\} \equiv \{\{\mu\}\} \times \{\{\mathfrak{E}\}\} \times \{\{\nu\}\} - \psi^2 \sigma_0 \{\{\mathfrak{G}\}\}} \quad (22)$$

(19) 式を変換して、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  を  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  で示すと

$$\begin{aligned} A\sigma_x &= \left[ \mu_2^2 \mu_3^2 - \frac{(\mu_2^2 + \mu_3^2)}{3} \psi^2 \right] \varepsilon_x + \frac{\mu_3^2 \psi^2 \varepsilon_y}{3} + \frac{\mu_2^2 \psi^2 \varepsilon_z}{3} \\ A\sigma_y &= \frac{\mu_3^2 \psi^2 \varepsilon_x}{3} + \left[ \mu_1^2 \mu_3^2 - \frac{(\mu_1^2 + \mu_3^2)}{3} \psi^2 \right] \varepsilon_y + \frac{\mu_1^2 \psi^2 \varepsilon_z}{3} \\ A\sigma_z &= \frac{\mu_2^2 \psi^2}{3} \varepsilon_x + \frac{\mu_1^2 \psi^2}{3} \varepsilon_y + \left[ \mu_1^2 \mu_2^2 - \frac{(\mu_1^2 + \mu_2^2)}{3} \psi^2 \right] \varepsilon_z \\ A &= \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2 - \frac{\psi^2}{3} (\mu_1^2 \mu_2^2 + \mu_2^2 \mu_3^2 + \mu_3^2 \mu_1^2) \end{aligned}$$

故に  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_0$  は

$$\sigma_0 = \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}{3A} \left[ \frac{\varepsilon_x}{\mu_1^2} + \frac{\varepsilon_y}{\mu_2^2} + \frac{\varepsilon_z}{\mu_3^2} \right]$$

応力成分をひずみ成分で与えたマトリックス形は

$$\boxed{\{\{\mathfrak{E}\}\} \equiv \{\{\mu^{-1}\}\} \times \{\{\mathfrak{D}_1\}\} \times \{\{\mu^{-1}\}\} + \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}{3A} \psi^2 \left[ \frac{\varepsilon_x}{\mu_1^2} + \frac{\varepsilon_y}{\mu_2^2} + \frac{\varepsilon_z}{\mu_3^2} \right] \times \{\{\mu^{-1}\}\} \times \{\{\mu^{-1}\}\}} \quad (23)$$

## 7. 等方性弹性体の弹性係数

直交異方性体の弹性係数の最も特種な形が  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$  の場合で、等方性弹性体と呼ばれる。任意の直交座標変換に対して、応力成分とひずみ成分との関係式が保存される。弹性係数は

$$E = \frac{3}{3\mu^2 - \psi^2}, \quad G = \frac{1}{2\mu^2}, \quad \nu = \frac{\psi^2 E}{3}$$

$E, G, \nu$  で  $\mu^2, \psi^2$  をあらわすと

$$\mu^2 = \frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}, \quad \psi^2 = \frac{3\nu}{E}$$

応力とひずみの関係式

$$\left. \begin{aligned} \{\{\mathfrak{E}\}\} &\equiv \sigma_0 \{\{\mathfrak{G}\}\} + \sigma_1 \{\{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_1\}\} + \sigma_2 \{\{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_2\}\} + \sigma_3 \{\{\mathfrak{F}_3 \times \mathfrak{F}_3\}\} \\ \{\{\mathfrak{D}\}\} &\equiv \frac{1-2\nu}{E} \sigma_0 \{\{\mathfrak{G}\}\} + \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_1 \{\{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2\}\} + \sigma_2 \{\{\mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_3\}\} + \sigma_3 \{\{\mathfrak{F}_3 \times \mathfrak{F}_1\}\} \right] \\ &\equiv \frac{1+\nu}{E} \{\{\mathfrak{E}\}\} - \frac{3\nu}{E} \sigma_0 \{\{\mathfrak{G}\}\} \\ \{\{\mathfrak{E}\}\} &\equiv \frac{E}{1+\nu} \{\{\mathfrak{D}_1\}\} + \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma_0 \{\{\mathfrak{G}\}\} \equiv \frac{E}{1+\nu} \{\{\mathfrak{D}_1\}\} + \frac{3\nu \epsilon_0 E}{1+\nu} \{\{\mathfrak{G}\}\} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

## 8. 応力とひずみのポテンシャル函数

弹性体の変位  $u, v, w$  が、その点のスカラー函数  $\phi$  の偏微分  $\nabla$  で与えられる場合を取り扱う。すなわち

$$\mathfrak{B} \equiv \nabla \phi \equiv \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\}$$

ひずみ成分のマトリックスにおいて、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dots$$

であるから、ひずみ成分のマトリックス  $\{\{\mathfrak{D}\}\}$  は 0 となり、

$$\{\{\mathfrak{D}_i\}\} \equiv \{\nabla \times \nabla\} \emptyset$$

$$\{\nabla \times \nabla\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial z} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (25)$$

応力の釣合の式は、物体力の座標軸方向のコンポーネントを  $\vec{x} = \{X_x, X_y, X_z\}$  で与えると

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + X_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + X_z = 0 \end{array} \right. \quad \text{又は } \nabla \times \{\{\mathfrak{T}\}\} + \mathfrak{X} = 0 \quad (26)$$

(25) 式及び (26) 式を (23) 式に代入して、函数  $\phi$  の関係を与えることができる。

$$\mathfrak{X} + \{\{\mu^{-1}\}\} \times \{\nabla \times \nabla\} \times \{\{\mu^{-1}\}\} \times \mathcal{B}\phi + \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}{3 A} \psi^2 \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \times \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \times \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \times \frac{1}{\mu_3^2} \right] \\ \times \{\{\mu^{-1}\}\} \times \{\{\mu^{-1}\}\} \times \nabla \equiv 0 \quad \dots \quad (27)$$

さて、 $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  は座標軸の伸びを示す係数  $k_1$   $k_2$   $k_3$  で (14) 式のように示されているから  $\mu_i = k_i \mu$ , 更に座標軸の伸びに関して

$$x' = k_1 x, \quad y' = k_2 y, \quad z' = k_3 z$$

の座標軸を考え、偏微分の係数を次式で定義しよう。

$$\nabla' \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right\} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{1}{k_1}, \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{1}{k_2}, \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{1}{k_3} \right\}$$

(27) 式を書き換えると

$$\mathfrak{X} + \frac{1}{\mu^2} \{ \nabla' \times \nabla' \} \times \nabla \phi + \frac{(k_1 k_2 k_3)^2 \mu^4 \psi^2}{3 A} A' \phi \times \{\{\mu^{-1}\}\} \times \{\{\mu^{-1}\}\} \times \nabla \equiv 0 \quad \dots \dots \dots \quad (28)$$

$$\text{但し } \mathfrak{B}' \cdot \mathfrak{B}' = A' = \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right)$$

更に (28) 式に  $\nabla$  を演算させることにより

$$\nabla \cdot \mathfrak{X} + \frac{1}{\mu^2} \{ \nabla' \times \nabla' \} : \{ \nabla \times \nabla \} \Phi + \frac{(k_1 k_2 k_3)^2 \mu^2 \psi^2}{3 A} A' A' \Phi = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (29)$$

いま簡単に考えて、物体力  $\mathbf{x} = 0$  としよう。記号は

$$\left( A A = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{1}{k_1^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \frac{1}{k_2^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} - \frac{1}{k_3^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial v^2} - \frac{1}{k_1^2 k_2^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} - \frac{1}{k_2^2 k_3^2} \right) \right)$$

$$\partial^4 - 1 \rangle$$

$$\{\nabla' \times \nabla'\} : \{\nabla \times \nabla\} = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{1}{k_1^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \frac{1}{k_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \frac{1}{k_3^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{k_1 k_2} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{k_2 k_3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{k_3 k_1} \right)$$

等方性弾性体は  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  であるから

$$\Delta \Delta \Phi = 0$$

函数の重調和函数で与えられることを意味する。更に、等方性弹性体の性質として特種なものは、

$$A \wedge \{u, v, w\} = 0$$

## 9. 平面応力状態の一般式

3次元の応力とひずみの基本式は、形をそのままに保つて平面応力の基本式を誘導することができる。3次元を2次元のベクトル空間にすることにより、表われる記号は

$$\{\{\mathfrak{D}\}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \vdots & \vdots \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}, \quad \{\{\mathfrak{D}_i\}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \tau_{xy}/2 \\ \tau_{xy}/2, \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_1 = \{f_{11}, f_{12}\} & \mathfrak{F}_2 = \{f_{21}, f_{22}\} \\ 2\sigma_0 = \sigma_x + \sigma_y, & 2\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y \\ \lambda_1, \lambda_2 & \mu_1, \mu_2, \psi \quad E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}, G_{xy} \end{cases}$$

(19) 式に代るものとして、直交異方性の関係式は

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \left( \mu_1^2 + \frac{\lambda_1^2 - \mu_1^2}{2} \right) \sigma_x + \frac{\lambda_1^2 - \mu_1^2}{2} \sigma_y \\ \varepsilon_y = \frac{\lambda_2^2 - \mu_2^2}{2} \sigma_x + \left( \mu_2^2 + \frac{\lambda_2^2 - \mu_2^2}{2} \right) \sigma_y \end{cases} \quad (30)$$

$\psi^2 = \mu_1^2 - \lambda_1^2 = \mu_2^2 - \lambda_2^2$  の関係が成立し、弾性係数は

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{2}{2\mu_1^2 - \psi^2}, \quad E_y = \frac{2}{2\mu_2^2 - \psi^2}, \quad G_{xy} = \frac{1}{2\mu_1\mu_2}, \quad \nu_{xy} = \frac{\psi^2}{2}E_x, \\ \nu_{yx} &= -\frac{\psi^2}{2}E_y \end{aligned} \quad (31)$$

(22) 式は 2 次元の応力状態を与える場合にも成立する。

$$\{\{\mathfrak{D}\}\} = \{\{\mu\}\} \times \{\{\mathfrak{E}\}\} \times \{\{\alpha\}\} - \psi^2 \sigma_0 \{\{\mathfrak{G}\}\}$$

$\{\{\mathfrak{E}\}\}$  を  $\{\{\mathfrak{D}_1\}\}$  で表わした逆変換は

$$\begin{aligned} \{\{\mathfrak{E}\}\} &= \{\{\mu^{-1}\}\} \times \{\{\mathfrak{D}_1\}\} \times \{\{\mu^{-1}\}\} + \frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{2B} \psi^2 \left[ \frac{\varepsilon_x}{\mu_1^2} + \frac{\varepsilon_y}{\mu_2^2} \right] \times \{\{\mu^{-1}\}\} \times \{\{\mu^{-1}\}\} \\ B &= \mu_1^2 \mu_2^2 - (\mu_1^2 + \mu_2^2) \psi^2 \end{aligned}$$

(29) 式と同様に、ひずみをポテンシャル函数  $\phi$  で与え、 $\tilde{x} = 0$  を考えるとき

$$\frac{1}{\mu^2} \{\nabla' \times \nabla'\} : \{\nabla \times \nabla\} \phi + \frac{(k_1 k_2)^2 \psi^2}{2B} A' A' \phi = 0$$

## 10. 後 記

応力とひずみの相関を考えた重要な問題は弾塑性体の力学がある。演算の法則をベクトルの積で示せば、変数として時間の函数が入つて来るだけの相違で (22) 式及び (23) 式の基本形から誘導する釣合条件式ができる。この展開は次の機会に発表したい。

## 参 考 文 献

1) 倉西正嗣: 弹性学

2) 島田静雄: マトリックスの Affine 標示及びその理論, 土木学会論文集 44 号

(昭. 32. 5. 7)